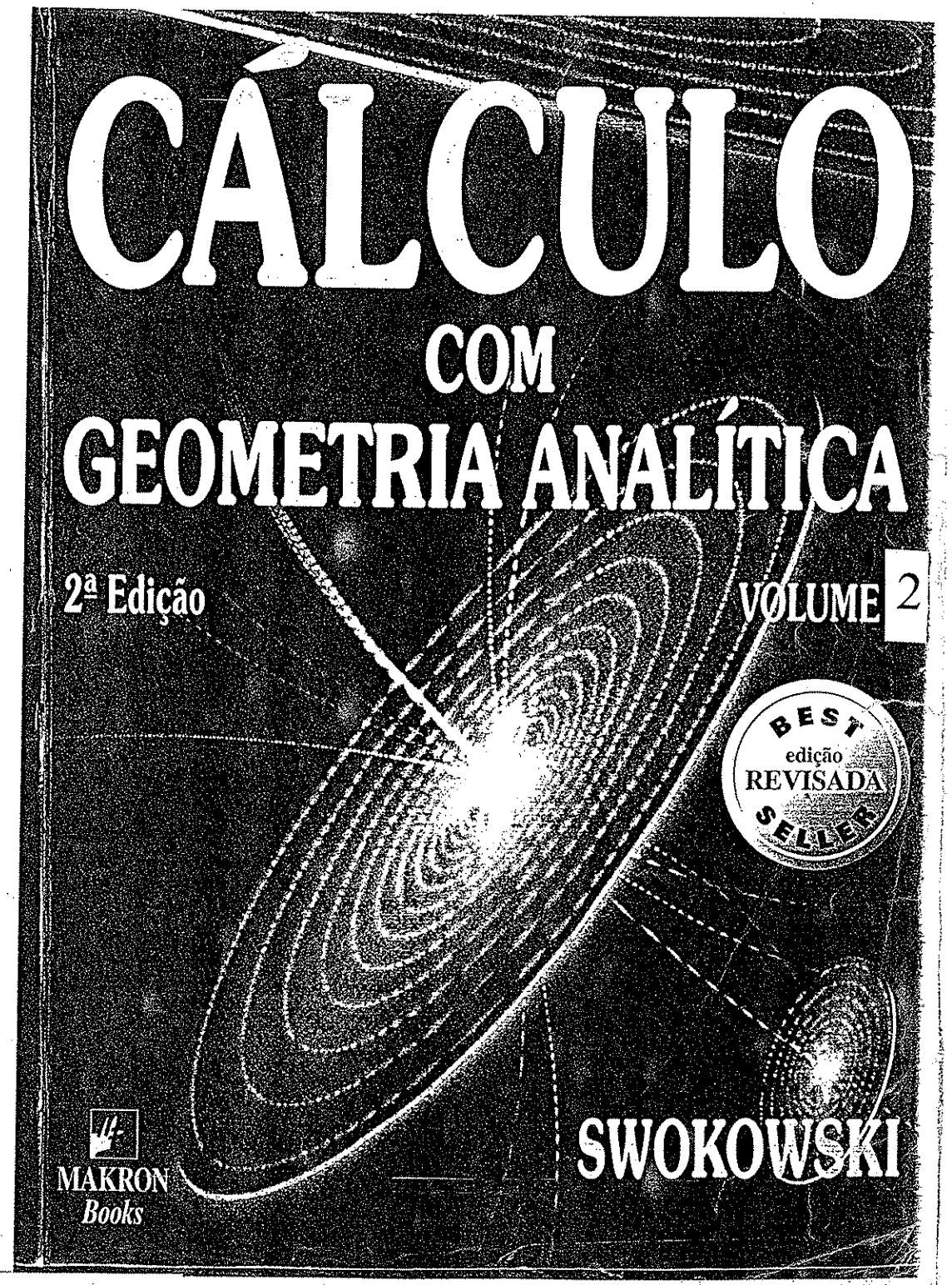

CÁLCULO
COM
GEOMETRIA ANALÍTICA
2ª Edição
VOLUME 2
BEST
edição
REVISADA
SELLER
MAKRON
Books
SWOKOWSKI

UFPB/BIBLIOTECA/PRAI

MAKRON Books

CÁLCULO
Com Geometria Analítica

Volume 2
2ª Edição

Earl W. SWOKOWSKI
Marquette University

Tradução
Alfredo Alves de Farias
Professor adjunto (aposentado) da UFMG

Com a colaboração dos professores
Vera Regina L. F. Flores e
Marcio Quintão Moreno
da UFMG

Revisão Técnica
Antonio PERTENCE Júnior
Professor e Engenheiro Técnico
Membro efetivo da Sociedade Brasileira de Matemática
Licenciado em Matemática

01557/00

MAKRON *Books* do Brasil Editora Ltda.
Rua Tabapuã, 1.348, Itaim-Bibi
CEP 04533-004 - São Paulo
(011) 829-8604 e (011) 820-6622

Rio de Janeiro • Lisboa • Bogotá • Buenos Aires • Guatemala • Madrid • México • New York • Panamá • San Juan • Santiago

Auckland • Hamburg • Kuala Lumpur • London • Milan • Montreal • New Delhi • Paris • Singapore • Sydney • Tokyo • Toronto

SALA DE RESERVA

Do original
Calculus – Fifth Edition

Copyright © 1991, by PWS-Kent, uma divisão da Wadsworth, Inc.
Copyright © 1995, da Makron *Books* do Brasil Editora Ltda.
Copyright © 1983, da Editora McGraw-Hill do Brasil, Ltda.

Todos os direitos para a língua portuguesa reservados pela Makron *Books* do Brasil Editora Ltda.

Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida, guardada pelo sistema "retrieval" ou transmitida de qualquer modo ou por qualquer outro meio, seja este eletrônico, mecânico, de fotocópia, de gravação, ou outros, sem prévia autorização, por escrito, da Editora.

EDITOR: MILTON MIRA DE ASSUMPÇÃO FILHO

Gerente Editorial: Daisy Pereira Daniel
Produtora Editorial: Mônica Franco Jacintho
Produtor Gráfico: José Rodrigues
Capa: Layout: José Roberto Petroni

UFFb · BIBLIOTECA · CAMPUS II
3557 | 30-08-2000

Editoração Eletrônica e Fotolitos: ERJ Informática Ltda.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Swokowski, Earl William, 1926-
Cálculo com geometria analítica / Earl W. Swokowski : tradução Alfredo Alves de Faria, com a colaboração dos professores Vera Regina L.F. Flores e Marcio Quintão Moreno ; revisão técnica Antonio Pertence Júnior. -- 2. ed. -- São Paulo : Makron Books, 1994.

Publicado vol. 1.
1. Cálculo 2. Geometria analítica I. Título.

94-2309 CDD-515.15

Índices para catálogo sistemático:

1. Cálculo e geometria analítica 515.15

AK142

À memória de
minha mãe e meu pai,
Sophia e John Swokowski.

FÓRMULAS DE DERIVADAS

1 $D_x c = 0$

2 $D_x (u + v) = D_x u + D_x v$

3 $D_x (uv) = uD_x v + v D_x u$

4 $D_x \left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v D_x u - u D_x v}{v^2}$

5 $D_x f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$

6 $D_x u^n = nu^{n-1} D_x u$

7 $D_x e^u = e^u D_x u$

8 $D_x a^u = a^u \ln a \, D_x u$

9 $D_x \ln|u| = \frac{1}{u} D_x u$

10 $D_x \log_a|u| = \frac{1}{u \ln a} D_x u$

11 $D_x \operatorname{sen} u = \cos u \, D_x u$

12 $D_x \cos u = -\operatorname{sen} u \, D_x u$

13 $D_x \operatorname{tg} u = \sec^2 u \, D_x u$

14 $D_x \cot u = -\csc^2 u \, D_x u$

15 $D_x \sec u = \sec u \operatorname{tg} u \, D_x u$

16 $D_x \csc u = -\csc u \cot u \, D_x u$

17 $D_x \operatorname{sen}^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} D_x u$

18 $D_x \cos^{-1} u = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} D_x u$

19 $D_x \operatorname{tg}^{-1} u = \frac{1}{1+u^2} D_x u$

20 $D_x \sec^{-1} u = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} D_x u$

FÓRMULAS DE INTEGRAIS

1 $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

2 $\int u^n\,du = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + C, \quad n \neq -1$

3 $\int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C$

4 $\int e^u\,du = e^u + C$

5 $\int a^u\,du = \frac{1}{\ln a} a^u + C$

6 $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$

7 $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$

8 $\int \sec^2 u\,du = \operatorname{tg} u + C$

9 $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$

10 $\int \sec u \operatorname{tg} u\,du = \sec u + C$

11 $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$

12 $\int \operatorname{tg} u\,du = -\ln|\cos u| + C$

13 $\int \cot u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$

14 $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \operatorname{tg} u| + C$

15 $\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + C$

16 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}}\,du = \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

17 $\int \frac{1}{a^2+u^2}\,du = \frac{1}{a}\operatorname{tg}^{-1}\frac{u}{a} + C$

18 $\int \frac{1}{u\sqrt{u^2-a^2}}\,du = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{u}{a} + C$

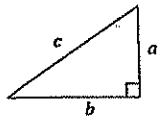
19 $\int \frac{1}{a^2-u^2}\,du = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C$

20 $\int \frac{1}{\sqrt{u^2-a^2}}\,du = \ln|u + \sqrt{u^2-a^2}| + C$

FÓRMULAS DA GEOMETRIA

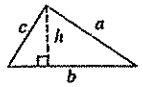
Área A; circunferência C; volume V; área de uma superfície curva S; altura h; raio r.

TRIÂNGULO RETÂNGULO



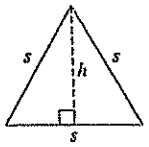
Teorema de Pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2$

TRIÂNGULO



$A = \frac{1}{2}bh \qquad C = a + b + c$

TRIÂNGULO EQUILÁTERO

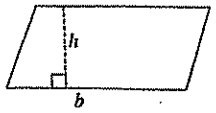


$h = \frac{\sqrt{3}}{2}s \qquad A = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2$

RETÂNGULO

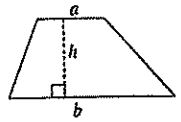
$A = lw \qquad C = 2l + 2w$

PARALELOGRAMO



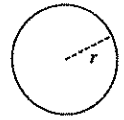
$A = bh$

TRAPEZÓIDE



$A = \frac{1}{2}(a + b)h$

CÍRCULO

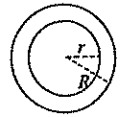


$A = \pi r^2 \qquad C = 2\pi r$

SETOR CIRCULAR

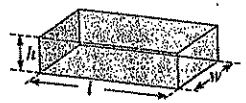
$A = \frac{1}{2}r^2\theta \qquad s = r\theta$

COROA CIRCULAR



$A = \pi(R^2 - r^2)$

CAIXA RETANGULAR

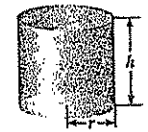


$V = lwh \qquad S = 2(hl + lw + hw)$

ESFERA

$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad S = 4\pi r^2$

CILINDRO CIRCULAR RETO

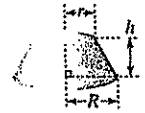


$V = \pi r^2 h \qquad S = 2\pi rh$

CONE CIRCULAR RETO

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \qquad S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$

TRONCO DE CONE



$V = \frac{1}{3}\pi h(r^2 + rR + R^2)$

PRISMA

$V = Bh$, sendo B a área da base

ÁLGEBRA

EXPOENTES E RADICAIS

$a^m a^n = a^{m+n}$ $\quad a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

$(a^m)^n = a^{mn}$ $\quad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$

$(ab)^n = a^n b^n$ $\quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $\quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $\quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

VALOR ABSOLUTO ($d > 0$)

$|x| < d$ se e só se $-d < x < d$

$|x| > d$ se e só se $x > d$ ou $x < -d$

$|a+b| \le |a| + |b|$ (desigualdade do triângulo)

$-|a| \le a \le |a|$

DESIGUALDADES

Se $a > b$ e $b > c$, então $a > c$

Se $a > b$, então $a + c > b + c$

Se $a > b$ e $c > 0$, então $ac > bc$

Se $a > b$ e $c < 0$, então $ac < bc$

FÓRMULA QUADRÁTICA

Se $a \neq 0$, as raízes de $ax^2 + bx + c = 0$ são

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

LOGARITMOS

$y = \log_a x$ significa $a^y = x$ $\quad \log_a 1 = 0$

$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ $\quad \log_a a = 1$

$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ $\quad \log x = \log_{10} x$

$\log_a x^r = r \log_a x$ $\quad \ln x = \log_e x$

TEOREMA BINOMIAL

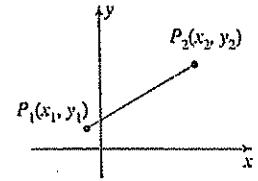
$$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \dots + \binom{n}{k}x^{n-k}y^k + \dots + y^n,$$

onde $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

GEOMETRIA ANALÍTICA

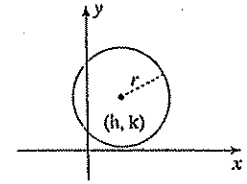
FÓRMULA DA DISTÂNCIA

$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$



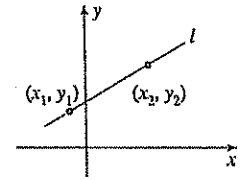
EQUAÇÃO DE UM CÍRCULO

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$



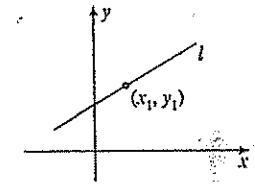
COEFICIENTE ANGULAR m DE UMA RETA

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$



FORMA PONTO-COEFICIENTE ANGULAR

$y - y_1 = m(x - x_1)$



FORMA COEFICIENTE ANGULAR-INTERCEPTO

$y = mx + b$

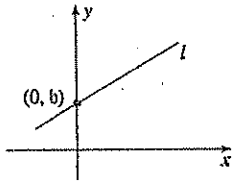
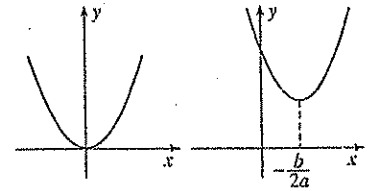


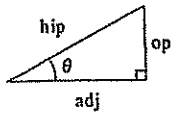
GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO QUADRÁTICA

$y = ax^2, a > 0$ $\quad y = ax^2 + bx + c,\ a > 0$



TRIGONOMETRIA

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS DE ÂNGULOS AGUDOS

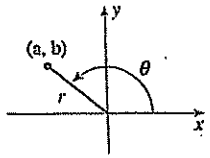


$$\operatorname{sen}\theta = \frac{op}{hip} \qquad \csc\theta = \frac{hip}{op}$$

$$\cos\theta = \frac{adj}{hip} \qquad \sec\theta = \frac{hip}{adj}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{op}{adj} \qquad \cot\theta = \frac{adj}{op}$$

DE ÂNGULOS ARBITRÁRIOS

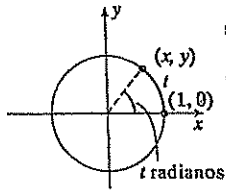


$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{r} \qquad \csc\theta = \frac{r}{b}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{r} \qquad \sec\theta = \frac{r}{a}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{b}{a} \qquad \cot\theta = \frac{a}{b}$$

DE NÚMEROS REAIS

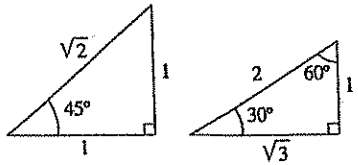


$$\operatorname{sen} t = y \qquad \csc t = \frac{1}{y}$$

$$\cos t = x \qquad \sec t = \frac{1}{x}$$

$$\operatorname{tg} t = \frac{y}{x} \qquad \cot t = \frac{x}{y}$$

TRIÂNGULOS ESPECIAIS



IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

$$\csc t = \frac{1}{\operatorname{sen} t} \qquad \operatorname{tg} t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}$$

$$\sec t = \frac{1}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t}$$

$$\cot t = \frac{1}{\operatorname{tg} t}$$

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1 \qquad \operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 t = \sec^2 t \qquad \cos(-t) = \cos t$$

$$1 + \cot^2 t = \csc^2 t \qquad \operatorname{tg}(-t) = -\operatorname{tg} t$$

$$\operatorname{sen}(u+v) = \operatorname{sen} u \cos v + \cos u \operatorname{sen} v$$

$$\cos(u+v) = \cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$$

$$\operatorname{tg}(u+v) = \frac{\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v}{1 - \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v}$$

$$\operatorname{sen}(u-v) = \operatorname{sen} u \cos v - \cos u \operatorname{sen} v$$

$$\cos(u-v) = \cos u \cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$$

$$\operatorname{tg}(u-v) = \frac{\operatorname{tg} u - \operatorname{tg} v}{1 + \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v}$$

$$\operatorname{sen} 2u = 2 \operatorname{sen} u \cos u$$

$$\cos 2u = \cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u = 1 - 2\operatorname{sen}^2 u = 2\cos^2 u - 1$$

$$\operatorname{tg} 2u = \frac{2 \operatorname{tg} u}{1 - \operatorname{tg}^2 u}$$

$$\left|\operatorname{sen}\frac{u}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos u}{2}} \qquad \left|\cos\frac{u}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos u}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{u}{2} = \frac{1-\cos u}{\operatorname{sen} u} = \frac{\operatorname{sen} u}{1+\cos u}$$

$$\operatorname{sen}^2 u = \frac{1-\cos 2u}{2} \qquad \cos^2 u = \frac{1+\cos 2u}{2}$$

$$\operatorname{sen} u \cos v = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(u+v) + \operatorname{sen}(u-v)]$$

$$\cos u \operatorname{sen} v = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(u+v) - \operatorname{sen}(u-v)]$$

$$\cos u \cos v = \tfrac{1}{2}[\cos(u+v) + \cos(u-v)]$$

$$\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \tfrac{1}{2}[\cos(u-v) - \cos(u+v)]$$

VALORES ESPECIAIS DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

θ (graus)	θ (radianos)	sen θ	cos θ	tg θ	cot θ	sec θ	csc θ
0°	0	0	1	0	–	1	–
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	–	0	–	1

MAKRON Books

SUMÁRIO

Volume I

Capítulo 1	Revisão pré-cálculo
Capítulo 2	Limites de funções
Capítulo 3	A Derivada
Capítulo 4	Aplicações da derivada
Capítulo 5	Integrais
Capítulo 6	Aplicações da integral definida
Capítulo 7	Funções logarítmicas e exponencial
Capítulo 8	Funções trigonométricas inversas e hiperbólicas
Capítulo 9	Técnicas de integração
Capítulo 10	Formas indeterminadas e integrais impróprias

Volume II

Capítulo 11 Séries infinitas

Capítulo 12 Tópicos de geometria analítica

Capítulo 13 Curvas planas e coordenadas polares

Capítulo 14 Vetores e superfícies

Capítulo 15 Funções com valores vetoriais

Capítulo 16 Diferenciação parcial

Capítulo 17 Integrais múltiplas

Capítulo 18 Cálculo vetorial

Capítulo 19 Equações diferenciais

MAKRON Books

ÍNDICE

Prefácio XIX

I. Modificações para esta edição XIX

II. Características do texto XXI

Ao estudante XXV

Capítulo 11 — Séries infinitas 1

11.1 Seqüências 2

11.2 Séries convergentes ou divergentes 18

11.3 Séries de termos positivos 33

11.4 Os testes da razão e da raiz 47

11.5 Séries alternadas e convergência absoluta 52

11.6 Séries de potências 64

11.7 Representação de funções por séries de potências 73

11.8 Séries de Maclaurin e de Taylor 82

11.9 Aplicações dos polinômios de Taylor 96

11.10 A série binomial 103

Capítulo 12 — Tópicos de geometria analítica 111

12.1 Parábolas 112

12.2 Elipses 126

SALA DE RESERVA

12.3 Hipérboles 138
12.4 Rotação de eixos 151

Capítulo 13 — Curvas planas e coordenadas polares 159
13.1 Curvas planas 160
13.2 Tangentes e comprimentos de arco 172
13.3 Coordenadas polares 181
13.4 Integrais em coordenadas polares 194
13.5 Equação polar das cônicas 202

Capítulo 14 — Vetores e superfícies 211
14.1 Vetores em duas dimensões 212
14.2 Vetores em três dimensões 225
14.3 O produto escalar 233
14.4 O produto vetorial 244
14.5 Retas e planos 253
14.6 Superfícies 268

Capítulo 15 — Funções com valores vetoriais 289
15.1 Funções com valores vetoriais e curvas no espaço 290
15.2 Limites, derivadas e integrais 298
15.3 Movimento 307
15.4 Curvatura 317
15.5 Componentes tangencial e normal da aceleração 331
15.6 Leis de Kepler 338

Capítulo 16 — Diferenciação parcial 345
16.1 Funções de várias variáveis 346
16.2 Limites e continuidade 359
16.3 Derivadas parciais 371
16.4 Incrementos e diferenciais 382
16.5 Regras da cadeia 397
16.6 Derivadas direcionais 408

16.7 Planos tangentes e retas normais 421
16.8 Extremos de funções de diversas variáveis 430
16.9 Multiplicadores de Lagrange 444

Capítulo 17 — Integrais múltiplas 459
17.1 Integrais duplas 460
17.2 Área e volume 474
17.3 Integrais duplas em coordenadas polares 485
17.4 Área de uma superfície 494
17.5 Integrais triplas 498
17.6 Momentos e centros de massa 512
17.7 Coordenadas cilíndricas 522
17.8 Coordenadas esféricas 533
17.9 Mudança de variáveis e jacobianos 541

Capítulo 18 — Cálculo vetorial 559
18.1 Campos vetoriais 560
18.2 Integrais curvilíneas 570
18.3 Independência do caminho 584
18.4 O teorema de green 595
18.5 Integrais de superfície 604
18.6 O teorema da divergência 615
18.7 O teorema de Stokes 623

Capítulo 19 — Equações diferenciais 637
19.1 Equações diferenciais separáveis 638
19.2 Equações diferenciais lineares de primeira ordem 645
19.3 Equações diferenciais lineares de segunda ordem 654
19.4 Equações diferenciais lineares não-homogêneas 660
19.5 Vibrações 666
19.6 Soluções em séries 672

Apêndice 677
I – Indução matemática 677
II – Teoremas sobre limites, derivadas e integrais 682
III – Tabelas 699
IV – Tábua de integrais 702

Respostas dos exercícios de número ímpar 709

Índice analítico 757

MAKRON Books

PREFÁCIO

A revisão da edição original deste livro foi empreendida com três objetivos em mente. O primeiro é tornar o livro mais voltado para o estudante, ampliando discussões e proporcionando maior número de exemplos e ilustrações para melhor esclarecer os conceitos. Para auxiliar ainda mais o leitor, foram acrescentadas, em muitas seções do texto, sugestões para a resolução de problemas. O segundo objetivo é enfatizar a utilidade do cálculo por meio de aplicações atualizadas de derivadas e integrais. O terceiro objetivo – tornar o livro tão livre de erros quanto possível – foi alcançado por meio de um exame cuidadoso do texto explicativo, aliado a uma verificação minuciosa de cada exemplo e exercício.

I MODIFICAÇÕES PARA ESTA EDIÇÃO

Sugestões diversas, oferecidas por professores e revisores, resultaram na necessidade de reescrever e reorganizar a obra. Indicamos a seguir as principais modificações.*

VOLUME I

CAPÍTULO 1 O número de seções de revisão foi reduzido de seis para três, e demonstrações de resultados do pré-cálculo foram substituídas por exemplos sobre desigualdades, equações e gráficos.

CAPÍTULO 2 Há maior ênfase na significação gráfica dos limites. Utilizam-se uma aplicação física e afirmações não muito rigorosas para motivar a definição ϵ–δ. Na Seção 2.4 são estudados os limites que envolvem infinito (∞).

N.R.: Para facilitar o trabalho do aluno, o livro original foi dividido em dois volumes. O primeiro volume contém os capítulos 1 a 10 e o segundo, 11 a 19. Ambos contêm Prefácio, Apêndices e Índice Analítico.

CAPÍTULO 3 As interpretações da derivada como coeficiente angular da tangente e como taxa de variação de uma função foram consideradas simultaneamente, e não em seções separadas. Na Seção 3.2 foram introduzidos a regra da potência para números racionais e o conceito de derivada de ordem superior. Deu-se maior ênfase ao uso de diferenciais como aproximações lineares de valores de funções.

CAPÍTULO 4 A definição de concavidade foi modificada de modo a tornar mais fácil estabelecer a relação entre o sinal de uma derivada e a forma de um gráfico. Uma nova seção, intitulada *Resumo dos Métodos Gráficos*, inclui uma lista de passos, ou estágios, para esboçar o gráfico de uma função.

CAPÍTULO 5 Antiderivadas e integrais indefinidas são estudadas nas duas primeiras seções, em lugar de em capítulos diferentes. Há quinze novos exemplos relativos a integrais definidas.

CAPÍTULO 6 Quase todos os exemplos sobre aplicações de integrais definidas foram refeitos, de modo a substituir limites formais de normas por um método mais intuitivo utilizando diferenciais. Dão-se sugestões sobre estratégia para determinação de áreas e volumes.

CAPÍTULO 7 A demonstração da fórmula da derivada de uma função inversa é dada na primeira seção e não na última. As integrais da tangente, da co-tangente, da secante e da cos-secante são estudadas na Seção 7.4 (e não no Capítulo 8).

CAPÍTULO 8 Os tópicos considerados restringem-se às funções trigonométricas e hiperbólicas inversas.

CAPÍTULO 9 Foram melhoradas as explicações e as sugestões referentes aos métodos de integração.

CAPÍTULO 10 Para facilitar a referência, as definições e notações para formas indeterminadas são apresentadas em tabelas. O estudo da fórmula de Tayler foi transferido para o Capítulo 11.

VOLUME II

CAPÍTULO 11 Deu-se maior ênfase às diferenças entre seqüências, somas parciais, somas de séries infinitas e ao fato de que os testes de convergência *não* determinam a soma de uma série. Foi completamente reorganizado o material sobre a representação de funções por séries de potência e séries de Taylor.

CAPÍTULO 12 Incluem-se aplicações adicionais do cálculo envolvendo seções cônicas, de modo que o estudo não se limite simplesmente a uma revisão de tópicos de pré-cálculo.

CAPÍTULO 13 Foi acrescentado e incorporado a exemplos e exercícios o conceito de *orientação* de uma curva.

CAPÍTULO 14 Para facilitar a visualização e o esboço de superfícies, muitos exemplos ilustram o traço da superfície em cada plano coordenado. O estudo das coordenadas cilíndricas e esféricas passa para o Capítulo 17.

CAPÍTULO 15 A introdução às funções com valores vetoriais foi reescrita e integrada à noção de curva no espaço. Deu-se proeminência à utilização do comprimento do arco como parâmetro.

CAPÍTULO 16 Dezesseis novas figuras contribuem para dar maior ênfase aos gráficos e à interpretação geométrica das funções de diversas variáveis. Na Seção 16.4 explica-se o método de Newton para um sistema de duas equações não-lineares. Ampliou-se o estudo sobre os multiplicadores de Lagrange.

CAPÍTULO 17 A definição de integral dupla e métodos de cálculo estão englobados em uma seção, em lugar de duas. O estudo da integral tríplice em coordenadas cilíndricas e esféricas é feito em duas seções separadas.

CAPÍTULO 18 Há uma exposição mais detalhada dos campos vetoriais conservativos e da técnica de determinação de uma função potencial a partir do gradiente. Em dois novos exemplos aplicam-se o teorema de Stokes e o conceito de circulação à análise dos ventos no interior de um tornado.

CAPÍTULO 19 A última seção é dedicada às soluções de equações diferenciais por meio de séries.

II CARACTERÍSTICAS DO TEXTO

APLICAÇÕES A edição original continha exemplos de aplicação abrangendo áreas como engenharia, física, química, biologia, economia, fisiologia, sociologia, psicologia, ecologia, oceanografia, meteorologia, radioterapia, astronáutica e transporte. Esta lista, já por si bastante extensa, foi acrescida de exemplos e exercícios que incluem aplicações modernas do cálculo ao planejamento de computadores, análise de graus de temperatura e medida da espessura da camada de ozônio, efeito

estufa, circulação dos ventos dentro de um tornado, energia liberada pelos terremotos, densidade da atmosfera, movimento dos braços de um robô e efeitos do gás radon sobre a saúde.

EXEMPLOS Exemplos bem estruturados apresentam soluções de problemas análogos aos que constituem as listas de exercícios. Muitos exemplos contêm gráficos, quadros ou tabelas que auxiliam o estudante a compreender os processos e as soluções. Há também *ilustrações* legendadas, que constituem breves demonstrações do uso de definições, leis ou teoremas. Sempre que viável, incluem-se aplicações que indicam a utilidade de um tópico.

EXERCÍCIOS As listas de exercícios começam com problemas de rotina e progridem gradativamente até exercícios mais complexos. Muitos exercícios contendo gráficos foram acrescentados a esta edição. Os problemas aplicados geralmente vêm no fim das listas, para permitir ao estudante ganhar confiança em manipulações e idéias novas antes de tentar questões que exijam análise de situações práticas. Uma característica desta edição é a inclusão de mais de 300 exercícios marcados com o símbolo ⊡ , destinados especificamente para serem resolvidos com o auxílio de uma calculadora científica ou um computador. Exigem-se recursos gráficos para alguns desses exercícios (veja observações contidas no tópico *Calculadoras*).

RESPOSTAS A seção de respostas na parte final do livro contém as respostas da maioria dos exercícios de número ímpar. Considerável esforço foi desenvolvido para tornar esta seção um instrumento de aprendizagem e não um simples repositório de dados para conferir respostas. Para ilustrar, se uma resposta é a área de uma superfície ou o volume de um sólido, dá-se uma integral definida adequada juntamente com seu valor. Para muitos exercícios numéricos, as respostas são dadas tanto na forma exata como em forma aproximada. Incluem-se gráficos, provas e sugestões sempre que forem convenientes.

CALCULADORAS Como os estudantes podem ter acesso a diversos tipos de calculadoras ou computadores, não procuramos categorizar os exercícios marcados com ⊡. O enunciado de um problema deve proporcionar informação suficiente para indicar ou sugerir o tipo de calculadora ou computador disponível para obter uma solução numérica. Por exemplo, se um exercício indica que se deve aplicar a regra trapezoidal com $n = 4$, qualquer calculadora é adequada, desde que a função não seja muito complicada. Já para $n = 20$, é recomendável uma calculadora programável ou um computador. Se a solução de um exercício envolve um gráfico, pode ser adequada uma calculadora que imprima gráficos; todavia, funções ou superfícies complicadas podem exigir um equipamento computacional sofisticado. Como a precisão numérica depende também do tipo de dispositivo computacional utilizado, algumas respostas aparecem arredondadas para duas casas decimais; em outros casos, a precisão pode chegar a oito casas decimais.

PLANEJAMENTO DO TEXTO E DAS FIGURAS O texto foi completamente reestruturado de modo a tornar as discussões mais fáceis de seguir e a enfatizar conceitos importantes. Todos os gráficos foram refeitos. Os gráficos de funções de uma ou duas variáveis foram gerados em computador e desenhados com alto grau de precisão, utilizando a mais moderna tecnologia.

FLEXIBILIDADE As instituições de ensino que utilizaram as edições anteriores do livro atestam a flexibilidade do texto. Seções e capítulos podem ser reordenados de diferentes maneiras, dependendo dos objetivos e da duração do curso.

Earl W. Swokowski

MAKRON
Books

AO ESTUDANTE

O cálculo foi descoberto no século XVII como instrumento para investigar problemas que envolvem movimento. Para estudar objetos que se movem a velocidades constantes e ao longo de trajetórias retilíneas ou circulares, a álgebra e a trigonometria podem ser suficientes; mas, se a velocidade varia ou se a trajetória é irregular, o cálculo torna-se necessário. Uma descrição cuidadosa de movimento exige definições precisas de *velocidade* (espaço percorrido na unidade de tempo) e *aceleração* (taxa de variação da velocidade). Estas definições podem ser obtidas utilizando-se um dos conceitos fundamentais do cálculo – a *derivada*.

Embora o cálculo tenha se desenvolvido para resolver problemas de física, sua potência e versatilidade levaram aos mais diversos campos de estudo. As aplicações atuais da derivada incluem a investigação da taxa de crescimento de bactérias em uma cultura, a predição de resultados de uma reação química, a mensuração de variações instantâneas na corrente elétrica, a descrição do comportamento de partículas atômicas, a estimativa da evolução de um tumor na terapia radioativa, a previsão de resultados econômicos e a análise de vibrações num sistema mecânico.

A derivada também é utilizada na resolução de problemas que envolvem valores máximos ou mínimos, tais como fabricar uma caixa retangular de volume dado e pelo menor custo, calcular a distância máxima a ser percorrida por um foguete, obter o fluxo máximo de tráfego através de uma ponte, determinar o número de poços a perfurar num campo petrolífero de modo a obter a produção mais eficiente, determinar o ponto entre duas fontes luminosas no qual a iluminação seja

máxima e maximizar o lucro na fabricação de certo produto. Os matemáticos freqüentemente utilizam derivadas para determinar tangentes a curvas e para auxiliar na análise de gráficos de funções complexas.

Outro conceito fundamental do cálculo – a *integral definida* – é motivado pelo problema da determinação de áreas de regiões com fronteiras curvas. Tanto quanto as derivadas, as integrais definidas são também utilizadas nos mais diversos campos. Veja algumas aplicações: determinar o centro de massa ou o momento de inércia de um sólido, determinar o trabalho necessário para mandar uma sonda espacial a outro planeta, calcular o fluxo sangüíneo através de uma artéria, estimar a depreciação do equipamento de uma fábrica, determinar a quantidade de diluição de um corante em certos testes fisiológicos. Utilizamos também integrais definidas para investigar conceitos tais como área de uma superfície curva, volume de um sólido geométrico ou comprimento de uma curva.

Ambos os conceitos de derivada e integral são definidos por processos de limites. A noção de *limite* é a idéia inicial que separa o cálculo da matemática elementar. Sir Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) descobriram independentemente a conexão entre derivadas e integrais, e a invenção do cálculo é atribuída a ambos. Muitos outros matemáticos deram importantes contribuições ao desenvolvimento do cálculo nos últimos 300 anos.

As aplicações do cálculo aqui mencionadas são apenas algumas dentre as muitas que serão estudadas neste livro. Certamente não poderemos discutir todas as aplicações do cálculo, inclusive porque sempre novas aplicações vêm sendo desenvolvidas à medida que a técnica avança. Qualquer que seja o campo de interesse do estudante, o cálculo quase que certamente será utilizado em alguma investigação pura ou aplicada. Talvez o próprio estudante venha a desenvolver mais uma aplicação para este ramo da ciência.

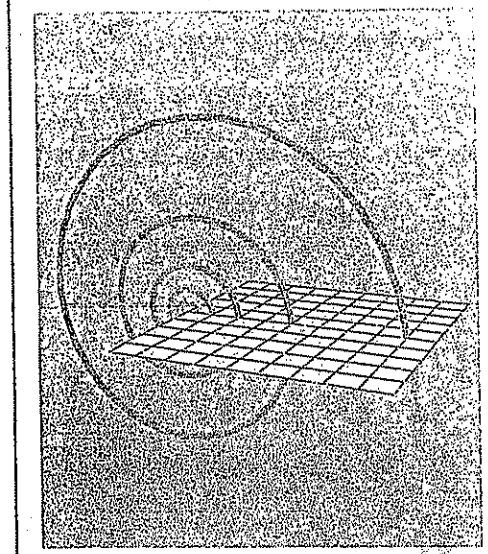
MAKRON Books

Capítulo 11

SÉRIES INFINITAS

INTRODUÇÃO

Para x real, podemos em geral obter sen x, e^x, ln x, arc tg x e valores de outras funções transcendentes utilizando uma calculadora ou uma tabela. Um problema mais fundamental consiste em determinar *como* as calculadoras calculam esses números, ou *como* se constrói uma tabela. Na Seção 11.6 estudaremos como as *séries infinitas* (somas infinitas de certo tipo) podem ser usadas para obter valores funcionais. Especificamente, se uma função f satisfaz certas condições, desenvolveremos técnicas para *representar* $f(x)$ como uma série infinita cujos termos contêm potências de uma variável x. Substituindo x por um número c e determinando (ou aproximando) a soma infinita resultante, obtemos o valor (ou uma aproximação) de $f(c)$. Isto é, em essência, o que uma calculadora faz quando calcula valores de funções.



Esta nova maneira de representar funções é a principal razão para o desenvolvimento da teoria das cinco primeiras seções. A representação, por séries infinitas, de sen x, e^x e outras expressões permite-nos abordar problemas que não podem ser resolvidos por métodos finitos. Por exemplo, restringindo-se x convenientemente, podemos calcular integrais como $\int \text{sen } \sqrt{x}\,dx$ e $\int e^{-x^2}\,dx$ – algo que não nos era dado fazer no Capítulo 9. Outra aplicação, no Capítulo 19, é a utilização de séries infinitas para estender as definições de sen x, e^x e outras ao caso em que x é um número complexo $a + bi$, com a e b reais e $i^2 = -1$.

11.1 SEQÜÊNCIAS

Denota-se uma *seqüência infinita* arbitrária como

Notação (11.1) $$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

Por conveniência, referimo-nos às seqüências infinitas simplesmente como *seqüências*. Podemos encarar (11.1) como uma coleção de números reais em correspondência biunívoca com os inteiros positivos. Cada número a_k é um **termo** da seqüência. A seqüência é *ordenada*, no sentido de que existe um **primeiro termo**, a_1, um **segundo termo**, a_2, e, se n denota um inteiro positivo arbitrário, um n^{mo} termo a_n.

Podemos também definir uma seqüência como uma função. Lembremos que uma função f é uma correspondência que associa a cada número x do domínio exatamente um número $f(x)$ do contradomínio. Restringindo o domínio ao conjunto dos inteiros positivos 1, 2, 3, ..., obtemos uma seqüência.

Definição (11.2) Uma seqüência é uma função f cujo domínio é o conjunto dos inteiros positivos.

Neste texto, o contradomínio de uma seqüência será o conjunto dos números reais. Se uma função f é uma seqüência, então a cada inteiro positivo k corresponde um número real $f(k)$. Os números do contradomínio podem ser denotados por

$$f(1), f(2), f(3), \ldots, f(n), \ldots$$

Os três pontos no final indicam que a seqüência não termina.

Note que a Definição (11.2) conduz à forma indicial (11.1), fazendo-se $a_k = f(k)$ para cada inteiro positivo k. Reciprocamente, dada (11.1), podemos obter a função f em (11.2) fazendo $f(k) = a_k$ para cada k.

Encarando uma seqüência como uma função f, podemos considerar seu gráfico em um plano xy. Como o domínio de f é o conjunto de inteiros positivos, os únicos pontos do gráfico são

$$(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), \ldots, (n, a_n), \ldots,$$

onde a_n é o n^{mo} termo da seqüência (ver Figura 11.1). Às vezes usamos o gráfico de uma seqüência para ilustrar o comportamento do n^{mo} termo a_n quando n cresce indefinidamente.

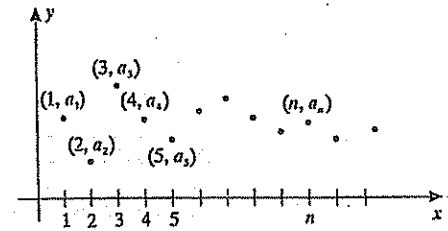


Figura 11.1 Gráfico de uma seqüência.

Outra notação para uma seqüência cujo n^{mo} termo é a_n é $\{a_n\}$. Por exemplo, a seqüência $\{2^n\}$ tem 2^n como n.^{mo} termo. Utilizando a notação de (11.1), escrevemos esta seqüência como segue:

$$2^1, 2^2, 2^3, \ldots, 2^n, \ldots$$

Pela Definição (11.2), a seqüência $\{2^n\}$ é a função f com $f(n) = 2^n$ para todo inteiro positivo n.

EXEMPLO 1

Relacione os quatro primeiros termos e o décimo termo de cada seqüência:

(a) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ (b) $\{2 + (0{,}1)^n\}$

(c) $\left\{(-1)^{n+1}\dfrac{n^2}{3n-1}\right\}$ (d) $\{4\}$

SOLUÇÃO

Para achar os quatro primeiros termos, fazemos sucessivamente $n = 1, 2, 3$ e 4 na fórmula de a_n. Obtém-se o décimo termo fazendo $n = 10$. Após simplificação, obtemos:

	SEQÜÊNCIA	n.^{mo} TERMO	QUATRO PRIMEIROS TERMOS	DÉCIMO TERMO
(a)	$\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$	$\dfrac{n}{n+1}$	$\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}$	$\dfrac{10}{11}$
(b)	$\{2 + (0{,}1)^n\}$	$2 + (0{,}1)^n$	2,1, 2,01, 2,001, 2,0001	2,0000000001
(c)	$\left\{(-1)^{n+1}\dfrac{n^2}{3n-1}\right\}$	$(-1)^{n+1}\dfrac{n^2}{3n-1}$	$\dfrac{1}{2}, -\dfrac{4}{5}, \dfrac{9}{8}, -\dfrac{16}{11}$	$-\dfrac{100}{29}$
(d)	$\{4\}$	4	4, 4, 4, 4	4

Para algumas seqüências, damos o primeiro termo a_1 juntamente com uma regra que permita determinar qualquer termo a_{k+1} a partir do termo precedente a_k, para $k \geq 1$. Isto é o que constitui uma **definição por recorrência**; a seqüência se diz então definida **por recorrência**.

EXEMPLO 2

Achar os quatro primeiros termos e o n^{mo} termo da seqüência definida por

$$a_1 = 3 \text{ e } a_{k+1} = 2a_k \text{ para } k \geq 1$$

SOLUÇÃO

A seqüência é definida por recorrência, já que o primeiro termo é dado, juntamente como uma regra para achar a_{k+1}, conhecido a_k. Assim, os quatro primeiros termos da seqüência são

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = 2a_1 = 2 \cdot 3 = 6$$

$$a_3 = 2a_2 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3 = 12$$

$$a_4 = 2a_3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3 = 24$$

Escrevemos os termos como produtos para visualizar a natureza do termo de ordem n. Prosseguindo, obtemos $a_5 = 2^4 \cdot 3$ e $a_6 = 2^5 \cdot 3$; o que sugere que $a_n = 2^{n-1} \cdot 3$. Podemos usar a indução matemática para provar que a suposição é correta. Utilizando a notação de (11.1), escrevemos a seqüência como

$$3, 2 \cdot 3, 2^2 \cdot 3, 2^3 \cdot 3, \ldots, 2^{n-1} \cdot 3, \ldots$$

Uma seqüência $\{a_n\}$ pode gozar da propriedade de que, quando n cresce, a_n se aproxima de um número real L, isto é, $|a_n - L| \approx 0$ se n é suficientemente grande. A título de ilustração, suponhamos que

$$a_n = 2 + (-\tfrac{1}{2})^n$$

Os primeiros termos da seqüência $\{a_n\}$ são

$$2 - \tfrac{1}{2},\ 2 + \tfrac{1}{4},\ 2 - \tfrac{1}{8},\ 2 + \tfrac{1}{16},\ 2 - \tfrac{1}{32},\ 2 + \tfrac{1}{64},\ \ldots$$

ou, equivalentemente,

$$1{,}5,\ 2{,}25,\ 1{,}875,\ 2{,}0625,\ 1{,}96875,\ 2{,}015625,\ \ldots$$

Tudo indica que os termos estão cada vez mais próximos de 2 quando n cresce. Note que, para todo inteiro positivo n,

$$|a_n - 2| = |2 + (-\tfrac{1}{2})^n - 2| = |(-\tfrac{1}{2})^n| = (\tfrac{1}{2})^n = \frac{1}{2^n}$$

O número $1/2^n$, e então $|a_n - 2|$, *pode tornar-se arbitrariamente próximo de* 0, *desde que escolhamos n suficientemente grande*. De acordo com a próxima definição, a seqüência *tem por limite* 2, ou *converge para* 2; escrevemos

$$\lim_{n \to \infty} \left[2 + \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right] = 2$$

Este tipo de limite é quase o mesmo que $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$, dado ao Capítulo 2. A única diferença é que se $f(n) = a_n$, o domínio de f é o conjunto de inteiros positivos, e não um intervalo infinito de números reais. Tal como na Definição (2.16), mas usando a_n em lugar de $f(x)$, enunciamos a seguinte definição.

Definição (11.3)

Uma seqüência $\{a_n\}$ **tem por limite** L, ou **converge para** L — o que se denota por

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L \text{ ou } a_n \to L \text{ quando } n \to \infty$$

se, para todo $\in > 0$, existe um número positivo N tal que

$$|a_n - L| < \in \text{ sempre que } n > N$$

Se tal número L não existe, a seqüência **não tem limite**, ou **diverge**.

Pode-se dar, para o limite de uma seqüência, uma interpretação gráfica semelhante à do limite de uma função na Figura 2.32. A única diferença é que a coordenada-x de cada ponto do gráfico é um inteiro positivo. A Figura 11.2 é o gráfico de uma seqüência $\{a_n\}$ para o caso específico em que $\lim_{n \to \infty} a_n = L$. Note que, para qualquer $\in > 0$, os pontos (n, a_n) estão entre as retas $y = L \pm \in$, desde que n seja suficientemente grande. Naturalmente, a maneira como a_n se aproxima de L pode variar em relação à ilustrada na figura (ver, por exemplo, Figuras 11.3 e 11.6).

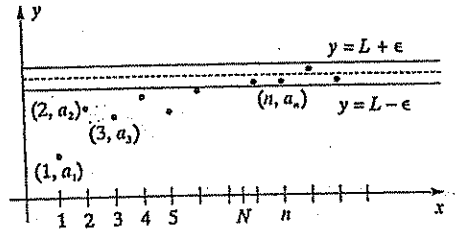


Figura 11.2

Se pudermos fazer a_n tão grande quanto quisermos, escolhendo n suficientemente grande, então a seqüência $\{a_n\}$ diverge, mas ainda assim utilizamos a notação de limite e escrevemos $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Segue-se uma especificação mais precisa deste fato.

Definição (11.4)

A notação

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

significa que, para todo número real positivo P, existe um número N tal que $a_n > P$ sempre que $n > N$.

Tal como no caso das funções na Seção 2.4, $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ *não* significa que o limite exista, mas sim que o número a_n cresce sem limite quando n aumenta. Analogamente, $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ significa que a_n decresce sem limite quando n aumenta.

O próximo teorema é importante porque nos permite usar resultados do Capítulo 2 para investigar a convergência ou divergência de seqüências. A prova decorre das Definições (11.3) e (2.16).

Teorema (11.5)

Seja $\{a_n\}$ uma seqüência, $f(n) = a_n$, e suponhamos que $f(x)$ exista para todo número real $x \geq 1$.

(i) se $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, então $\lim_{n\to\infty} f(n) = L$

(ii) se $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (ou $-\infty$), então $\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty$ (ou $-\infty$)

O exemplo seguinte ilustra o uso do Teorema (11.5).

EXEMPLO 3

Se $a_n = 1 + \frac{1}{n}$, determine se $\{a_n\}$ converge ou diverge.

SOLUÇÃO

Façamos $f(n) = 1 + \frac{1}{n}$ e consideremos

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} \text{ para todo número real } x \to 1.$$

Do que vimos na Seção 2.4, obtemos

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} 1 + \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 1 + 0 = 1$$

Logo, pelo Teorema (11.5),

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$$

Assim, a seqüência $\{a_n\}$ converge para 1.

A Figura 11.3 ilustra a diferença entre

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$$

Note que, para $1 + (1/x)$, a função f é contínua se $x \geq 1$, e o gráfico tem uma assíntota horizontal $y = 1$. Para $1 + (1/n)$ consideramos apenas os pontos cujas coordenadas-x são inteiros positivos.

(i) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$ (ii) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$

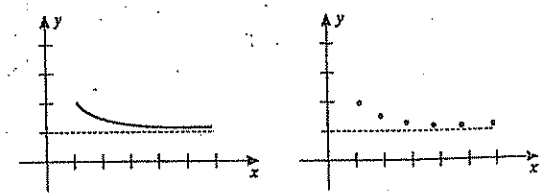


Figura 11.3

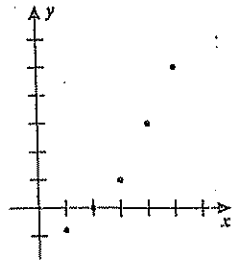


Figura 11.4

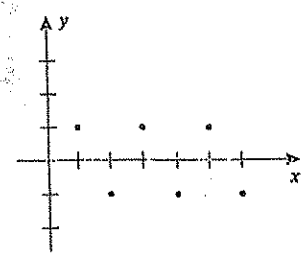


Figura 11.5

EXEMPLO 4

Determine se a seqüência converge ou diverge:

(a) $\left\{\frac{1}{4}n^2 - 1\right\}$ (b) $\{(-1)^{n-1}\}$

SOLUÇÃO

(a) Fazendo $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1$, $f(x)$ existe para todo $x \geq 1$ e

$$\lim_{x \to \infty} \left(\tfrac{1}{4}x^2 - 1\right) = \infty$$

Logo, pelo Teorema (11.5),

$$\lim_{n \to \infty} \left(\tfrac{1}{4}n^2 - 1\right) = \infty$$

Como o limite não existe, a seqüência diverge. O gráfico da Figura 11.4 ilustra a maneira como a seqüência diverge.

(b) Fazendo $n = 1, 2, 3, \ldots$, vemos que os termos de $(-1)^{n-1}$ oscilam entre 1 e -1, como segue

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$$

conforme ilustrado na Figura 11.5. Assim, $\lim_{n \to \infty} (-1)^{n-1}$ não existe, e a seqüência diverge.

O próximo exemplo mostra como se pode usar a regra de l'Hôpital (10.2) para achar limites de certas seqüências.

EXEMPLO 5

Determine se a seqüência $\left\{\frac{5n}{e^{2n}}\right\}$ converge ou diverge.

SOLUÇÃO

Seja $f(x) = 5x/e^{2x}$ para todo número real x. Como f toma a forma indeterminada ∞/∞, quando $x \to \infty$, podemos aplicar a regra de l'Hôpital, obtendo

$$\lim_{x \to \infty} \frac{5x}{e^{2x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{5}{2e^{2x}} = 0$$

Logo, pelo Teorema (11.5), $\lim_{n \to \infty} (5n/e^{2n}) = 0$. Assim, a seqüência converge para 0.

A demonstração do próximo teorema ilustra a aplicação da Definição (11.3).

Teorema (11.6)

(i) $\lim_{n \to \infty} r^n = 0$ se $|r| < 1$

(ii) $\lim_{n \to \infty} |r^n| = \infty$ se $|r| > 1$

DEMONSTRAÇÃO

Se $r = 0$, é trivial que o limite é 0. Suponhamos $0 < |r| < 1$. Para provar (i) por meio da Definição (11.3), devemos mostrar que, para todo $\in > 0$, existe um número positivo N tal que

$$\text{se } n > N, \text{ então } |r^n - 0| < \in$$

A desigualdade $|r^n - 0| <$ é equivalente a cada uma das desigualdades seguintes:

$$|r|^n < \varepsilon, \ln |r|^n < \ln \varepsilon, n \ln |r| < \ln \varepsilon, n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |r|}$$

Inverte-se o sentido da desigualdade final porque $\ln |r|$ é negativo se $0 < |r| < 1$. A última desigualdade nos dá uma chave para a escolha de N. Consideremos separadamente os dois casos $\in <$ 1 e $\in \geq 1$. Se $\in < 1$, então $\ln \in < 0$ e fazemos $N = \ln \in / \ln |r| > 0$. Nesta hipótese, se $n > N$, então a última desigualdade da lista é verdadeira e, assim, também o é a primeira, que é o que queríamos provar. Se $\in \geq 1$, então $\ln \in \geq 0$ e daí $\ln \in / \ln |r| \leq 0$. Neste caso, se N é um número positivo *arbitrário*, então, sempre que $n > N$ a última desigualdade é novamente verdadeira.

Para provar (ii), seja $|r| > 1$ e consideremos um número real positivo arbitrário P. As desigualdades seguintes são equivalentes:

$$|r|^n > P, \ln |r|^n > \ln P, n \ln |r| > \ln P, n > \frac{\ln P}{\ln |r|}$$

Escolhendo $N = \ln P / \ln |r|$, então, sempre que $n > N$, a última desigualdade é verdadeira e, assim, também o é a primeira; isto é, $|r|^n > P$. Pela Definição (11.4), isto significa que $\lim_{n \to \infty} |r|^n = \infty$.

EXEMPLO 6

Relacione os quatro primeiros termos da seqüência e determine se a seqüência converge ou diverge.

(a) $\left\{\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right\}$ (b) $\{(1{,}01)^n\}$

SOLUÇÃO

(a) Os quatro primeiros termos de $\left\{(-\frac{2}{3})^n\right\}$ são

$$-\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{27}, \frac{16}{81}$$

Fazendo $r = -\frac{2}{3}$ então, pelo Teorema (11.6)(i) com $|r| = \frac{2}{3} < 1$,

$$\lim_{n\to\infty} (-\tfrac{2}{3})^n = 0$$

Logo, a seqüência converge para 0.

(b) Os quatro primeiros termos de $\{(1{,}01)^n\}$ são

$$1{,}01,\ 1{,}0201,\ 1{,}030301,\ 1{,}04060401$$

Fazendo $r = 1{,}01$, então, pelo Teorema (11.6)(ii),

$$\lim_{n\to\infty} (1{,}01)^n = \infty$$

Como o limite não existe, a seqüência diverge.

Podemos estabelecer para seqüências teoremas análogos aos enunciados no Capítulo 2 para somas, diferenças, produtos e quocientes de funções. Por exemplo, se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ são seqüências convergentes, então

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n,$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)$$

etc.

Se $a_n = c$ para todo n, a seqüência $\{a_n\}$ é $c, c, \ldots, c, \ldots$ e

$$\lim_{n\to\infty} c = c$$

Da mesma forma, se c é um número real e k um número racional positivo, então, como no Teorema (2.18),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c}{n^k} = 0$$

EXEMPLO 7

Determine o limite da seqüência $\left\{\dfrac{2n^2}{5n^2 - 3}\right\}$.

SOLUÇÃO

Queremos achar $\lim_{n\to\infty} a_n$, com $a_n = 2n^2/(5n^2 - 3)$. Dividindo numerador e denominador de a_n por n^2 e aplicando teoremas sobre limites, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{5n^2 - 3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{5 - (3/n^2)} = \frac{\lim_{n\to\infty} 2}{\lim_{n\to\infty} [5 - (3/n^2)]}$$

$$= \frac{2}{\lim_{n\to\infty} 5 - \lim_{n\to\infty} (3/n^2)} = \frac{2}{5 - 0} = \frac{2}{5}$$

Logo a seqüência tem como limite $\frac{2}{5}$, o que se pode provar também por meio da aplicação da regra de l'Hôpital a $2x^2/(5x^2 - 3)$.

O próximo teorema, análogo ao Teorema (2.15), afirma que se os termos de uma seqüência estão sempre compreendidos entre os termos correspondentes de duas seqüências que têm o mesmo limite L, então a seqüência dada também tem por limite L.

"Teorema do sanduíche" para seqüências (11.7)

Se $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ são seqüências e $a_n \le b_n \le c_n$ para todo n, e se

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L = \lim_{n\to\infty} c_n$$

então

$$\lim_{n\to\infty} b_n = L$$

EXEMPLO 8

Determine o limite da seqüência $\left\{\dfrac{\cos^2 n}{3^n}\right\}$.

SOLUÇÃO

Como $0 < \cos^2 n < 1$ para todo inteiro positivo n,

$$0 < \frac{\cos^2 n}{3^n} < \frac{1}{3^n}$$

Aplicando o Teorema (11.6) com $r = \frac{1}{3}$, temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$$

Além disso, $\lim_{n\to\infty} 0 = 0$. Decorre do Teorema (11.7), com $a_n = 0$, $b_n = (\cos^2 n)/3^n$ e $c_n = (\frac{1}{3})^n$, que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos^2 n}{3^n} = 0$$

Logo, o limite da seqüência é 0.

Pode-se demonstrar o teorema seguinte aplicando a Definição (11.3).

Teorema (11.8) Seja $\{a_n\}$ uma seqüência. Se $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

EXEMPLO 9

Suponha que o n^{mo} termo de uma seqüência seja

$$a_n = (-1)^{n+1}\,\frac{1}{n}$$

Prove que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

SOLUÇÃO

Os termos da seqüência são alternadamente positivos e negativos. Por exemplo, os sete primeiros termos são

$$1, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, -\tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{7}$$

Como $$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

decorre do Teorema (11.8) que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Uma seqüência é **monotônica** se os termos sucessivos são não-decrescentes:

$$a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n \le \ldots$$

ou se são não-crescentes:

$$a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_n \ge \ldots$$

Uma seqüência é **limitada**, ou **cotada**, se existe um número real positivo M tal que $|a_k| \le M$ para todo k. Como ilustração, a seqüência

$$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$$

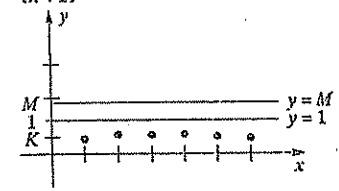


Figura 11.6

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$$

é monotônica (pois os termos são crescentes) e limitada (pois $k/(k+1) < 1$ para todo k). A Figura 11.6 ilustra o gráfico da seqüência. Note que qualquer número $M \ge 1$ é uma cota para a seqüência; entretanto, se $K < 1$, então K não é uma cota, pois $K < k/(k+1)$ quando k é suficientemente grande.

O próximo teorema é fundamental para desenvolvimentos posteriores.

Teorema (11.9) Uma seqüência monotônica, cotada, tem limite.

Para provar o Teorema (11.9), é necessário utilizar uma propriedade importante dos números reais. Enunciemos primeiro algumas definições. Se S é um conjunto não-vazio de reais, então um número real u é **cota superior** de S se $x \le u$ para todo x em S. Um número v é **extremo superior** de S se v é cota superior e nenhum outro número menor do que v é cota superior de S. Assim, *o extremo superior é o menor número real não inferior a todo número de S*. Para ilustrar, se S é o intervalo aberto (a, b), então qualquer número maior do que b é cota superior de S; todavia, o extremo superior (isto é, a menor cota superior) de S é único e é igual a b.

A afirmação seguinte constitui um axioma para o sistema de números reais.

Propriedade de completude (11.10) Se um conjunto não-vazio S de números reais tem uma cota superior, então S tem um extremo superior.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA (11.9)

Seja $\{a_n\}$ uma seqüência monotônica limitada com termos não-decrescentes. Assim,

$$a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n \le \ldots$$

e existe um número M tal que $a_k \le M$ para todo inteiro positivo k. Como M é uma cota superior do conjunto S de todos os números da seqüência, decorre da propriedade de completude que S tem um extremo superior L tal que $L \le M$ (ver Figura 11.7).

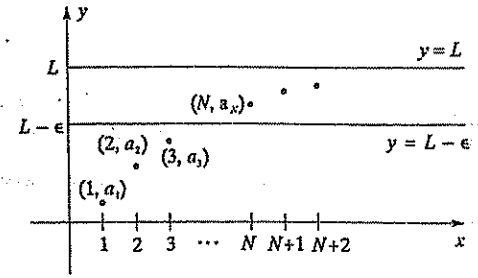


Figura 11.7

Se $\in > 0$, então $L - \in$ não é cota superior de S e, então, ao menos um termo de $\{a_n\}$ é maior do que $L - \in$, isto é,

$$L - \in < a_N \text{ para algum inteiro positivo } N,$$

de acordo com a Figura 11.7. Como os termos de $\{a_n\}$ são não-decrescentes,

$$a_N \leq a_{N+1} \leq a_{N+2} \leq \cdots$$

e, assim,

$$L - \in < a_n \text{ para todo } n \geq N$$

Decorre que, se $n > N$, então

$$0 \leq L - a_n < \in \quad \text{ou} \quad |L - a_n| < \in$$

Pela Definição (11.3), isto significa que

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L \leq M$$

isto é $\{a_n\}$ tem um limite.

Obtém-se a demonstração para uma seqüência $\{a_n\}$ de termos não-crescentes de maneira análoga ou então considerando a seqüência $\{-a_n\}$.

Como ilustração do Teorema (11.9), a seqüência monotônica $\{n/(n+1)\}$ mostrada na Figura 11.6 tem extremo superior (e limite) 1.

*A notação S → I → S é uma abreviação de Suscetível → Infectada → Suscetível e significa que uma pessoa que se cura não fica imune à doença, podendo contraí-la novamente. Um exemplo de tais doenças é a blenorragia.

Há muitas aplicações das seqüências. Em particular, as seqüências podem ser aplicadas à investigação do comportamento no tempo de uma epidemia tipo S → I → S*. Suponha que os médicos liberem boletins diários indicando o número de pessoas que foram infectadas com a doença e das que se curaram.

Indicaremos por 1, 2, ..., n, ... os dias dos boletins e por N a população total. Seja, além disso,

I_n = número de pessoas com a doença no dia n

F_n = número de novas pessoas infectadas no dia n

C_n = número de pessoas curadas no dia n

Segue-se que, para todo $n \geq 1$,

$$I_{n+1} = I_n + F_{n+1} - C_{n+1}$$

Suponhamos que as autoridades sanitárias constatem que o número de novos casos em determinado dia seja diretamente proporcional ao produto do número de doentes pelo número de não-infectados no dia anterior. (Isto é o que se chama *lei da ação de massa*, e é típica de uma população de estudantes em um câmpus universitário.) Suponhamos, além disso, que o número de curados em cada dia seja diretamente proporcional ao número de doentes no dia anterior. Assim

$$F_{n+1} = aI_n(N - I_n) \quad \text{e} \quad C_{n+1} = bI_n$$

onde a e b são constantes positivas que podem ser obtidas aproximadamente com base em dados anteriores. Substituindo na fórmula precedente em relação a I_{n+1} temos

$$I_{n+1} = I_n + aI_n(N - I_n) - bI_n$$

No estágio inicial de uma epidemia, I_n é muito pequeno comparado com N, e do ponto de vista da saúde pública, é melhor *superestimar* o número de doentes, do que subestimá-lo ficando despreparados para a disseminação da doença. Com isto em mente, abandonamos o termo $-aI_n^2$ da fórmula de I_{n+1} e investigamos a dinâmica inicial da epidemia examinando a equação

$$I_{n+1} = I_n + aNI_n - bI_n = (1 + aN - b)I_n$$

Fazendo $r = 1 + aN - b$, então $I_{n+1} = rI_n$ e, portanto,

$$I_2 = rI_1, I_3 = rI_2 = r^2I_1, I_4 = rI_3 = r^3I_1, \ldots, I_n = r^{n-1}I_1, \ldots$$

Isto nos dá a seguinte seqüência de números de pessoas infectadas:

$$I_1, rI_1, r^2I_1, \ldots, r^{n-1}I_1, \ldots$$

O número $r = 1 + aN - b$ tem importância crítica. Se $r > 1$, então, pelo Teorema (11.6) (ii), $\lim_{n \to \infty} I_n = \infty$ e a epidemia está progredindo. Neste caso, quando n é grande, I_n já não é pequeno em comparação com N, o que invalida a fórmula de I_{n+1}. Se $r < 1$, então, pelo

Teorema (11.6)(i), $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ e as autoridades sanitárias já não precisam preocupar-se. O caso $r = 1$ resulta na seqüência constante $I_1, I_1, \ldots, I_1, \ldots$.

EXERCÍCIOS 11.1

Exercs. 1-16: A expressão é o n^{mo} termo a_n de uma seqüência $\{a_n\}$. Ache os quatro primeiros termos e $\lim_{n\to\infty} a_n$, se existir.

1 $\dfrac{n}{3n+2}$

2 $\dfrac{6n-5}{5n+1}$

3 $\dfrac{7-4n^2}{3+2n^2}$

4 $\dfrac{4}{8-7n}$

5 -5

6 $\sqrt{2}$

7 $\dfrac{(2n-1)(3n+1)}{n^3+1}$

8 $8n+1$

9 $\dfrac{2}{\sqrt{n^2+9}}$

10 $\dfrac{100n}{n^{3/2}+4}$

11 $(-1)^{n+1}\dfrac{3n}{n^2+4n+5}$

12 $(-1)^{n+1}\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$

13 $1+(0{,}1)^n$

14 $1-\dfrac{1}{2^n}$

15 $1+(-1)^{n+1}$

16 $\dfrac{n+1}{\sqrt{n}}$

Exercs. 17-42: Determine se a seqüência converge ou diverge; se convergir, ache o limite.

17 $\left\{6\left(-\frac{5}{6}\right)^n\right\}$

18 $\left\{8-\frac{7}{8}^n\right\}$

19 $\{\operatorname{arctg} n\}$

20 $\left\{\dfrac{\tan^{-1} n}{n}\right\}$

21 $\{1.000 - n\}$

22 $\left\{\dfrac{(1{,}0001)^n}{1.000}\right\}$

23 $\left\{(-1)^n\dfrac{\ln n}{n}\right\}$

24 $\left\{\dfrac{n^2}{\ln(n+1)}\right\}$

25 $\left\{\dfrac{4n^4+1}{2n^2-1}\right\}$

26 $\left\{\dfrac{\cos n}{n}\right\}$

27 $\left\{\dfrac{e^n}{n^4}\right\}$

28 $\{e^{-n}\ln n\}$

29 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$

30 $\{(-1)^n n^3 3^{-n}\}$

31 $\{2^{-n}\operatorname{sen} n\}$

32 $\left\{\dfrac{4n^3+5n+1}{2n^3-n^2+5}\right\}$

33 $\left\{\dfrac{n^2}{2n-1}-\dfrac{n^2}{2n+1}\right\}$

34 $\left\{n\operatorname{sen}\dfrac{1}{n}\right\}$

35 $\{\cos n\pi\}$

36 $\left\{4+\operatorname{sen}\frac{1}{2}n\pi\right\}$

37 $\{n^{1/n}\}$

38 $\left\{\dfrac{n^2}{2^n}\right\}$

39 $\left\{\dfrac{n^{-10}}{\sec n}\right\}$

40 $\left\{(-1)^n\dfrac{n^2}{1+n^2}\right\}$

41 $\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\}$

42 $\{\sqrt{n^2+n}-n\}$

43 Uma população estável de 35.000 pássaros vive em três ilhas. Cada ano, 10% da população da ilha A migram para a ilha B, 20% da população da ilha B migram para a ilha C e 5% da população da ilha C migram para a ilha A. Denotemos por A_n, B_n e C_n, respectivamente, os números de pássaros nas ilhas A, B e C, no ano n antes da ocorrência da migração.

(*a*) Mostre que

$$A_{n+1} = 0{,}9A_n + 0{,}05C_n$$
$$B_{n+1} = 0{,}1A_n + 0{,}80B_n$$

e

$$C_{n+1} = 0{,}95C_n + 0{,}20B_n$$

(*b*) Supondo que $\lim_{n\to\infty} A_n$, $\lim_{n\to\infty} B_n$, e $\lim_{n\to\infty} C_n$ existam, dê uma aproximação do número de pássaros em cada ilha após muitos anos.

44 Uma população de linces é classificada por idade como "gatinhos" (menos de um ano) e adultos (pelo menos um ano). Todas as fêmeas adultas, inclusive as nascidas no ano anterior, têm uma cria a cada mês de junho, com uma média de três "gatinhos" por cria. A taxa de sobrevivência dos "gatinhos" é de 50%, enquanto a dos adultos é de $66\frac{2}{3}$% por ano. Seja K_n o número de "gatinhos" recém-nascidos em junho do n^{mo} ano, seja A_n o número de adultos, e suponha que a relação de machos para fêmeas seja sempre 1.

(*a*) Mostre que $K_{n+1} = \frac{3}{2}A_{n+1}$ e

$$A_{n+1} = \tfrac{2}{3}A_n + \tfrac{1}{2}K_n$$

(*b*) Conclua que $A_{n+1} = \frac{17}{12}A_n$ e $K_{n+1} = \frac{17}{12}K_n$, e que $A_n = \left(\frac{17}{12}\right)^{n-1}A_1$ e $K_n = \left(\frac{17}{12}\right)^{n-1}K_1$. Que se pode concluir sobre a população?

C 45 Os termos da seqüência definida pela recorrência $a_1 = 5$ e $a_{k+1} = \sqrt{a_k}$ podem ser gerados introduzindo 5 e pressionando repetidas vezes a tecla $\boxed{\sqrt{x}}$.

(*a*) Descreva o que acontece com os termos da seqüência quando k aumenta.

(*b*) Mostre que $a_n = 5^{1/2^n}$ e ache $\lim_{n\to\infty} a_n$.

C 46 Se uma seqüência é gerada introduzindo-se um número e pressionando repetidamente a tecla $\boxed{1/x}$, em que condições a seqüência tem um limite?

C 47 Os termos da seqüência definida pela recorrência $a_1 = 1$ e $a_{k+1} = \cos a_k$ podem ser gerados introduzindo-se 1 (no modo radiano) e pressionando $\boxed{\cos}$ repetidamente.

(*a*) Descreva o que ocorre com os termos da seqüência quando k aumenta.

(*b*) Supondo que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, prove que $\boxed{\cos}\, L = L$.

(*Sugestão*: $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = L$.)

48 Uma seqüência $\{x_n\}$ é definida pela recorrência $x_{k+1} = x_k - \operatorname{tg} x_k$.

(*a*) Se $x_1 = 3$, obtenha uma aproximação dos cinco primeiros termos da seqüência. Prediga $\lim_{n\to\infty} x_n$.

(*b*) Se $x_1 = 6$, obtenha uma aproximação dos cinco primeiros termos da seqüência. Prediga $\lim_{n\to\infty} x_n$.

(*c*) Supondo que $\lim_{n\to\infty} x_n = L$, prove que $L = \pi n$ para algum inteiro n.

49 Podem-se obter aproximações de $\sqrt{N}$ a partir da recorrência

$$x_1 = \frac{N}{2}, \quad x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{N}{x_k}\right)$$

(*a*) Aproxime x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 se $N = 10$.

(*b*) Supondo que $\lim_{n\to\infty} x_n = L$, prove que $L = \sqrt{N}$.

50 A famosa *seqüência de Fibonacci* é definida pela recorrência $a_{k+1} = a_k + a_{k-1}$ com $a_1 = a_2 = 1$.

(*a*) Ache os dez primeiros termos da seqüência.

(*b*) Os termos da seqüência $r_k = a_{k+1}/a_k$ dão uma aproximação de τ, a *razão áurea*. Dê uma aproximação dos cinco primeiros termos desta seqüência.

(*c*) Supondo que $\lim_{n\to\infty} r_n = \tau$, prove que

$$\tau = \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5})$$

Exercs. 51-52: Se f é diferenciável, então a seqüência $\{a_n\}$ definida pela recorrência $a_{k+1} = f(a_k)$, para $k \geq 1$, convergirá qualquer que seja a_1, se a derivada f' for contínua e $|f'(x)| \leq B < 1$ para alguma constante positiva B.

(*a*) Para a função f dada, verifique que a seqüência $\{a_n\}$ converge qualquer que seja a_1, determinando um valor conveniente de B.

(*b*) Dê uma aproximação, com duas decimais, de $\lim_{n\to\infty} a_n$, se $a_1 = 1$ e também se $a_1 = -100$.

51 $f(a_k) = \frac{1}{4}\operatorname{sen} a_k \cos a_k + 1$

52 $f(a_k) = \dfrac{a_k^2}{a_k^2+1} + 2$

11.2 SÉRIES CONVERGENTES OU DIVERGENTES

Podemos utilizar seqüências para definir expressões da forma

$$0{,}6 + 0{,}06 + 0{,}006 + 0{,}0006 + 0{,}00006 \ldots$$

onde os três pontos indicam que a soma se prolonga indefinidamente. Na definição (11.11), tal expressão é chamada uma *série infinita*. Como só podemos somar algebricamente um número finito de parcelas, torna-se necessário definirmos o que significa esta "soma infinita". Como veremos, a chave para a definição consiste em considerarmos a *seqüência de somas parciais* $\{S_n\}$, onde S_k *é a soma dos k primeiros números da série infinita.* Na ilustração precedente,

$$S_1 = 0{,}6$$

$$S_2 = 0{,}6 + 0{,}06 = 0{,}66$$

$$S_3 = 0{,}6 + 0{,}06 + 0{,}006 = 0{,}666$$

$$S_4 = 0{,}6 + 0{,}06 + 0{,}006 + 0{,}0006 = 0{,}6666$$

etc. Assim, a seqüência de somas parciais $\{S_n\}$ pode escrever-se

$$0{,}6,\ 0{,}66,\ 0{,}666,\ 0{,}6666,\ 0{,}66666, \ldots$$

Decorre do Teorema (11.15) que

$$S_n \to \tfrac{2}{3} \quad \text{quando } n \to \infty$$

Intuitivamente, quanto mais parcelas somarmos na série, mais próximos estaremos de $\frac{2}{3}$. Escrevemos, pois,

$$\tfrac{2}{3} = 0{,}6 + 0{,}06 + 0{,}006 + 0{,}0006 + \ldots$$

e dizemos que $\frac{2}{3}$ é a *soma* da série infinita.

Com este caso especial em mente, introduzamos a terminologia que será usada em todo o resto deste capítulo. Na definição que segue, supomos que $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ sejam os termos de alguma seqüência.

Definição (11.11)

Uma **série infinita** (ou simplesmente uma série) é uma expressão da forma

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

ou, em notação de somatório,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \text{ ou } \sum a_n$$

Cada número a_k é um **termo** da série, e a_n é o n.^{mo} **termo**.

Ocasionalmente surge confusão entre os conceitos de série e seqüência. Tenha em mente que uma série é uma expressão que representa uma *soma infinita* de números. Uma seqüência é uma coleção de números que estão em correspondência biunívoca com os inteiros positivos. A seqüência de somas parciais da próxima definição é um tipo especial de seqüência que obtemos a partir dos termos de uma série.

Tal como no caso especial introduzido no começo desta seção, definimos a *seqüência de somas parciais* de uma série como segue.

Definição (11.12)

(i) A k.^{ma} **soma parcial** S_k da série $\sum a_n$ é

$$S_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$$

(ii) A **seqüência de somas parciais** da série $\sum a_n$ é

$$S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$$

Pela definição (11.12)(i)

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

Para calcular S_5, S_6, S_7 etc., continuamos somando mais termos da série. Assim, $S_{1.000}$ é a soma dos mil primeiros termos da série $\sum a_n$. Se a seqüência $\{S_n\}$ tem um limite S, dizemos que S é a *soma* da série $\sum a_n$, como na próxima definição.

Definição (11.13)

Uma série $\sum a_n$ é convergente (ou converge) se a sua seqüência de somas parciais $\{S_n\}$ converge – isto é, se

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S \text{ para algum número real } S$$

O limite S é a soma da série $\sum a_n$ e escrevemos

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

A série $\sum a_n$ é divergente (ou diverge) se $\{S_n\}$ diverge. Uma série divergente não tem soma.

Na maioria dos casos é muito difícil achar uma fórmula para S_n. Todavia, como veremos em seções posteriores, é possível estabelecer a convergência ou divergência de uma série empregando outros métodos. No restante desta seção consideraremos várias séries importantes para as quais podemos achar uma fórmula para S_n.

EXEMPLO 1

Dada a série

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots,$$

(a) ache S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 e S_6

(b) ache S_n

(c) mostre que a série converge e ache sua soma

SOLUÇÃO

(a) Pela Definição (11.12), as seis primeiras somas parciais são:

$$S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}$$

$$S_3 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{3}{4}$$

$$S_4 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{4}{5}$$

$$S_5 = S_4 + a_5 = \frac{4}{5} + \frac{1}{5 \cdot 6} = \frac{5}{6}$$

$$S_6 = S_5 + a_6 = \frac{5}{6} + \frac{1}{6 \cdot 7} = \frac{6}{7}$$

(b) Para achar S_n, escreveremos os termos da série em forma diferente. Por meio de frações parciais, podemos mostrar que

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Conseqüentemente, a n^{ma} soma parcial da série pode ser escrita

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

Reagrupando, vemos que todos os termos, exceto o primeiro e o último, cancelam-se, e então

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

(c) Utilizando a fórmula de S_n estabelecida na parte (b), obtemos

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Assim, a série converge e tem por soma 1. Tal como na Definição (11.13), podemos escrever

$$1 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

A série $\sum 1/[n(n+1)]$ do Exemplo 1 é chamada *série telescópica*, porque, escrevendo-se S_n como em (b) da solução, os termos se reduzem *telescopicamente* a $1 - [1/(n+1)]$.

EXEMPLO 2

Dada a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} = 1 + (-1) + 1 + (-1) + \ldots + (-1)^{n-1} + \ldots$$

(a) ache S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 e S_6

(b) ache S_n

(c) mostre que a série diverge

SOLUÇÃO

(a) Pela Definição (11.12),

$$S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 1, S_4 = 0, S_5 = 1 \text{ e } S_6 = 0$$

(b) Podemos escrever S_n como segue:

$$S_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 0 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

(c) Como a seqüência de somas parciais $\{S_n\}$ oscila entre 1 e 0, segue-se que $\lim_{n\to\infty} S_n$ não existe. Logo, a série diverge.

EXEMPLO 3

Prove que a série abaixo é divergente:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

SOLUÇÃO

Agrupemos os termos da série como segue:

$$1 + \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}) + (\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}) + (\tfrac{1}{9} + \ldots + \tfrac{1}{16}) + (\tfrac{1}{17} + \ldots + \tfrac{1}{32}) + \ldots$$

Note que cada grupo contém o dobro do número de termos do grupo precedente. Além disso, como aumentando o denominador *diminuímos* o valor de uma fração, temos:

$$\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} > \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2}$$

$$\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} > \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{2}$$

$$\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{10} + \ldots + \tfrac{1}{16} > \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16} + \ldots + \tfrac{1}{16} = \tfrac{1}{2}$$

$$\tfrac{1}{17} + \tfrac{1}{18} + \ldots + \tfrac{1}{32} > \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{32} + \ldots + \tfrac{1}{32} = \tfrac{1}{2}$$

Como a soma dos termos dentro de cada conjunto de parênteses é maior do que $\frac{1}{2}$, obtemos as seguintes desigualdades:

$$S_4 > 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} > 3(\tfrac{1}{2})$$
$$S_8 > 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} > 4(\tfrac{1}{2})$$
$$S_{16} > 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} > 5(\tfrac{1}{2})$$
$$S_{32} > 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} > 6(\tfrac{1}{2})$$

Pode-se mostrar, por indução matemática, que,

$$S_{2^k} > (k + 1)(\tfrac{1}{2}) \text{ para todo inteiro positivo } k$$

Segue-se que podemos fazer S_n tão grande quanto quisermos, bastando usar n suficientemente grande; isto é, $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$. Como $\{S_n\}$ diverge, a série dada diverge.

A série do Exemplo 3 será útil posteriormente e tem um nome especial:

Definição (11.14) **A série harmônica é a série divergente**

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

Na próxima seção daremos outra demonstração da divergência da série harmônica.

Certos tipos de série ocorrem com freqüência nas soluções de problemas aplicados. Uma das mais importantes é a **série geométrica**

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots$$

onde a e r são números reais, com $a \neq 0$.

Teorema (11.15) Seja $a \neq 0$. A série geométrica

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots$$

(i) converge e tem por soma $S = \dfrac{a}{1-r}$ se $|r| < 1$.

(ii) diverge se $|r| \geq 1$.

DEMONSTRAÇÃO

Se $r = 1$, então $S_n = a + a + \ldots + a = na$, e a série diverge, pois $\lim_{n\to\infty} S_n$ não existe.

Se $r = -1$, então $S_k = a$ se k é ímpar, e $S_k = 0$ se k é par. Como a seqüência de somas parciais oscila entre a e 0, a série diverge.

Se $r \neq 1$, então

$$S_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}$$

e $$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^n$$

Subtraindo os membros correspondentes destas equações, obtemos

$$(1-r)S_n = a - ar^n$$

Dividindo ambos os membros por $1-r$,

$$S_n = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{a}{1-r} - \lim_{n\to\infty}\frac{ar^n}{1-r}\\ &= \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r}\lim_{n\to\infty} r^n\end{aligned}$$

Se $|r| < 1$, então $\lim_{r\to\infty} r^n = 0$, pelo Teorema (11.6)(i), e então

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r} = S$$

Se $|r| > 1$, então $\lim_{n\to\infty} r_n$ não existe, pelo Teorema (11.6)(ii) e daí $\lim_{n\to\infty} S_n$ não existe. Neste caso a série diverge.

EXEMPLO 4

Prove que a série abaixo converge, e ache sua soma:

$$0{,}6 + 0{,}06 + 0{,}006 + \ldots + \frac{6}{10^n} + \ldots$$

SOLUÇÃO

Esta é a série considerada no começo desta seção. É a série geométrica com $a = 0{,}6$ e $r = 0{,}1$. Como $|r| < 1$, concluímos do Teorema (11.15)(i) que a série converge e tem por soma

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{0{,}6}{1-0{,}1} = \frac{0{,}6}{0{,}6} = \frac{2}{3}$$

Assim, $$\frac{2}{3} = 0{,}6 + 0{,}06 + 0{,}006 + \ldots + \frac{6}{10^n} + \ldots$$

Isto justifica a notação decimal periódica $\frac{2}{3} = 0.66666\ldots$

EXEMPLO 5

Prove que a seguinte série converge e ache sua soma:

$$2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \ldots + \frac{2}{3^{n-1}} + \ldots$$

SOLUÇÃO

A série converge, pois se trata de uma série geométrica com $r = \frac{1}{3} < 1$. Pelo Teorema (11.15)(i), a soma é

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{2}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3$$

Teorema (11.16) Se uma série $\sum a_n$ é convergente, então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

DEMONSTRAÇÃO

O n^{mo} termo a_n da série pode ser expresso como

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

Se S é a soma da série $\sum a_n$ então sabemos que $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ e também que $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$. Logo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

O teorema precedente afirma que *se* uma série converge, *então* seu termo de ordem n, a_n, tem por limite 0 quando $n \to \infty$. A recíproca é falsa – isto é, *se* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, *não decorre necessariamente* que a série seja convergente. A série harmônica (11.14) é um exemplo de série divergente para a qual $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Conseqüentemente, para estabelecer a convergência de uma série, não basta provar que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, já que isto pode ser verdadeiro tanto para séries divergentes como convergentes.

O próximo resultado é um corolário do Teorema (11.16) e das observações precedentes.

Teste do n ésimo termo (11.17)

(i) Se $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, então a série $\sum a_n$ é divergente.

(ii) Se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, então é necessária uma investigação adicional para determinar se a série $\sum a_n$ é convergente ou divergente.

A próxima ilustração mostra como aplicar o teste do n ésimo termo.

ILUSTRAÇÃO

SÉRIE	TESTE DO n ésimo TERMO	CONCLUSÃO
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$	$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0$	Diverge, por (11.17) (i)
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$	$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$	Necessário investigação adicional, por (11.17)(ii)
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$	$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$	Necessário investigação adicional, por (11.17)(ii)
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n}$	$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n} = \infty$	Diverge, por (11.17) (i)

Veremos na próxima seção que a segunda série anteriormente citada converge, e que a terceira série diverge.

O próximo teorema afirma que se os termos correspondentes de duas séries são idênticos após certa ordem, então ambas as séries convergem ou ambas divergem.

Teorema (11.18)

Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são séries tais que $a_j = b_j$ para todo $j > k$, onde k é um inteiro positivo, então ambas as séries convergem ou ambas divergem.

DEMONSTRAÇÃO

Por hipótese, podemos escrever

$$\sum a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1} + \ldots + a_n + \ldots$$
$$\sum b_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_k + a_{k+1} + \ldots + a_n + \ldots$$

Denotemos por S_n e T_n as somas parciais de ordem n de $\sum a_n$ e $\sum b_n$ respectivamente. Segue-se que, se $n \geq k$, então

$$S_n - S_k = T_n - T_k,$$

ou

$$S_n = T_n + (S_k - T_k)$$

Conseqüentemente, $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} T_n + (S_k - T_k)$,

e assim, ou ambos os limites existem, ou nenhum dos dois limites existe. Isto nos dá a conclusão desejada. Se ambas as séries convergem, então suas somas diferem por $S_k - T_k$.

O Teorema (11.18) implica que a modificação de um número finito de termos de uma série não afeta sua convergência ou divergência (embora altere a soma de uma série convergente). Em particular, se substituíssemos os primeiros k termos de $\sum a_n$ por 0, a convergência não seria afetada. Segue-se que a série

$$a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_n + \ldots$$

converge ou diverge conforme $\sum a_n$ seja convergente ou divergente, respectivamente. A série $a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots$ se obtém de $\sum a_n$ **suprimindo-se os k primeiros termos.**

Para fins de referência, enunciemos este resultado como segue:

Teorema (11.19)

Para qualquer inteiro positivo k, as séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots \quad \text{e} \quad \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n = a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots$$

são ambas convergentes ou ambas divergentes.

EXEMPLO 6

Mostre que a série abaixo converge:

$$\frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots$$

SOLUÇÃO

A série dada pode ser obtida por supressão dos dois primeiros termos da série telescópica, convergente, do Exemplo 1. Logo, pelo Teorema (11.19), a série dada converge.

A demonstração do próximo teorema decorre diretamente da Definição (11.13).

Teorema (11.20)

Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são séries convergentes com somas A e B, respectivamente, então

(i) $\sum (a_n + b_n)$ converge e tem por soma $A + B$.

(ii) $\sum ca_n$ converge e tem por soma cA, para todo real c.

(iii) $\sum (a_n - b_n)$ converge e tem por soma $A - B$.

É fácil mostrar que, se $\sum a_n$ diverge, então $\sum ca_n$ também diverge, para todo $c \neq 0$.

EXEMPLO 7

Prove que a série seguinte converge, e ache sua soma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{7}{n(n+1)} + \frac{2}{3^{n-1}} \right]$$

SOLUÇÃO

No Exemplo 1 estudamos a série telescópica $\sum 1/[n(n+1)]$ onde mostramos que ela converge e tem por soma 1. Utilizando o Teorema (11.20)(ii) com $c = 7$ $a_n = 1/[n(n+1)]$, vemos que a série $\sum 7/[n(n+1)]$ converge e tem por soma $7(1) = 7$.

A série geométrica $\sum 2/3^{n-1}$ converge e tem por soma 3 (ver Exemplo 5). Logo, pelo Teorema (11.20)(i), a série dada converge e sua soma é $7 + 3 = 10$.

Teorema (11.21)

Se $\sum a_n$ é convergente e $\sum b_n$ é divergente, então $\sum (a_n + b_n)$ é divergente.

DEMONSTRAÇÃO

Tal como no enunciado do teorema, seja $\sum a_n$ convergente e $\sum b_n$ divergente. Daremos uma prova indireta – isto é, suporemos que a conclusão do teorema é *falsa* e chegaremos a uma contradição. *Suponhamos*, pois, que $\sum (a_n + b_n)$ é convergente. Aplicando o Teorema (11.20)(iii), constatamos que a série

$$\sum [(a_n + b_n) - a_n] = \sum b_n$$

é convergente. Isto contradiz o fato de que $\sum b_n$ é divergente e, então, nossa suposição é falsa; isto é $\sum (a_n + b_n)$ é divergente.

EXEMPLO 8

Estabeleça a convergência ou divergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5^n} + \frac{1}{n} \right)$$

SOLUÇÃO

Como $\sum (1/5^n)$ é uma série geométrica convergente e $\sum (1/n)$ é a série harmônica divergente, concluímos que a série dada é divergente, pelo Teorema (11.21).

Podemos aplicar as séries infinitas ao caso da epidemia S → I → S abordado no fim da Seção 11.1. Suponhamos que, em lugar de I_n (o número de doentes no dia n), estejamos interessados no *número total* S_n de indivíduos que estiveram doentes entre o primeiro e o n^{mo} dia. Tal como em nossa discussão prévia, vamos superestimar S_n aproximando o número F_{n+1} de novos casos no dia $n + 1$ por aNI_n. Assim,

$$S_n = I_1 + F_2 + F_3 + F_4 + \ldots + F_n$$

$$= I_1 + aNI_1 + aNI_2 + aNI_3 + \ldots + aNI_{n-1}.$$

Lembrando que $I_n = r^{n-1} I_1$, com $r = 1 + aN - b$, obtemos

$$S_n = I_1 + aNI_1 + aNrI_1 + aNr^2I_1 + \ldots + aNr^{n-2}I_1$$

$$= I_1 + aNI_1(1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-2})$$

Tal como na demonstração do Teorema (11.15), isto pode ser escrito como

$$S_n = I_1 + aNI_1\left(\frac{1}{1-r} - \frac{r^{n-1}}{1-r}\right)$$

Se $r < 1$, então

$$\lim_{n\to\infty} S_n = I_1 + aNI_1\left(\frac{1}{1-r}\right)$$

$$= I_1\left(1 + \frac{aN}{1-r}\right)$$

$$= I_1\left(1 + \frac{aN}{b - aN}\right)$$

$$= I_1\left(\frac{b}{b - aN}\right)$$

Se a e b são aproximados com base em dados anteriores, este resultado possibilita aos agentes sanitários determinarem uma cota superior para o número total de indivíduos que estarão afetados em determinado estágio da epidemia.

EXERCÍCIOS 11.2

Exercs. 1-6: Use o método do Exemplo 1 para achar (a) S_1, S_2 e S_3; (b) S_n; (c) a soma da série, se for convergente.

1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{(2n+5)(2n+3)}$

2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{(5n+2)(5n+7)}$

3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$

4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{9n^2+3n-2}$

5 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n}{n+1}$

6 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ (*Sugestão*: Racionalize o denominador.)

Exercs. 7-16: Use o Teorema (11.15) para determinar se a série geométrica converge ou diverge; se convergir, ache sua soma.

7 $3 + \frac{3}{4} + \ldots + \frac{3}{4^{n-1}} + \ldots$

8 $3 + \frac{3}{(-4)} + \ldots + \frac{3}{(-4)^{n-1}} + \ldots$

9 $1 + \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right) + \ldots + \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{n-1} + \ldots$

10 $1 + \left(\frac{e}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{e}{3}\right)^{n-1} + \ldots$

11 $0{,}37 + 0{,}0037 + \ldots + \frac{37}{(100)^n} + \ldots$

12 $0{,}628 + 0{,}000628 + \ldots + \frac{628}{(1.000)^n} + \ldots$

13 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}3^{n-1}$

14 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-5)^{n-1}4^{-n}$

15 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$

16 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$

Exercs. 17-20: Use o Teorema (11.15) para achar todos os valores de x para os quais a série é convergente e ache a soma da série.

17 $1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^{n+1}x^n + \ldots$

18 $1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n} + \ldots$

19 $\frac{1}{2} + \frac{(x-3)}{4} + \frac{(x-3)^2}{8} + \ldots + \frac{(x-3)^n}{2^{n+1}} + \ldots$

20 $3 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{3} + \ldots + \frac{(x-1)^n}{3^{n-1}} + \ldots$

Exercs. 21-24: A barra indica que os algarismos se repetem indefinidamente. Expresse a decimal periódica como uma série e ache o número racional que ela representa.

21 $0{,}\overline{23}$

22 $5{,}\overline{146}$

23 $3{,}2\overline{394}$

24 $2{,}71\overline{828}$

Exercs. 25-32: Use o Exemplo 1 ou 3 e o Teorema (11.19) ou (11.20) para determinar se a série converge ou diverge.

25 $\frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6} + \ldots + \frac{1}{(n+3)(n+4)} + \ldots$

26 $\frac{1}{10\cdot 11} + \frac{1}{11\cdot 12} + \ldots + \frac{1}{(n+9)(n+10)} + \ldots$

27 $\frac{5}{1\cdot 2} + \frac{5}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{5}{n(n+1)} + \ldots$

28 $-\frac{1}{1\cdot 2} + -\frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + -\frac{1}{n(n+1)} + \ldots$

29 $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n+3} + \ldots$

30 $6^{-1} + 7^{-1} + \ldots + (n+5)^{-1} + \ldots$

31 $3 + \frac{3}{2} + \ldots + \frac{3}{n} + \ldots$

32 $-4 - 2 - \frac{4}{3} - \ldots - \frac{4}{n} - \ldots$

Exercs. 33-40: Use o teste do termo de ordem n para determinar se a série diverge, ou se é necessária uma investigação adicional.

33 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{5n-1}$

34 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(0{,}3)^n}$

35 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3}$

36 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n+1}$

37 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{e}}$

38 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{sen}\frac{1}{n}$

39 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\ln(n+1)}$

40 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{2n}{7n-5}\right)$

Exercs. 41-48: Utilize séries conhecidas, convergentes ou divergentes, juntamente com o Teorema (11.20) ou (11.21) para determinar se a série é convergente ou divergente; no caso de convergência, determine a soma.

41 $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n\right]$

42 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{3}{2}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$

43 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (2^{-n} - 2^{-3n})$

44 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n}\right)$

45 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{8^n} + \frac{1}{n(n+1)}\right]$

46 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{4}{n}\right]$

47 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{n+2}-\frac{5}{n+3}\right)$

48 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)$

Exercs. 49-50: Para a série convergente dada, (a) aproxime S_1, S_2 e S_3 com cinco casas decimais e (b) obtenha uma aproximação da soma da série com três casas decimais.

49 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} n}{4^n}$ 50 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{e^{(n^2)}}$

51 Seja S_n a n^{ma} soma parcial da série harmônica. Se $M = 3$, use o Exemplo 3 para achar um inteiro positivo m tal que $S_m \geq M$, e aproxime S_m com duas casas decimais.

52 Faça o Exercício 51 com $M = 8$.

53 Prove (ou não): Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são ambas divergentes, então $\sum (a_n + b_n)$ diverge.

54 Onde está o erro na seguinte "prova" de que a série divergente $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ tem soma 0? (Ver Exemplo 2.)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$$

$$= [1 + (-1)] + [1 + (-1)] + [1 + (-1)] + \ldots$$

$$= 0 + 0 + 0 + \ldots = 0$$

55 Deixa-se cair uma bola de borracha de uma altura de 10 metros. A bola repica aproximadamente metade da distância após cada queda. Use uma série geométrica para aproximar o percurso total feito pela bola até o repouso completo.

56 A extremidade de um pêndulo oscila do longo de um arco de 24 cm em sua primeira oscilação. Se cada oscilação é aproximadamente 5/6 da oscilação precedente, use uma série geométrica para obter uma aproximação da distância total percorrida pelo pêndulo até entrar em repouso completo.

57 Administra-se a um indivíduo uma dose de Q unidades de certo remédio. A quantidade que permanece na corrente sangüínea ao cabo de t minutos é Qe^{-ct}, com $c > 0$. Suponhamos que a mesma dose seja administrada a intervalos sucessivos de T minutos.

(a) Mostre que a quantidade $A(k)$ do remédio na corrente sangüínea imediatamente após a k^{ma} dose é dada por

$$A(k) = \sum_{n=0}^{k-1} Qe^{-ncT}$$

(b) Ache uma cota superior para a quantidade de remédio na corrente sangüínea após um número arbitrário de doses.

(c) Ache o menor tempo entre doses que garanta que $A(k)$ não excede certo nível M, $M > Q$.

58 Suponha que cada unidade monetária introduzida na economia recircule como segue: 85% da unidade original são gastos, em seguida 85% daqueles 0,85 são gastos e assim por diante. Determine o impacto econômico (o total gasto) se \$ 1.000.000,00 são introduzidos na economia.

59 Em um programa de erradicação de epidemia, liberam-se diariamente na população N moscas macho esterilizadas, e 90% dessas moscas sobrevivem a um determinado dia.

(a) Mostre que o número de moscas esterilizadas na população após n dias é dado por $N + (0{,}9)N \ldots (0{,}9)^{n-1}N$.

(b) Se objetivo do programa, *a longo alcance*, é manter 20.000 moscas esterilizadas na população, quantas moscas devem ser liberadas cada dia?

60 Certo remédio tem meia-vida de cerca de 2 horas na corrente sangüínea. A cada 4 horas administram-se doses de K miligramas, com K a ser ainda determinado.

(a) Mostre que o número de miligramas do remédio na corrente sangüínea após a n^{ma} dose é $K + \frac{1}{4}K + \ldots + (\frac{1}{4})^{n-1}K$, e que esta soma é aproximadamente $\frac{3}{4}K$ para grandes valores de n.

(b) Se mais de 500 miligramas do remédio na corrente sangüínea é considerado um nível perigoso, determine a maior dose possível que possa ser administrada repetidamente por um longo período de tempo.

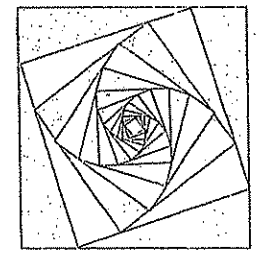
(c) Ref. Exercício 57. Se a dose K é de 50 miligramas, com que freqüência pode ser administrada com segurança?

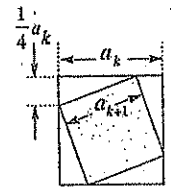
61 A primeira figura exibe uma seqüência de quadrados $S_1, S_2, \ldots, S_k, \ldots$ Denotemos por a_k, A_k e P_k o lado, a área e o perímetro, respectivamente, do quadrado S_k. O quadrado S_{k+1} se constrói a partir de S_k ligando-se quatro pontos de S_k, com cada ponto à distância de $\frac{1}{4}a_k$ de um vértice, conforme mostra a segunda figura.

(a) Ache uma relação entre a_{k+1} e a_k.

(b) Ache a_n, A_n e P_n.

(c) Calcule $\sum_{n=1}^{\infty} P_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$.

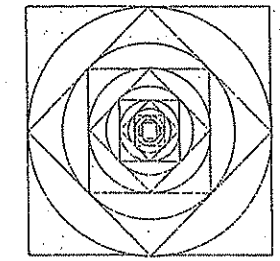




62 A figura exibe vários termos de uma seqüência consistindo em círculos e quadrados alternantes. Cada círculo está inscrito em um quadrado, e cada quadrado (exceto o maior) está inscrito em um círculo. Seja S_n a área do n^{mo} quadrado e C_n a área do n^{mo} círculo.

(a) Estabeleça relações entre S_n e C_n, e entre C_n e S_{n+1}.

(b) Que porção do maior quadrado está sombreada na figura?



11.3 SÉRIES DE TERMOS POSITIVOS

Na seção precedente estabelecemos a convergência ou divergência de várias séries por meio de uma fórmula para n^{ma} soma parcial S_n, determinando então se $\lim_{n\to\infty} S_n$ existe ou não. Infelizmente, a não ser em casos especiais como os da série geométrica ou da série telescópica, quase nunca é possível achar uma fórmula explícita para S_n. Podemos, não obstante, desenvolver testes para a convergência ou divergência de uma série $\sum a_n$ que utilizam o n^{mo} termo a_n. *Tais testes não nos dão a soma S da série*; dizem-nos apenas se a soma *existe*. Isto é suficiente na maioria das aplicações porque, sabendo que a soma existe, podemos aproximar o seu valor com um grau arbitrário de precisão, bastando somar um número suficiente de termos da série.

Nesta seção consideraremos apenas **séries de termos positivos** – isto é, séries $\sum a_n$ tais que $a_n > 0$ para todo n. Embora isto possa parecer demasiadamente restritivo, as séries de termos positivos constituem o fundamento de todo o nosso trabalho com séries. Como veremos mais adiante, a convergência ou divergência de uma série arbitrária freqüentemente pode ser determinada a partir da convergência ou divergência de uma série de termos positivos.

O próximo teorema mostra que, para estabelecer a convergência ou divergência de uma série de termos positivos, basta determinar se a seqüência de somas parciais $\{S_n\}$ é cotada.

Teorema (11.22)

Se $\sum a_n$ é uma série de termos positivos e se existe um número M tal que

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq M$$

para todo n, então a série converge e tem uma soma $S \leq M$. Se não existe nenhum número M nessas condições, então a série diverge.

DEMONSTRAÇÃO

Se $\{S_n\}$ é a seqüência de somas parciais da série de termos positivos $\sum a_n$, então

$$S_1 < S_2 < \ldots < S_n < \ldots$$

e conseqüentemente $\{S_n\}$ é monotônica. Se existe um número M tal que $S_n < M$ para todo n, então $\{S_n\}$ é monotônica cotada. Tal como na prova do Teorema (11.9),

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \leq M$$

para algum S, e, assim, a série converge. Se não existe um tal número M, então $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ e a série diverge.

Podemos utilizar o n^{mo} termo a_n de uma série $\sum a_n$ para definir uma função f tal que $f(n) = a_n$ para todo inteiro positivo n. Em alguns casos, se substituirmos n por x, obteremos uma função definida para todo número *real* $x \geq 1$. Por exemplo,

$$\text{dado } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \text{ seja } f(n) = \frac{1}{n^2}$$

Substituindo n por x, obtemos $f(x) = 1/x^2$, que é a função desejada. Notemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) = f(1) + f(2) + \ldots + f(n) + \ldots$$

O próximo resultado mostra que se uma função f obtida dessa maneira satisfaz certas condições, então podemos utilizar a integral imprópria $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ para testar a série $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ quanto a convergência ou divergência.

Teste da Integral (11.23)

Sejam $\sum a_n$ uma série, $f(n) = a_n$ e f a função obtida substituindo-se n por x. Se f é positiva, contínua e decrescente para todo real $x \geq 1$, então a série $\sum a_n$

(i) converge se $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ converge.

(ii) diverge se $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ diverge.

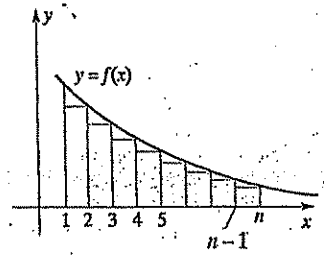


Figura 11.8

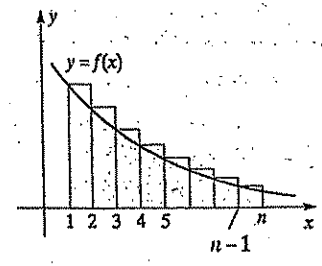


Figura 11.9

DEMONSTRAÇÃO

De acordo com a hipótese, seja $f(n) = a_n$ e consideremos $f(x)$ para todo real $x \geq 1$. A Figura 11.8 exibe o gráfico típico desta função positiva, contínua e decrescente. Se n é um inteiro positivo maior do que 1, a área do polígono retangular inscrito ilustrado na Figura 11.8 é

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) = f(2) + f(3) + \ldots + f(n).$$

Analogamente, a área do polígono retangular circunscrito ilustrado na Figura 11.9 é

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) = f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1)$$

Como $\int_1^n f(x)\,dx$ é a área sob o gráfico de f de 1 a n,

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

Denotando por S_n a n^{ma} soma parcial da série $f(1) + f(2) + \ldots + f(n) \ldots$, então a desigualdade acima pode ser escrita

$$S_n - f(1) \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq S_{n-1}$$

A desigualdade precedente implica que, se a integral $\int_1^\infty f(x)\,dx$ converge e é igual a $K > 0$, então

$$S_n - f(1) \leq K \quad \text{ou} \quad S_n \leq K + f(1)$$

para todo inteiro positivo n. Logo, pelo Teorema (11.22), a série $\sum f(n)$ converge.

Se a integral imprópria diverge, então

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)\,dx = \infty$$

e como $\int_1^n f(x)\,dx \leq S_{n-1}$, temos também $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = \infty$; isto é, a série $\sum f(n)$ diverge.

Ao utilizar o teste da integral (11.23), é necessário considerar

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t f(x)\,dx$$

Assim, devemos integrar $f(x)$ e então tomar um limite. Se $f(x)$ não é integrável elementarmente, deve-se empregar um outro teste para investigar a convergência ou divergência da série.

EXEMPLO 1

Use o teste da integral (11.23) para mostrar que a série harmônica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

diverge (ver Exemplo 3 da Seção 11.2).

SOLUÇÃO

Como $a_n = 1/n$, fazemos $f(n) = 1/n$. Substituindo n por x obtemos $f(x) = 1/x$. Como f é positiva, contínua e decrescente para $x \geq 1$, podemos aplicar o teste da integral (11.23):

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \Big[\ln x \Big]_1^t$$

$$= \lim_{t\to\infty} [\ln t - \ln 1] = \infty$$

A série diverge, de acordo com (11.23)(ii).

EXEMPLO 2

Determine se a série infinita $\sum ne^{-n^2}$ converge ou diverge.

SOLUÇÃO

Como $a_n = ne^{-n^2}$, fazemos $f(n) = ne^{-n^2}$ e consideramos $f(x) = xe^{-x^2}$. Se $x \geq 1$, f é positiva e contínua. Pode-se utilizar a derivada primeira para determinar se f é decrescente. Como

$$f'(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} = e^{-x^2}(1 - 2x^2) < 0,$$

f é decrescente em $[1, \infty)$. Podemos, pois, aplicar o teste da integral como segue:

$$\int_1^\infty xe^{-x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t xe^{-x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty} \left[\left(-\tfrac{1}{2}\right)e^{-x^2} \right]_1^t$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right) \lim_{t\to\infty} \left[\frac{1}{e^{(t^2)}} - \frac{1}{e} \right] = \frac{1}{2e}$$

Logo a série converge, de acordo com (11.23)(i).

No exemplo 2, provamos que a série $\sum ne^{-n^2}$ converge, tendo, portanto, uma soma S. Mas *não achamos o valor numérico de S*. O número $1/(2e)$ na solução é o valor de uma integral imprópria, e não a soma da série. Se quisermos, podemos obter uma aproximação de S utilizando uma soma parcial S_n, com n suficientemente grande. (Ver Exercício 59.)

Pode-se usar o teste da integral também se a função f satisfaz a condição (11.23) para todo $x \geq k$, para algum inteiro positivo k. Neste caso, não fazemos nada mais do que substituir a integral em (11.23) por $\int_k^\infty f(x)\,dx$, o que corresponde a desprezar os $k-1$ primeiros termos da série.

A série seguinte, que é uma generalização da série harmônica (11.14), terá grande utilidade quando aplicarmos testes de comparação mais adiante.

Definição (11.24)

Uma **série-p**, ou **série hiperarmônica**, é uma série da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots$$

onde p é um número real positivo.

Note que, se $p = 1$ em (11.24), obtemos a série harmônica. O teorema seguinte dá indicação sobre a natureza da série-p.

Teorema (11.25)

A série-p $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

(i) converge se $p > 1$

(ii) diverge se $p \leq 1$

DEMONSTRAÇÃO

O caso especial $p = 1$ é a série harmônica divergente. Seja p um número real positivo e $p \neq 1$. Aplicaremos o teste da integral (11.23), fazendo $f(n) = 1/n^p$ e considerando $f(x) = 1/x^p = x^{-p}$. A função f é positiva e contínua para $x \geq 1$. Além disso, para esses valores de x, vemos que $f'(x) = -px^{-p-1} < 0$, e assim f é decrescente. f satisfaz, pois, as condições enunciadas no teste da integral (11.23), e consideramos

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t x^{-p}\,dx = \lim_{t\to\infty} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^t$$

$$= \frac{1}{1-p} \lim_{t\to\infty} (t^{1-p} - 1)$$

Se $p > 1$, então $p - 1 > 0$ e a última expressão pode escrever-se

$$\frac{1}{1-p} \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{t^{p-1}} - 1\right) = \frac{1}{1-p}(0 - 1) = \frac{1}{p-1}$$

Assim, por (11.23)(i), a série-p converge se $p > 1$.

Se $0 < p < 1$, então $1 - p > 0$ e

$$\frac{1}{1-p} \lim_{t\to\infty} (t^{1-p} - 1) = \infty$$

Logo, por (11.23)(ii), a série-p diverge.

Se $p \leq 0$, $\lim_{n\to\infty} (1/n^p) \neq 0$ e, por (11.17)(i), a série diverge.

ILUSTRAÇÃO

SÉRIE-p	VALOR DE p	CONCLUSÃO
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$	$p = 2$	Converge, por (11.25)(i), pois $2 > 1$
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots$	$p = \frac{1}{2}$	Diverge, por (11.25)(ii), pois $\frac{1}{2} < 1$
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} = 1 + \frac{1}{2^{3/2}} + \frac{1}{3^{3/2}} + \ldots$	$p = \frac{3}{2}$	Converge, por (11.25)(i), pois $\frac{3}{2} > 1$
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \ldots$	$p = \frac{1}{3}$	Diverge, por (11.25)(ii), pois $\frac{1}{3} < 1$

O próximo teorema permite utilizarmos séries conhecidas convergentes (divergentes) para estabelecer a convergência (divergência) de outras séries.

Testes de Comparação (11.26)

Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries de termos positivos.

(i) Se $\sum b_n$ converge e $a_n \leq b_n$ para todo inteiro positivo n, então $\sum a_n$ converge.

(ii) Se $\sum b_n$ diverge e $a_n \geq b_n$ para todo inteiro positivo n, então $\sum a_n$ diverge.

DEMONSTRAÇÃO

Denotemos por S_n e T_n as somas parciais de ordem n de $\sum a_n$ e $\sum b_n$, respectivamente. Suponhamos que $\sum b_n$ seja convergente e tenha por soma T. Se $a_n \leq b_n$ para todo n, então $S_n \leq T_n < T$ e então, pelo Teorema (11.23), $\sum a_n$ converge. Isto prova a parte (i).

Para provar (ii), suponhamos $\sum b_n$ divergente e $a_n \geq b_n$ para todo n. Então $S_n \geq T_n$, e como T_n aumenta sem limite quando n tende para infinito, o mesmo ocorre com S_n. Conseqüentemente, $\sum a_n$ diverge.

A convergência ou divergência de uma série não é afetada quando se suprime um número finito de termos; a condição $a_n \le b_n$ ou $a_n \ge b_n$ de (11.26) é então exigida somente do termo de ordem k em diante, para algum inteiro positivo k.

Diz-se que uma série $\sum d_n$ domina uma série $\sum c_n$ se $c_n \le d_n$ para todo inteiro positivo n. Nesta terminologia, (11.26)(i) afirma que *uma série de termos positivos que é dominada por uma série convergente é também convergente.* A parte (ii) afirma que *uma série que domina uma série de termos positivos divergente é também divergente.*

EXEMPLO 3

Determine se a série converge ou diverge:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 + 5^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n} - 1}$

SOLUÇÃO

(a) Para todo $n \ge 1$,

$$\frac{1}{2 + 5^n} < \frac{1}{5^n} = \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

Como $\sum (1/5)^n$ é uma série geométrica convergente, a série dada também converge, pelo teste de comparação (11.26)(i).

(b) A série-p $\sum 1/\sqrt{n}$ diverge, e assim também diverge a série obtida desprezando-se o primeiro termo $1/\sqrt{1}$. Se $n \ge 2$, então

$$\frac{1}{\sqrt{n} - 1} > \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ então } \frac{3}{\sqrt{n} - 1} > \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Decorre do teste de comparação (11.26)(ii) que a série dada diverge.

Ao utilizarmos um teste de comparação, devemos primeiro escolher uma série $\sum b_n$ adequada, para então provar que $a_n \le b_n$ ou $a_n \ge b_n$, para todo inteiro n maior do que algum inteiro positivo k. Esta prova pode ser assaz difícil se a_n é uma expressão complicada. O teste de comparação seguinte é em geral mais fácil de aplicar porque, escolhida $\sum b_n$, basta obter o limite do quociente a_n/b_n quando $n \to \infty$.

Teste limite de comparação (11.27)

Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries de termos positivos. Se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$$

então ambas as séries convergem ou ambas divergem.

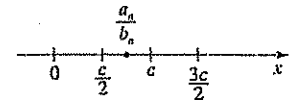


Figura 11.10

DEMONSTRAÇÃO

Se $\lim_{n\to\infty} (a_n/b_n) = c > 0$, então a_n / b_n está próximo de c se n é grande. Logo, existe um número N tal que

$$\frac{c}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3c}{2} \qquad \text{sempre que } n > N$$

(ver Figura 11.10). Isto equivale a

$$\frac{c}{2}\, b_n < a_n < \frac{3c}{2}\, b_n \qquad \text{sempre que } n > N$$

Se a série $\sum a_n$ converge, então $\sum (c/2)b_n$ também converge, porque é dominada por $\sum a_n$. Aplicando (11.20)(ii), vemos que a série

$$\sum b_n = \sum \left(\frac{2}{c}\right)\left(\frac{c}{2}\right) b_n$$

converge.

Reciprocamente, se $\sum b_n$ converge, então $\sum a_n$ também converge, pois é dominada pela série convergente $\sum (3c/2)b_n$. Provamos que $\sum a_n$ converge se e somente se $\sum b_n$ converge. Conseqüentemente $\sum a_n$ diverge se e somente se $\sum b_n$ diverge.

Se, em (11.27), o limite é 0 ou ∞, ainda assim é possível determinar se a série $\sum a_n$ converge ou diverge, aplicando o teste de comparação do Exercício 51 ou 52, respectivamente.

Para obter uma série $\sum b_n$ conveniente para ser usada no teste limite de comparação (11.27) quando a_n é um quociente, um bom processo consiste em *reter apenas os termos do numerador e do denominador que têm o maior efeito sobre a magnitude.* Podemos também substituir qualquer fator constante c por

1, pois $\sum b_n$ e $\sum cb_n$ são ou ambas convergentes ou ambas divergentes (ver Teorema 11.20). Este processo é ilustrado a seguir para diversas séries

ILUSTRAÇÃO

a_n	CONSERVANDO OS TERMOS DE MAIOR MAGNITUDE	ESCOLHA DE b_n em 11.27
$\frac{3n+1}{4n^3+n^2-2}$	$\frac{3n}{4n^3}=\frac{3}{4n^2}$	$\frac{1}{n^2}$
$\frac{5}{\sqrt{n^2+2n+7}}$	$\frac{5}{\sqrt{n^2}}=\frac{5}{n}$	$\frac{1}{n}$
$\frac{\sqrt[3]{n^2+4}}{6n^2-n-1}$	$\frac{\sqrt[3]{n^2}}{6n^2}=\frac{n^{2/3}}{6n^2}=\frac{1}{6n^{4/3}}$	$\frac{1}{n^{4/3}}$

EXEMPLO 4

Determine se a série converge ou diverge:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+5n}{2^n(n^2+1)}$

SOLUÇÃO

(a) O n^{mo} termo da série é

$$a_n=\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$$

Desprezando o número 1 no radicando, obtemos $b_n=1/\sqrt[3]{n^2}$, que é o termo de ordem n de uma série-p divergente, com $p=\frac{2}{3}$. Aplicando o teste limite de comparação (11.27), obtemos:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{n^2}{n^2+1}}=1>0$$

Como $\sum b_n$ diverge, $\sum a_n$ também diverge.

É importante notar que não podemos usar $b_n=1/\sqrt[3]{n^2}$ com o teste de comparação (11.26), porque $a_n<b_n$, em lugar de $a_n\geq b_n$.

(b) O n^{mo} termo da série é

$$a_n=\frac{3n^2+5n}{2^nn^2+2^n}$$

Desprezando os termos de menor magnitude do numerador e no denominador, obtemos

$$\frac{3n^2}{2^nn^2}=\frac{3}{2^n}$$

e, então, escolhemos $b_n=1/2^n$. Aplicando o teste limite de comparação (11.27), obtemos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{x\to\infty}\frac{3n^2+5n}{2^n(n^2+1)}\cdot\frac{2^n}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3n^2+5n}{n^2+1}=3>0$$

Como, pelo Teorema (11.15)(i), $\sum b_n$ é uma série geométrica convergente (com $r=\frac{1}{2}<1$), a série $\sum a_n$ também é convergente.

EXEMPLO 5

Seja $a_n=\frac{8n+\sqrt{n}}{5+n^2+n^{7/2}}$. Determine se $\sum a_n$ converge ou diverge.

SOLUÇÃO

Para obter uma série de comparação adequada $\sum b_n$, conservamos apenas as potências mais altas de n no numerador e no denominador, obtendo

$$\frac{8n}{n^{7/2}}=\frac{8}{n^{5/2}}$$

Aplicando o teste limite de comparação (11.27) com $b_n=1/n^{5/2}$, obtemos:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{8n+n^{1/2}}{5+n^2+n^{7/2}}\cdot\frac{n^{5/2}}{1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8n^{7/2}+n^3}{5+n^2+n^{7/2}}=8>0$$

Como $\sum b_n$ é uma série-p convergente com $p=\frac{5}{2}>1$, decorre de (11.27) que $\sum a_n$ é também convergente.

Concluiremos esta seção com várias observações gerais sobre séries de termos positivos. Seja $\sum a_n$ uma série de termos positivos e suponhamos os termos agrupados de alguma maneira, como, por exemplo,

$$(a_1 + a_2) + a_3 + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \ldots$$

Denotando a última série por $\sum b_n$ de modo que

$$b_1 = a_1 + a_2,\ b_2 = a_3,\ b_3 = a_4 + a_5 + a_6 + a_7, \ldots$$

então qualquer soma parcial da série $\sum b_n$ é também uma soma parcial de $\sum a_n$. Segue-se que, se $\sum a_n$ converge, então $\sum b_n$ também converge e tem a mesma soma. Vale argumento análogo para qualquer outro agrupamento dos termos da série $\sum a_n$. Assim, *se uma série de termos positivos converge, então a série obtida agrupando-se os termos de uma maneira arbitrária também converge e tem a mesma soma.* Já a respeito de séries divergentes não é possível fazer afirmação semelhante. Assim é que os termos da série divergente $\sum (-1)^n$ podem ser agrupados de modo a originar uma série convergente (ver Exercício 54 da Seção 11.2).

Suponhamos, em seguida, que uma série convergente de termos positivos $\sum a_n$ tenha a soma S e que se forme uma nova série $\sum b_n$ reagrupando os termos de uma forma arbitrária. Por exemplo, $\sum b_n$ poderia ser a série

$$a_2 + a_8 + a_1 + a_5 + a_7 + a_3 + \ldots$$

Se T_n é a n^{ma} soma parcial de $\sum b_n$, então é uma soma de termos de $\sum a_n$. Se m é o maior índice associado aos termos a_k em T_n, então $T_n \le S_m < S$. Conseqüentemente, $T_n < S$ para todo n. Aplicando o Teorema (11.22), vemos que $\sum b_n$ converge e tem soma $T \le S$. A demonstração precedente independe do reagrupamento particular dos termos. Podemos também considerar a série $\sum a_n$ como obtida pelo reagrupamento dos termos de $\sum b_n$ e, então, pelo mesmo argumento, $S \le T$. Provamos que *se os termos de uma série de termos positivos, convergente, $\sum a_n$, são reagrupados de uma forma arbitrária, a série resultante converge e tem a mesma soma.*

EXERCÍCIOS 11.3

Exercs. 1-12: (a) Mostre que a função f determinada pelo n^{no} termo da série verifica a hipótese do teste da integral. (b) Use o teste da integral para determinar se a série converge ou diverge.

1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+2n)^2}$

2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4+n)^{3/2}}$

3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+7}$

4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

5 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$

6 $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(2n-5)}$

7 $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

8 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$

9 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$

10 $\sum_{n=4}^{\infty} \left(\frac{1}{n-3} - \frac{1}{n}\right)$

11 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{1+n^2}$

12 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+16n^2}$

Exercs. 13-20: Use um teste básico de comparação para determinar se a série converge ou diverge.

13 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4+n^2+1}$

14 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$

15 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}$

16 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\cos n}{n^2}$

17 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n}$

18 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arcsec} n}{(0{,}5)^n}$

19 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

20 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

Exercs. 21-28: Use o teste limite de comparação para determinar se a série converge ou diverge.

21 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+4}$

22 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3+\sqrt{n}}$

23 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n^3-5n}}$

24 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(n+1)(n+2)}$

25 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n^2-7}{e^n(n+1)^2}$

26 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+5}{n2^n}$

27 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+9}$

28 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$

Exercs. 29-46: Determine se a série converge ou diverge.

29 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+n^2}{n^3+1}$

30 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5+4n^3+1}{2n^8+n^4+2}$

31 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{1+3^n}$

32 $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{3n}{2n^2-7}$

33 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{5n^2+1}}$

34 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^4}$

35 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{2n+1}}$

36 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\ln n}{n^3+n+1}$

37 $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$

38 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

39 $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{n^2}$

40 $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{1}{n}$

41 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^3}{(n^3+1)^2}$

42 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\ln n}{n^2+1}$

43 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2^n}{n+3^n}$

44 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$

45 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$

46 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n + 2^n}{n+5^n}$

Exercs. 47-48: Determine todos os reais k para os quais a série é convergente.

47 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^k \ln n}$

48 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^k}$

49 (a) Use a prova do teste da integral (11.23) para mostrar que, para todo inteiro positivo $n > 1$,

$$\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} < 1 + \ln n$$

(b) Estime o número de termos da série harmônica que devem ser somados para que se tenha $S_n > 100$.

50 Considere o problema hipotético ilustrado na figura. Partindo de uma bola de 0,30 m de raio, uma pessoa empilha bolas verticalmente de tal modo que, se r_k é o raio da k^{ma} bola, então $r_{n+1} = r_n\sqrt{n/(n+1)}$ para cada inteiro positivo n.

(a) Mostre que a altura da pilha pode tornar-se arbitrariamente grande.

(b) Se as bolas são feitas de material que pesa 12 quilos por metro cúbico, estabeleça um extremo superior para o peso total da pilha.

51 Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries de termos positivos. Prove que se $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = 0$ e $\sum b_n$ converge, então $\sum a_n$ converge. (Isto não se verifica necessariamente para séries que contenham termos negativos.)

52 Prove que se $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = \infty$ e $\sum b_n$ diverge, então $\sum a_n$ diverge.

53 Seja $\sum a_n$ uma série convergente de termos positivos. Seja $f(n) = a_n$ e f contínua e decrescente para $x \geq N$, para algum inteiro N. Prove que o erro cometido ao aproximarmos a soma da série dada por $\sum_{n=1}^{N} a_n$ é menor do que $\int_N^\infty f(x)\,dx$.

Exercs. 54-56: Use o Exercício 53 para estimar o menor número de termos que devem ser somados para aproximar a soma da série com um erro menor que E.

54 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $E = 0{,}001$ 55 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, $E = 0{,}01$

56 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$, $E = 0{,}05$

57 Prove que se uma série de termos positivos $\sum a_n$ converge, então $\sum (1/a_n)$ diverge.

58 Prove que se uma série de termos positivos $\sum a_n$ converge, então $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ converge. (*Sugestão*: Mostre primeiro que $\sqrt{a_n a_{n+1}} \leq (a_n + a_{n+1})/2$.

Ⓒ Exercs. 59-60: Obtenha uma aproximação da soma da série dada com três casas decimais. (Use o Exercício 53 para justificar a precisão de sua resposta.)

59 $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$ 60 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

Ⓒ 61 Grafe no mesmo sistema de eixos coordenados $y = x$ e $y = \ln(x^k)$ para $k = 1, 2, 3$ e $1 \leq x \leq 20$, e use então os gráficos para prever se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n^k)}$ converge ou diverge, para $k = 1, 2, 3$.

Ⓒ 62 Grafe no mesmo sistema de eixos coordenados $y = x$ e $y = (\ln x)^k$ para $k = 1, 2, 3$ e $1 \leq x \leq 200$, e use então os gráficos para prever se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^k}$ converge ou diverge, para $k = 1, 2, 3$.

11.4 OS TESTES DA RAZÃO E DA RAIZ

Para que possamos aplicar o teste da integral a uma série de termos positivos $\sum a_n$ com $a_n = f(n)$, os termos devem ser decrescentes e devemos saber integrar $f(x)$. Isto exclui muitas séries que envolvem fatoriais e outras expressões complicadas. Introduziremos agora dois testes que permitem determinar a convergência ou divergência, quando outros testes falham. Infelizmente, para certas séries tais testes são inconclusivos, conforme indicado na parte (iii) dos mesmos.

Teste da Razão (11.28)

Seja $\sum a_n$ uma série de termos positivos, e suponhamos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

(i) Se $L < 1$, a série é convergente.

(ii) Se $L > 1$, ou $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$, a série é divergente.

(iii) Se $L = 1$, nada se pode afirmar; deve-se então aplicar outro teste.

DEMONSTRAÇÃO

(i) Suponhamos $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}/a_n) = L < 1$ e seja r um número tal que $0 \leq L < r < 1$. Como a_{n+1}/a_n está próximo de L se n é grande, existe um inteiro N tal que, sempre que $n \geq N$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < r \quad \text{ou} \quad a_{n+1} < a_n r$$

Substituindo n por $N, N+1, N+2, \ldots$, obtemos

$$a_{N+1} < a_N r$$

$$a_{N+2} < a_{N+1} r < a_N r^2$$

$$a_{N+3} < a_{N+2} r < a_N r^3$$

e, em geral,

$$a_{N+m} < a_N r^m \text{ sempre que } m > 0$$

Decorre do teste de comparação (11.26)(i) que a série

$$a_{N+1} + a_{N+2} + \ldots + a_{N+m} + \ldots$$

converge, pois seus termos são inferiores aos termos correspondentes da série geométrica convergente

$$a_N r + a_N r^2 + \ldots + a_N r^n + \ldots$$

Como a convergência ou a divergência não é afetada quando se elimina um número finito de termos (ver Teorema (11.19)), a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também converge.

(ii) Suponhamos $\lim_{n\to\infty} (a_{n+1}/a_n) = L > 1$. Se r é um real tal que $L > r > 1$, então existe um inteiro N tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > r > 1 \text{ sempre que } n \geq N$$

Conseqüentemente, $a_{n+1} > a_n$ se $n \geq N$. Assim, $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ e, pelo teste do enésimo termo (11.17)(i), a série $\sum a_n$ diverge.

A demonstração para o caso $\lim_{n\to\infty} (a_{n+1}/a_n) = \infty$ é análoga e é deixada como exercício.

(iii) O teste da razão nada permite concluir se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

pois é fácil verificar que o limite é 1 tanto para a série convergente $\sum (1/n^2)$ como para a série divergente $\sum (1/n)$. Conseqüentemente, *se o limite é 1, devemos empregar um outro teste.*

EXEMPLO 1

Determine se a série é convergente ou divergente.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$

SOLUÇÃO

(a) Aplicando o teste da razão, temos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(a_{n+1} \cdot \frac{1}{a_n} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0$$

Como $0 < 1$, a série é convergente.

(b) Aplicando o teste da razão, obtemos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{3^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{n^2 + 2n + 1} = 3$$

Como $3 > 1$, a série diverge, conforme (11.28)(ii).

EXEMPLO 2

Determine a convergência ou divergência de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

SOLUÇÃO

Apliquemos o teste da razão:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)} \cdot \frac{1}{n^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$$

A última desigualdade é uma conseqüência do Teorema (7.32)(ii). Como $e > 1$, a série diverge.

Se, para uma série $\sum a_n$, $\lim_{n\to\infty} (a_{n+1}/a_n) = 1$, devemos utilizar um teste diferente (ver (iii) de (11.28)). A ilustração seguinte apresenta algumas séries deste tipo e sugestões sobre como determinar a convergência ou divergência.

ILUSTRAÇÃO

SÉRIES $\sum a_n$	$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$	SUGESTÃO
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 3n + 4}{5n^5 - 7n^3 + n}$	1	Determine a convergência pelo teste limite de comparação (11.27) com $b_n = 1/n^3$.
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n + 1}{\sqrt{n^3 + 5n + 3}}$	1	Determine a divergência pelo teste limite de comparação (11.27) com $b_n = 1/\sqrt{n}$.
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$	1	Estabeleça a divergência usando o teste da integral (11.23).

O teste seguinte costuma ser útil quando a_n contém potências de n.

Teste da Raiz (11.29)

Seja $\sum a_n$ uma série de termos positivos e suponhamos

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

(i) Se $L < 1$, a série é convergente.

(ii) Se $L > 1$ ou $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \infty$, a série é divergente.

(iii) Se $L = 1$, deve-se aplicar um teste diferente, pois a série pode ser convergente ou divergente.

DEMONSTRAÇÃO

Se $L < 1$, consideremos um número r arbitrário tal que $0 \le L < r < 1$. Pela definição de limite, existe um inteiro positivo N tal que, se $n \ge N$, então $\sqrt[n]{a_n} < r$ ou $a_n < r^n$.

Como $0 < r < 1$, $\sum_{n=N}^{\infty} r^n$ é uma série geometricamente convergente e, então, pelo teste básico de comparação (11.26), $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ converge. Conseqüentemente, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Com isto provamos (i). O resto da prova é análogo à do teste da razão.

UFPB/BIBLIOTECA/PRAI

SALA DE RESERVA

EXEMPLO 3

Determine a convergência ou divergência de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n+1}}{n^n}$.

SOLUÇÃO

Aplicando o teste da raiz,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{3n+1}}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^{3n+1}}{n^n}\right)^{1/n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{3+(1/n)}}{n} = 0$$

Como $0 < 1$, a série converge. Poderíamos ter aplicado o teste da razão, mas o processo de cálculo do limite seria mais complicado.

EXERCÍCIOS 11.4

Exercs. 1-10: Determine $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, e use o teste da razão para determinar se a série converge ou diverge, ou se o teste é inconclusivo.

1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n + 1}{2^n}$

2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2 + 4}$

3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n(3^{n+1})}$

4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{5^n(n + 1)}$

5 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n!}$

6 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10} + 10}{n!}$

7 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 3}{n^2 + 2n + 5}$

8 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{\sqrt{n^3 + 1}}$

9 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^n}$

10 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n + 1)^5}$

Exercícios 11-18: Ache $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$, e use o teste da raiz para determinar se a série converge ou diverge, ou se o teste é inconclusivo.

11 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

12 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^n}{n^{n/2}}$

13 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$

14 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{(\ln n)^n}$

15 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$

16 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{10^n}$

17 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n + 1}\right)^n$

18 $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n}{\ln n}\right)^n$

Exercs. 19-40: Determine se a série converge ou diverge.

19 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + 1}$

20 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{3n + 4}$

21 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{99^n(n^5 + 2)}{n^2 10^{2n}}$

22 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^{2n}}{5^{n-1}}$

23 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3 + e^n}$

24 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 1}{n^3 + 1}$

25 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^n n!$

26 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

27 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{10^{n+1}}$

28 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10 + 2^n}{n!}$

29 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

30 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n}$

37 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

38 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$

31 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{\ln n}}$

32 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^n}{(5n + 3n^{-1})^n}$

39 $1 + \frac{1 \cdot 3}{2!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3!} + \ldots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{n!} + \ldots$

33 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{(1.01)^n}$

34 $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{1/n}$

40 $\frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \ldots + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \ldots (3n-2)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)} + \ldots$

35 $\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg} \frac{1}{n}$

36 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2}$

11.5 SÉRIES ALTERNADAS E CONVERGÊNCIA ABSOLUTA

Os testes de convergência estudados até aqui só podem ser aplicados a séries de termos positivos. Consideraremos agora séries infinitas que contêm termos positivos e termos negativos. O tipo mais simples e mais usual de tais séries é a série **alternada**, em que os termos são alternadamente positivos e negativos. Costuma-se representar uma série alternada como

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots$$

ou $$-a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \ldots + (-1)^n a_n + \ldots$$

com $a_k > 0$ para todo k. O próximo teorema fornece o teste principal para a convergência de tais séries. Por conveniência, consideraremos $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$. Demonstração análoga vale para $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$.

Teste para séries alternadas (11.30)

A série alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots$$

é convergente se se verificam as duas condições seguintes:

(i) $a_k \geq a_{k+1} > 0$ para todo k.

(ii) $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

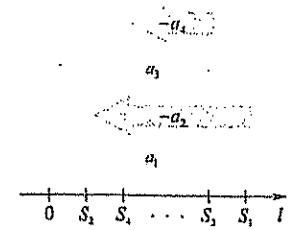


Figura 11.11

DEMONSTRAÇÃO

Pela condição (i), temos

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq a_5 \geq \ldots \geq a_k \geq a_{k+1} \geq \ldots$$

Consideremos as somas parciais

$$S_2, S_4, S_6, \ldots, S_{2n}, \ldots$$

que contêm um número par de termos da série. Como

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

e $a_k - a_{k+1} \geq 0$ para todo k, vemos que

$$0 \leq S_2 \leq S_4 \leq \ldots \leq S_{2n} \leq \ldots$$

isto é, $\{S_{2n}\}$ é uma seqüência monotônica. Este fato evidencia-se também na Figura 11.11, onde adotamos uma reta coordenada l para representar as quatro somas parciais seguintes da série:

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 - a_2, S_3 = a_1 - a_2 + a_3, S_4 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4$$

É interessante você procurar determinar os pontos de l correspondentes a S_5 e S_6.

Referindo-nos à Figura 11.11, vemos que $S_{2n} \leq a_1$ para todo inteiro positivo n, o que se pode provar também algebricamente, notando que

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1$$

Assim, $\{S_{2n}\}$ é uma seqüência monotônica cotada. Tal como na prova do Teorema (11.9),

$$\lim_{n \to \infty} S_{2n} = S \leq a_1$$

para algum número S.

Considerando em seguida uma soma parcial S_{2n+1}, que contém um número *ímpar* de termos da série, então

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1} \text{ e como } \lim_{n \to \infty} a_{2n+1} = 0,$$

$$\lim_{n \to \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \to \infty} S_{2n} = S$$

Como tanto a seqüência de somas parciais pares como a de somas parciais ímpares têm o mesmo limite S, segue-se que

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S \leq a_1$$

ou seja, a série converge.

EXEMPLO 1

Determine se a série alternada converge ou diverge:

$$\text{(a)}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n}{4n^2-3} \qquad \text{(b)}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n}{4n-3}$$

SOLUÇÃO

(a) Seja $a_n = f(n) = \dfrac{2n}{4n^2-3}$.

Para aplicar o teste das séries alternadas (11.30), devemos mostrar que

(i) $a_k \geq a_{k+1}$ para todo inteiro positivo k.
(ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Há várias maneiras para demonstrar (i). Uma delas consiste em mostrar que $f(x) = 2x/(4x^2-3)$ é decrescente para ≥ 1. Pela regra do quociente,

$$f'(x) = \frac{(4x^2-3)(2)-(2x)(8x)}{(4x^2-3)^2} = \frac{-8x^2-6}{(4x^2-3)^2} < 0$$

Pelo Teorema (4.13), $f(x)$ é decrescente e, assim, $f(k) \geq f(k+1)$, isto é $a \geq a_{k+1}$ para todo inteiro positivo k.

Podemos também provar (i) diretamente, mostrando que $a_k - a_k + 1 \geq 0$. Assim, se $a_n = 2n/(4n^2-3)$, então, para todo inteiro positivo k,

$$a_k - a_{k+1} = \frac{2k}{4k^2-3} - \frac{2(k+1)}{4(k+1)^2-3} = \frac{8k^2+8k+6}{(4k^2-3)(4k^2+8k+1)} \geq 0$$

Podemos ainda provar que $a_k \geq a_{k+1}$ mostrando que $a_{k+1}/a_k \leq 1$.

Para provar (ii), vemos que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{4n^2-3} = 0$$

Assim, a série alternada converge.

(b) Pode-se mostrar que $a_k \geq a_{k+1}$ para todo k, entretanto,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{4n-3} = \frac{1}{2} \neq 0$$

e, assim, a série diverge, pelo teste do $n^{\text{ésimo}}$ termo (11.17)(i).

O teste (11.30) para séries alternadas também pode ser usado se a condição (i) é válida para $k > m$, para algum inteiro positivo m, porque isto corresponde a omitir os m primeiros termos da série.

Se uma série converge, então a $n^{\text{ésima}}$ soma parcial S_n pode ser utilizada para aproximar a soma S da série. Em muitos casos, é difícil determinar a precisão da aproximação; mas, no caso de uma *série alternada*, o teorema seguinte constitui uma forma simples de avaliação desse erro.

Teorema (11.31) Seja $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ uma série alternada que verifica as condições (i) e (ii) do teste das séries alternadas. Se S é a soma da série e S_n é uma soma parcial, então

$$|S - S_n| \leq a_{n+1}$$

isto é, o erro cometido ao aproximarmos S por S_n é, no máximo, igual a a_{n+1}.

DEMONSTRAÇÃO

A série obtida pela eliminação dos n primeiros termos de $\sum(-1)^{n-1}a_n$, isto é,

$$(-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1}a_{n+2} + (-1)^{n+2}a_{n+3} + \cdots,$$

também verifica as condições de (11.30), tendo, portanto, uma soma R_n. Assim,

$$S - S_n = R_n = (-1)^n(a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \cdots)$$

e $$|R_n| = a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \cdots$$

Utilizando o mesmo argumento empregado na prova do teste das séries alternadas, vemos que $|R_n| \leq a_{n+1}$. Conseqüentemente,

$$E = |S - S_n| = |R_n| \leq a_{n+1}$$

que é o que queríamos provar.

No próximo exemplo aplicamos o Teorema (11.31) para aproximar a soma de uma série alternada. Para discutir a precisão de uma aproximação, devemos primeiro convencionar o que significa precisão de uma casa decimal, precisão de duas casas decimais etc. Adotamos a seguinte convenção. Se E é o erro de uma aproximação, então esta terá uma precisão de k casas decimais se $|E| < 0{,}5 \times 10^{-k}$. Temos, por exemplo

precisão de 1 casa decimal se $|E| < 0{,}5 \times 10^{-1} = 0{,}05$

precisão de 2 casas decimais se $|E| < 0{,}5 \times 10^{-2} = 0{,}005$

precisão de 3 casas decimais se $|E| < 0{,}5 \times 10^{-3} = 0{,}0005$

EXEMPLO 2

Prove que a série

$$1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!} + \ldots$$

é convergente, e obtenha uma aproximação com cinco casas decimais da sua soma S.

SOLUÇÃO

O n.º termo $a_n = 1/(2n-1)!$ tem limite 0 quando $n \to \infty$, e $a_k > a_{k+1}$ para todo inteiro positivo k. Logo, a série converge, de acordo com o teste das séries alternadas. Aproximando S por S_n, então, pelo Teorema (11.31), o erro cometido é no máximo igual a $a_{n+1} = 1/(2n+1)!$. Calculando alguns valores de a_{n+1}, vemos que, para $n = 4$,

$$a_5 = \frac{1}{9!} \approx 0{,}0000028 < 0{,}000005$$

Logo, a soma parcial S_4 é uma aproximação de S com cinco casas decimais. Como

$$S_4 = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!}$$

$$= 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5.040} \approx 0{,}841468$$

temos $S \approx 0{,}84147$.

Segue-se de (11.48(a)) que a soma da série é sen 1 e, então, que sen $1 \approx 0{,}84147$.

Segue-se um conceito útil no estudo de uma série que tem termos positivos e termos negativos, mas não alternadamente. Permite-nos utilizar testes para séries de termos positivos para determinar a convergência de outros tipos de séries (ver Teorema 11.34).

Definição (11.32) Uma série $\sum a_n$ é **absolutamente convergente** se a série

$$\sum |a_n| = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots$$

é convergente.

Note que se $\sum a_n$ é uma série de termos positivos, então $|a_n| = a_n$, e neste caso convergência absoluta e convergência coincidem.

EXEMPLO 3

Prove que a série alternada abaixo é absolutamente convergente:

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots + (-1)^n\frac{1}{n^2} + \ldots$$

SOLUÇÃO

Tomando valor absoluto de cada termo, temos

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots,$$

que é uma série-p convergente. Logo, pela definição (11.32), a série alternada é absolutamente convergente.

EXEMPLO 4

A série harmônica alternada é

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots$$

Mostre que esta série é

(a) convergente **(b)** não absolutamente convergente

SOLUÇÃO

(a) São verificadas as condições (i) e (ii) do teste (11.30) das séries alternadas, porque

$$\frac{1}{k} > \frac{1}{k+1} \text{ para todo } k \text{ e } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Logo a série harmônica alternada é convergente.

(b) Para testar a convergência absoluta, aplicamos a Definição (11.32) e consideramos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \right| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

Esta é a série harmônica, que já sabemos ser divergente (ver Exemplo 3 da Seção 11.2). Logo, pela Definição (11.32), a série harmônica alternada não é absolutamente convergente.

Séries convergentes mas não absolutamente convergentes, como a série harmônica alternada do Exemplo 4, recebem um nome especial, indicado na próxima definição.

Definição (11.33) Uma série $\sum a_n$ se diz **condicionalmente convergente**, se $\sum a_n$ é convergente mas $\sum |a_n|$ é divergente.

O teorema seguinte mostra que a convergência absoluta implica convergência.

Teorema (11.34) Se a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente, então $\sum a_n$ é convergente.

DEMONSTRAÇÃO

Fazendo $b_n = a_n + |a_n|$ e aplicando a propriedade $-|a_n| \le a_n \le |a_n|$, obtemos

$$0 \le a_n + |a_n| \le 2|a_n| \quad \text{ou} \quad 0 \le b_n \le 2|a_n|$$

Se $\sum a_n$ é absolutamente convergente, então $\sum |a_n|$ é convergente e, então, pelo Teorema (11.20)(ii), $\sum 2|a_n|$ é convergente. Aplicando o teste básico de comparação (11.26), vê-se que

$\sum b_n$ é convergente. Por (11.20)(iii), $\sum (b_n - |a_n|)$ é convergente. Como $b_n - |a_n| = a_n$, está completa a demonstração.

EXEMPLO 5

Seja $\sum a_n$ a série

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} - \frac{1}{2^7} - \frac{1}{2^8} + \ldots,$$

onde os sinais dos termos variam de dois em dois, e onde $|a_n| = 1/2^n$. Determine se $\sum a_n$ converge ou diverge.

SOLUÇÃO

A série não é alternada, nem geométrica, nem tampouco uma série de termos positivos, de modo que não se pode aplicar nenhum dos testes estudados. Consideremos a série de valores absolutos:

$$\sum |a_n| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

Trata-se de uma série geométrica com $r = \frac{1}{2}$, convergente porque $\frac{1}{2} < 1$, de acordo com o Teorema (11.15)(i). Assim, a série dada é absolutamente convergente e, pelo Teorema (11.34), é convergente.

EXEMPLO 6

Determine se a série abaixo é convergente ou divergente:

$$\operatorname{sen} 1 + \frac{\operatorname{sen} 2}{2^2} + \frac{\operatorname{sen} 3}{3^2} + \ldots + \frac{\operatorname{sen} n}{n^2} + \ldots$$

SOLUÇÃO

A série contém termos positivos e termos negativos, mas não é uma série alternada, porque, por exemplo, os três primeiros termos são positivos e os três seguintes, negativos. A série de valores absolutos é

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\operatorname{sen} n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\operatorname{sen} n|}{n^2}$$

Como $$\frac{|\operatorname{sen} n|}{n^2} < \frac{1}{n^2},$$

a série de valores absolutos $\sum |(\text{sen } n)/n^3|$ é dominada pela série-p convergente $\sum (1/n^2)$, sendo assim convergente. A série dada é, pois, absolutamente convergente e, então, convergente pelo Teorema (11.34).

Do que precede, vemos que uma série arbitrária pode ser classificada em exatamente *um* dos seguintes tipos:

(i) absolutamente convergente

(ii) condicionalmente convergente

(iii) divergente

Naturalmente, para séries de termos positivos, basta determinar a convergência ou divergência.

Pode-se utilizar a forma seguinte do teste da razão para investigar a convergência absoluta.

Teste da razão para convergência absoluta (11.35)

Seja $\sum a_n$ uma série de termos não-nulos, e suponhamos

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$$

(i) Se $L < 1$, a série é absolutamente convergente.

(ii) Se $L > 1$ ou $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty$, a série é divergente.

(iii) Se $L = 1$, devemos aplicar outro teste, pois a série pode ser absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente.

A demonstração é análoga à de (11.28). Note que, para as séries de termos positivos, os dois testes da razão são idênticos.

Podemos também formular um teste da raiz para a convergência absoluta. O enunciado é o mesmo que o de (11.29), exceto quanto ao fato de substituirmos $\sqrt{a_n}$ por $\sqrt{|a_n|}$.

EXEMPLO 6

Determine se a série abaixo é absolutamente convergente, condicionalmente convergente, ou divergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 + 4}{2^n}$$

SOLUÇÃO

Aplicando o teste da razão (11.35), obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^2 + 4}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2 + 4} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{n^2 + 2n + 5}{n^2 + 4} \right) = \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2} < 1$$

Logo, por (11.35)(i), a série é absolutamente convergente.

Pode-se mostrar que, se uma série $\sum a_n$ é absolutamente convergente e se os termos são reagrupados de maneira arbitrária, a série resultante converge e tem a mesma soma que a série original. Já não se pode dizer o mesmo para uma série condicionalmente convergente. Se $\sum a_n$ é condicionalmente convergente, então, mediante um reagrupamento adequado dos termos, podemos obter uma série divergente ou uma série convergente que tenha qualquer soma prefixada S*.

Dispomos agora de uma diversidade de testes para investigar a convergência ou divergência de uma série. É preciso bastante habilidade para determinar o melhor teste para uma série dada. Essa habilidade só se adquire fazendo-se muitos exercícios que envolvam diferentes tipos de séries. O resumo a seguir pode auxiliar na escolha do teste; mas há séries às quais não se pode aplicar nenhum desses testes. Em tais casos, pode ser necessário utilizar resultados obtidos em cursos avançados de matemática.

*Cf., por exemplo, R.C. Buck, Advanced Calculus, 3ª ed. (New York, McGraw-Hill 1978), pp. 238-239.

Resumo dos testes de convergência e divergência de séries

TESTE	SÉRIE	CONVERGÊNCIA OU DIVERGÊNCIA	COMENTÁRIOS
n^{mo} termo	$\sum a_n$	Diverge se $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$	Inconclusivo se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
Série geométrica	$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$	(i) Converge com $S = \frac{a}{1-r}$ se $\lvert r\rvert < 1$ (ii) Diverge se $\lvert r\rvert \geq 1$	Útil para testes de comparação se o termo a_n é *análogo* a ar^{n-1}.
Série-p	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$	(i) Converge se $p > 1$ (ii) Diverge se $p \leq 1$	Útil para testes de comparação se o termo a_n é *análogo* a $1/n^p$.
Integral	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $a_n = f(n)$	(i) Converge se $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ converge (ii) Diverge se $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ diverge	A função f obtida de $a_n = f(n)$ deve ser contínua, positiva, decrescente e facilmente integrável.
Comparação	$\sum a_n$, $\sum b_n$ $a_n > 0$, $b_n > 0$	(i) Se $\sum b_n$ converge e $a_n \leq b_n$ para todo n, então $\sum a_n$ converge. (ii) Se $\sum b_n$ diverge e $a_n \geq b_n$ para todo n, então $\sum a_n$ diverge. (iii) Se $\lim_{n\to\infty} (a_n/b_n) = c > 0$, ambas as séries convergem ou ambas divergem.	A série de comparação $\sum b_n$ é em geral uma série geométrica ou uma série-p. Para achar b_n em (iii), considere apenas os termos de a_n que têm maior efeito sobre a magnitude.
Razão	$\sum a_n$	Se $\lim_{n\to\infty} \left\lvert \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\rvert = L$ (ou ∞) a série (i) converge (absolutamente) se $L < 1$ (ii) diverge se $L > 1$ (ou ∞)	Inconclusivo se $L = 1$ Útil se a_n envolve fatoriais ou potências de grau n. Se $a_n > 0$ para todo n, pode-se desprezar o sinal de valor absoluto.

Continuação

TESTE	SÉRIE	CONVERGÊNCIA OU DIVERGÊNCIA	COMENTÁRIOS
Raiz	$\sum a_n$	Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n\rvert} = L$ (ou ∞) a série (i) converge (absolutamente) se $L < 1$ (ii) diverge se $L > 1$ (ou ∞)	Inconclusivo se $L = 1$ Útil se a_n envolve potências de grau n. Se $a_n > 0$ para todo n, pode-se desprezar o sinal de valor absoluto.
Séries alternadas	$\sum (-1)^n a_n$ $a_n > 0$	Converge se $a_k \geq a_{k+1}$, para todo k e $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$	Aplicável somente a séries alternadas.
$\sum \lvert a_n\rvert$	$\sum a_n$	Se $\sum \lvert a_n\rvert$ converge, então $\sum a_n$ converge	Útil para séries que contenham termos positivos e termos negativos.

EXERCÍCIOS 11.5

Exercs. 1-4: Determine se a série (a) verifica as condições (i) e (ii) para o teste das séries alternadas (11.30), e (b) converge ou diverge.

1 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2+7}$

2 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n5^{-n}$

3 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1 + e^{-n})$

4 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{2n}+1}{e^{2n}}$

Exercs. 5-32: Determine se a série é absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente.

5 $\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

6 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^{2/3}}$

7 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln(n+1)}$

8 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+4}$

9 $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\ln n}$

10 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$

11 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5}{n^3+1}$

12 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n}$

13 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-10)^n}{n!}$

14 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(-5)^n}$

15 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+3}{(2n-5)^2}$

16 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\sqrt{n}}{\sqrt{n^3+4}}$

17 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt[3]{n}}{n+1}$

18 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)^2}{n^5+1}$

19 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{1}{6}\pi n}{n^2}$

20 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{(1,5)^n}$

21 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, n \operatorname{sen} \frac{1}{n}$

22 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2}$

23 $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$

24 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{1/n}}{n!}$

25 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(-5)^n}$

26 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+1)^n}{(-n)^n}$

27 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+4^n}{1+3^n}$

28 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^4}{e^n}$

29 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos \pi n}{n}$

30 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{(2n-1)\pi}{2}$

31 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n-4)^2+5}$

32 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n}}$

Exercs. 33-38: Obtenha uma aproximação com três casas decimais da soma de cada série.

33 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!}$

34 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n)!}$

35 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^3}$

36 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^5}$

37 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+1}{5^n}$

38 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Exercs. 39-42: Use o Teorema (11.31) para achar um inteiro positivo n tal que S_n seja uma aproximação da soma da série com quatro casas decimais.

39 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$

40 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$

41 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^n}$

42 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^3+1}$

Exercs. 43-44: Mostre que a série alternada converge para todo inteiro positivo k.

43 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\ln n)^k}{n}$

44 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[k]{n}}$

45 Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são ambas convergentes, $\sum a_n b_n$ é também convergente? Explique.

46 Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são ambas divergentes, $\sum a_n b_n$ é também divergente?

11.6 SÉRIES DE POTÊNCIAS

Conforme dissemos no capítulo de introdução, a principal razão para o desenvolvimento da teoria das seções anteriores é a representação de funções como *séries de potências* – isto é, séries cujos termos contêm potências de uma variável x. A título de ilustração, utilizando a fórmula $S = a/(1-r)$ para a soma de uma série geométrica (ver Teorema (11.15)), obtemos

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1-x}$$

desde que $|x| < 1$. Fazendo $f(x) = 1/(1-x)$ com $|x| < 1$, então

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots.$$

Dizemos que $f(x)$ é *representada* por esta série de potências. Para achar um valor particular $f(c)$, fazemos $x = c$ e somamos a série. Por exemplo,

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

Mais adiante aplicaremos outras técnicas para representar por séries tipos diferentes de funções.

A definição a seguir pode ser considerada como uma generalização da noção de polinômio a uma série infinita.

Definição (11.36)

Seja x uma variável. Uma **série de potências de x** é uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

onde cada a_k é um número real.

Substituindo-se x por um número c na série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n c^n = a_0 + a_1 c + a_2 c^2 + \ldots + a_n c^n + \ldots.$$

Pode-se então testar esta série de termos constantes quanto a convergência ou divergência. Para simplificar o n^{mo} termo, admitimos que $x^0 = 1$, mesmo que $x = 0$. O principal objetivo desta seção é determinar todos os valores de x para os quais a série é convergente. Toda série de potências em x converge se $x = 0$, pois

$$a_0 + a_1(0) + a_2(0)^2 + \ldots + a_n(0)^n + \ldots = a_0$$

Para achar outros valores de x que produzem séries convergentes, costumamos empregar o teste da razão para convergência absoluta (11.35), conforme exemplos a seguir.

EXEMPLO 1

Ache todos os valores de x para os quais a série abaixo é absolutamente convergente:

$$1 + \frac{1}{5}x + \frac{2}{5^2}x^2 + \ldots + \frac{n}{5^n}x^n + \ldots$$

SOLUÇÃO

Fazendo

$$u_n = \frac{n}{5^n}x^n = \frac{nx^n}{5^n}$$

então

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)x^{n+1}}{5^{n+1}}\cdot\frac{5^n}{nx^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)x}{5n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{5n}\right)|x| = \tfrac{1}{5}|x|$$

Pelo teste da razão (11.35), com $L = \frac{1}{5}|x|$, a série será absolutamente convergente se as seguintes desigualdades equivalentes forem verdadeiras:

$$\tfrac{1}{5}|x| < 1, \quad |x| < 5, \quad -5 < x < 5$$

A série diverge se $\frac{1}{5}|x| > 1$, isto é, se $x > 5$ ou $x < -5$.

Se $\frac{1}{5}|x| = 1$, o teste da razão nada permite concluir; os números 5 e -5 exigem tratamento especial. Substituindo x por 5 na série de potências, obtemos

$$1 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n + \ldots$$

que é divergente, pelo teste do n^{mo} termo (11.17), porque $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Fazendo $x = -5$, obtemos

$$1 - 1 + 2 - 3 + \ldots + (-1)^n n + \ldots$$

que também é divergente, pelo teste do n^{mo} termo. Conseqüentemente, a série de potências é absolutamente convergente para todo x no intervalo aberto $(-5, 5)$ e é divergente para qualquer outro valor de x.

EXEMPLO 2

Ache todos os valores de x para os quais a série de potências abaixo é absolutamente convergente:

$$1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots$$

SOLUÇÃO

Utilizaremos a mesma técnica do Exemplo 1. Fazendo

$$u_n = \frac{1}{n!}x^n = \frac{x^n}{n!},$$

então

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}|x| = 0$$

O limite 0 é inferior a 1 para todo valor de x, logo, pelo teste da razão (11.35), a série de potências é absolutamente convergente para *todo* número real x.

EXEMPLO 3

Ache todos os valores de x para os quais $\sum n!x^n$ é convergente.

SOLUÇÃO

Seja $u_n = n!x^n$. Se $x \neq 0$, então

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}|(n+1)x| = \lim_{n\to\infty}(n+1)|x| = \infty$$

e, pelo teste da razão (11.35), a série diverge. Logo, a série de potências dada é convergente somente se $x = 0$.

O Teorema (11.38) mostrará que as soluções dos exemplos precedentes são típicas no sentido de que, se uma série de potências é convergente para valores não-zero de x, então ou ela é absolutamente convergente para todo número real, ou é absolutamente convergente em algum intervalo aberto $(-r, r)$ e

divergente fora do intervalo fechado $[-r, r]$. A prova de tal fato depende do próximo teorema.

Teorema (11.37)

(i) Se uma série de potências $\sum a_n x^n$ é convergente para um número c diferente de zero, então é absolutamente convergente sempre que $|x| < |c|$.

(ii) Se uma série de potências $\sum a_n x^n$ é divergente para um número d diferente de zero, então é divergente sempre que $|x| > |d|$.

DEMONSTRAÇÃO

Se $\sum a_n c^n$ converge e $c \neq 0$, então, pelo Teorema (11.16), $\lim_{n\to\infty} a_n c^n = 0$. Pela Definição (11.3) com $\in = 1$, sabe-se que existe um inteiro positivo N tal que

$$|a_n c^n| < 1 \text{ sempre que } n \geq N$$

Conseqüentemente

$$|a_n x^n| = \left|\frac{a_n c^n x^n}{c^n}\right| = |a_n c^n| \left|\frac{x}{c}\right|^n < \left|\frac{x}{c}\right|^n$$

desde que $n \geq N$. Se $|x| < |c|$, então $|x/c| < 1$, e $\sum |x/c|^n$ é uma série geométrica convergente. Logo, pelo teste básico de comparação (11.26), a série obtida com a omissão dos N primeiros termos de $\sum |a_n x^n|$ é convergente. Decorre que a série $\sum |a_n x^n|$ também é convergente, o que prova (i).

Para provar (ii), suponhamos que a série seja divergente se $x = d \neq 0$. Se a série é convergente para algum número c_1, com $|c_1| > |d_1|$, então, por (i), ela converge sempre que $|x| < |c_1|$. Em particular, a série é convergente para $x = d$, contrariamente à nossa suposição. Logo, a série diverge sempre que $|x| > |d|$.

Estamos agora em condições de provar o seguinte:

Teorema (11.38)

Se $\sum a_n x^n$ é uma série de potências, então ou

(i) a série converge somente se $x = 0$, ou

(ii) a série é absolutamente congervente para todo x, ou

(iii) existe um número $r > 0$ tal que a série é absolutamente convergente se x está no intervalo aberto $(-r, r)$ e divergente se $x < -r$ ou $x > r$.

DEMONSTRAÇÃO

Se nem (i) nem (ii) são verdadeiras, então existem números c e d diferentes de zero, tais que a série é convergente se $x = c$ e divergente se $x = d$. Denotemos por S o conjunto de todos os números reais para os quais a série é absolutamente convergente. Pelo Teorema (11.37), a série diverge se $|x| > |d|$, e, então, todo número em S é menor do que $|d|$. Pela propriedade de completude (11.10), S tem um extremo superior r. Segue-se que a série é absolutamente convergente se $|x| < r$ e diverge se $|x| > r$.

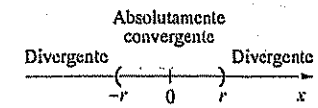


Figura 11.12 $\sum a_n x^n$ com raio de convergência r.

O caso (iii) do Teorema (11.38) acha-se ilustrado graficamente na Figura 11.12. O número r é chamado **raio de convergência** da série. Em $-r$ e/ou r pode ocorrer convergência ou divergência, dependendo da natureza da série.

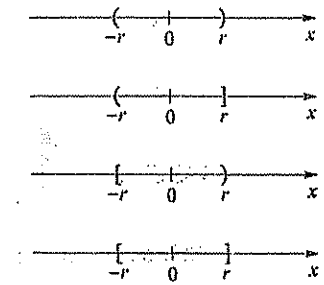


Figura 11.13 Intervalos de convergência.

A totalidade dos números para os quais uma série de potências é convergente chama-se **intervalo de convergência**. Se o raio de convergência r é positivo, então o intervalo de convergência é um dos seguintes (ver Figura 11.13):

$$(-r, r), (-r, r], [-r, r), [-r, r]$$

Para determinar qual destes intervalos é válido, devemos fazer testes separados para os números $x = r$ e $x = -r$.

Em (i) ou (ii) do Teorema (11.38), o raio de convergência se denota por 0 ou ∞, respectivamente. No Exemplo 1 desta seção, o intervalo de convergência é $(-5, 5)$ e o raio de convergência é 5. No Exemplo 2, o intervalo de convergência é $(-\infty, \infty)$ e dizemos que $r = \infty$. No Exemplo 3, $r = 0$. O próximo exemplo ilustra o caso de um intervalo de convergência semi-aberto.

EXEMPLO 4

Ache o intervalo de convergência da série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} x^n$$

SOLUÇÃO

Note que, neste exemplo, o coeficiente de x^0 é 0, e o somatório começa com $n = 1$. Façamos $u_n = x^n/\sqrt{n}$ e consideremos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\cdot\frac{\sqrt{n}}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\,x\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}}\,|x| = (1)|x| = |x|$$

Segue-se do teste da razão (11.35) que a série de potências é absolutamente convergente se $|x| < 1$ – isto é, se x está no intervalo aberto $(-1, 1)$. A série diverge se $x > 1$ ou $x < -1$. Os números 1 e -1 devem ser estudados separadamente, mediante substituição na série.

Fazendo $x = 1$, obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}(1)^n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$$

que é uma série-p divergente com $p = \frac{1}{2}$. Para $x = -1$, obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}(-1)^n = -1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \ldots$$

que converge pelo teste das séries alternadas. Logo, a série de potências dada converge se $-1 \le x < 1$. A Figura 11.14 é um esboço do intervalo de convergência $[-1, 1)$.

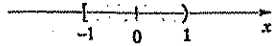


Figura 11.14 Intervalos de convergência $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}x^n$.

Consideraremos também os seguintes tipos mais gerais de séries de potências.

Definição (11.39)

Seja c um número real e x uma variável. Uma série de potências de $x - c$ é uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \ldots + a_n(x-c)^n + \ldots$$

onde cada a_n é um número real.

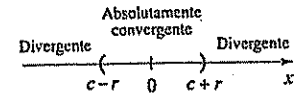


Figura 11.15 $\sum a_n(x-c)^n$ com raio de convergência r.

Para simplificar o n^{mo} termo em (11.39), admitimos que $(x-c)^0 = 1$ mesmo quando $x = c$. Tal como na demonstração do Teorema (11.38), mas com x substituído por $x - c$, ou

(i) A série converge somente se $x - c = 0$ – isto é, se $x = c$, ou

(ii) a série é absolutamente convergente para todo x, ou

(iii) existe um número $r > 0$ tal que a série é absolutamente convergente se x está no intervalo aberto $(c - r, c + r)$ e divergente se $x < c - r$ ou $x > c + r$.

A Figura 11.15 ilustra o caso (iii). Os pontos extremos do intervalo, $c - r$ e $c + r$, devem ser investigados separadamente. Como anteriormente, a totalidade dos números para os quais a série é convergente chama-se *intervalo de convergência*; r é o *raio de convergência*.

EXEMPLO 5

Ache o intervalo de convergência da série

$$1 - \frac{1}{2}(x-3) + \frac{1}{3}(x-3)^2 + \ldots + (-1)^n\frac{1}{n+1}(x-3)^n + \ldots$$

SOLUÇÃO

Fazendo $u_n = (-1)^n\dfrac{(x-3)^n}{n+1}$

então

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}}{n+2}\cdot\frac{n+1}{(x-3)^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n+2}(x-3)\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)|x-3|$$

$$= (1)|x-3| = |x-3|$$

Pelo teste da razão, a série é absolutamente convergente se $|x-3| < 1$ – isto é, se $-1 < x-3 < 1$, ou $2 < x < 4$.

Assim, a série é absolutamente convergente para todo x no intervalo aberto $(2, 4)$. A série diverge se $x < 2$ ou $x > 4$. Os números 2 e 4 devem ser investigados separadamente.

Fazendo $x = 4$ na série, obtemos

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^n\frac{1}{n+1} + \ldots,$$

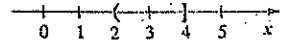


Figura 11.16 Intervalo de convergência de $\sum (-1)^n \frac{1}{n+1}(x-3)^n$.

que converge de acordo com o teste para séries alternadas. Para $x = 2$, temos

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n+1} + \ldots,$$

que é a série harmônica, divergente. Logo, o intervalo de convergência é (2, 4], ilustrado na Figura 11.16.

EXERCÍCIOS 11.6

Exercs. 1-30: Ache o intervalo de convergência da série de potências.

1 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+4} x^n$

2 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+4} x^n$

3 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} x^n$

4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n} x^{n+1}$

5 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}} x^n$

6 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} x^n$

7 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} x^n$

8 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n\sqrt{n}} x^n$

9 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3} x^n$

10 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{10^{n+1}}{3^{2n}} x^n$

11 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{10^n} (x-4)^n$

12 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} (x-2)^n$

13 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{100^n} x^n$

14 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{(2n)!} x^n$

15 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(-4)^n} x^{2n+1}$

16 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt[3]{n}\,3^n} x^n$

17 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(2n)!} x^{2n}$

18 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{10^n}{n!} x^n$

19 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n}}{n+1} (x-2)^n$

20 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n5^n} (x-5)^n$

21 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^{3n}} (x+4)^n$

22 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} (x+3)^n$

23 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^n}{n+1} (x-3)^n$

24 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{n^3} (x+2)^n$

25 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{e^n} (x-e)^n$

26 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^{2n}-1} (x-1)^{2n}$

27 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n6^n} (2x-1)^n$

28 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n+4}} (3x+4)^n$

29 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{n!} (x-4)^n$

30 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{n+1}}{n^n} (x-1)^n$

Exercs. 31-34: Ache o raio de convergência da série de potências.

31 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (3n)} x^n$

32 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)}{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot (3n+1)} x^n$

33 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$

34 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)!}{10^n} (x-5)^n$

Exercs. 35-36: Ache o raio de convergência da série de potências para inteiros positivos c e d.

35 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+c)!}{n!(n+d)!} x^n$

36 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(cn)!}{(n!)^c} x^n$

37 As *funções de Bessel* têm aplicação na análise de problemas que envolvem oscilações. Se α é um inteiro positivo, a função de Bessel $J_\alpha(x)$ *de primeira espécie de ordem* α é definida pela série de potências

$$J_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+\alpha)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\alpha}$$

Mostre que esta série é convergente para todo número real.

38 Ref. Exercício 37. O polinômio de sexto grau

$$1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2.304}$$

é às vezes utilizado para aproximar a função de Bessel $J_0(x)$ de primeira espécie de ordem zero para $0 \le x \le 1$. Mostre que o erro cometido nesta aproximação é inferior a 0,00001.

Exercs. 39-40: Ref. Exercício 37. Para α dado, ache os quatro primeiros termos da série de $J_\alpha(x)$ e grafe J_α no intervalo indicado.

39 $\alpha = 0$; [0, 2]

40 $\alpha = 1$; [0, 4]

41 Se $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = k$ e $k \neq 0$, prove que o raio de convergência de $\sum a_n x^n$ é $1/k$.

42 Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = k$ e $k \neq 0$, prove que o raio de convergência de $\sum a_n x^n$ é $1/k$.

43 Se $\sum a_n x^n$ tem raio de convergência r, prove que $\sum a_n x^{2n}$ tem raio de convergência $\sqrt{r}$.

44 Se $\sum a_n$ é absolutamente convergente, prove que $\sum a_n x^n$ também o é para todo x no intervalo $[-1, 1]$.

45 Se o intervalo de convergência de $\sum a_n x^n$ é $(-r, r]$, prove que a série é condicionalmente convergente em r.

46 Se $\sum a_n x^n$ é absolutamente convergente em um extremo de seu intervalo de convergência, prove que também o é no outro extremo.

11.7 REPRESENTAÇÃO DE FUNÇÕES POR SÉRIES DE POTÊNCIAS

Uma série de potências $\sum a_n x^n$ define uma função f cujo domínio é o intervalo de convergência da série. Especificamente, para cada x nesse intervalo, fazemos $f(x)$ igual à soma da série, isto é,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots.$$

Se uma função f é assim definida, dizemos que $\sum a_n x^n$ é uma **representação de $f(x)$ por uma série de potências**, ou que f é **representada pela série de potências.**

Cálculos numéricos utilizando séries de potências dão a base para a construção de calculadoras e de tábuas matemáticas. Além disto, a representação de função por séries de potências tem conseqüências de amplo alcance na matemática avançada e aplicações. A demonstração do Teorema (11.41) mostrará que e^x pode ser representada como segue:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Isto nos permite considerar e^x como uma *série* em lugar de como o inverso da função logaritmo natural. Como veremos, cálculos algébricos, diferenciação e integração podem ser realizados utilizando a série de e^x, em vez dos métodos anteriores. O mesmo se diga das funções trigonométricas, trigonométricas inversas, logarítmicas e hiperbólicas. No próximo exemplo veremos a representação por série de potências de uma função algébrica simples.

EXEMPLO 1

Ache uma função f representada pela série de potências $1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots$.

SOLUÇÃO

Se $|x| < 1$, então, pelo Teorema (11.15)(i), a série geométrica dada converge e tem por soma

$$S = \frac{a}{1 - r} = \frac{1}{1 - (-x)} = \frac{1}{1 + x}$$

Logo, podemos escrever

$$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots$$

É uma representação de $f(x) = 1/(1 + x)$ no intervalo $(-1, 1)$.

Se uma função f é representada por uma série de potências de x, então

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

para todo x no intervalo de convergência da série. Como um polinômio em x é uma soma *finita* de termos da forma $a_n x^n$, não é de surpreender que f tenha propriedades análogas às das funções polinomiais. Em particular, no próximo teorema (enunciado sem demonstração), veremos que f tem uma derivada f' cuja representação por série de potências se obtém diferenciando cada termo da série de f. Da mesma forma, obtêm-se integrais definidas de $f(x)$ integrando termo a termo a série $\sum a_n x^n$. No enunciado do teorema, note que, para o $n^{\text{ésimo}}$ termo $a_n x^n$ da série, temos

$$D_x (a_n x^n) = n a_n x^{n-1} \quad \text{e}$$

$$\int_0^x a_n t^n \, dt = \left[a_n \frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^x = a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Teorema (11.40)

Suponhamos que uma série de potências $\sum a_n x^n$ tenha raio de convergência $r > 0$, e seja f definida por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

para todo x no intervalo de convergência. Se $-r < x < r$, então

(i) $f(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

(ii) $\int_0^x f(t)\, dt = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \ldots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

A série obtida por diferenciação em (i) ou integração em (ii) do Teorema (11.40) tem o mesmo raio de convergência de $\sum a_n x^n$. Entretanto, a convergência nos extremos $x = r$ e $x = -r$ do intervalo pode se modificar. Esses números exigem investigação especial.

Como corolário do Teorema (11.40)(i), *uma função representada por uma série de potências em um intervalo* $(-r, r)$ *é contínua em todo* $(-r, r)$ (ver Teorema 3.11). Resultados análogos valem para funções representadas por séries de potências da forma $\sum a_n (x - c)^n$.

EXEMPLO 2

Use a representação em série de potências de $1 / (1 + x)$ para obter uma representação por série de

$$\frac{1}{(1+x)^2} \text{ se } |x| < 1$$

SOLUÇÃO

Do Exemplo 1,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots \text{ se } |x| < 1$$

Diferenciando cada termo da série, então, pelo Teorema (11.40)(i),

$$-\frac{1}{(1+x)^2} = -1 + 2x - 3x^2 - \ldots + (-1)^n n x^{n-1} + \ldots$$

Conforme Teorema (11.20)(ii), podemos multiplicar ambos os membros por -1, obtendo

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - \ldots + (-1)^{n+1} n x^{n-1} + \ldots$$

EXEMPLO 3

Ache uma representação em série de potências para $\ln(1+x)$ se $|x| < 1$.

SOLUÇÃO

Se $|x| < 1$, então

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt$$

$$= \int_0^x [1 - t + t^2 - \ldots + (-1)^n t^n + \ldots]\,dt$$

onde a última igualdade decorre do Exemplo 1. Pelo Teorema (11.40)(ii), podemos integrar cada termo da série como segue:

$$\ln(1+x) = \int_0^x dt - \int_0^x t\,dt + \int_0^x t^2\,dt - \ldots + (-1)^n \int_0^x t^n\,dt + \ldots$$

$$= \left[t\right]_0^x - \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x + \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x - \ldots + (-1)^n \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^x + \ldots$$

Logo,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots$$

se $|x| < 1$.

EXEMPLO 4

Use os resultados do Exemplo 3 para calcular $\ln(1,1)$ com cinco casas decimais.

SOLUÇÃO

No Exemplo 3 obtivemos uma representação por série para $\ln(1+x)$, se $|x| < 1$. Substituindo x por 0,1 naquela série temos a série alternada

$$\ln(1,1) = 0,1 - \frac{(0,1)^2}{2} + \frac{(0,1)^3}{3} - \frac{(0,1)^4}{4} + \frac{(0,1)^5}{5} - \ldots$$

$$\approx 0,1 - 0,005 + 0,000333 - 0,000025 + 0,000002 - \ldots$$

Somando os cinco primeiros termos à direita e arredondando para cinco casas decimais obtemos

$$\ln(1,1) \approx 0,09531$$

Pelo Teorema (11.31), o erro E é no máximo igual ao valor absoluto 0,000002 do quinto termo da série; portanto, o número 0,09531 tem precisão de cinco casas decimais.

EXEMPLO 5

Ache uma representação por série de potências para arctg x.

SOLUÇÃO

Notemos primeiro que

$$\text{arctg } x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

Em seguida, se $|t| < 1$, então, pelo Teorema (11.15)(i) com $a = 1$ e $r = -t^2$,

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \ldots + (-1)^n t^{2n} + \ldots$$

Pelo Teorema (11.40)(ii), podemos integrar cada termo da série de 0 a x, obtendo

$$\text{arctg } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

desde que $|x| < 1$. Pode-se mostrar que esta representação por série é válida também se $|x| = 1$.

No próximo teorema obtemos uma representação em série de potências para e^x.

Teorema (11.41) Se x é um número real,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

DEMONSTRAÇÃO

Já tratamos da série acima no Exemplo 2 da seção precedente, onde verificamos que ela é absolutamente convergente para todo número real x. Denotando por f a função representada pela série,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Aplicando o Teorema (11.40)(i), obtemos

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots;$$

isto é

$$f'(x) = f(x) \text{ para todo } x.$$

Se, no Teorema (7.33), fizermos $y = f(t)$, $t = x$ e $c = 1$, obteremos

$$f(x) = f(0)e^x$$

Mas

$$f(0) = 1 + 0 \frac{0^2}{2!} + \ldots + \frac{0^n}{n!} + \ldots = 1$$

e então $$f(x) = e^x$$

que é o que queríamos provar.

Note que o Teorema (11.41) nos permite expressar o número e como a soma de uma série convergente de termos positivos,

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

Por meio de substituições algébricas, podemos usar a representação em série de potências de uma função, para obter representação análoga para outras funções relacionadas. Assim, pelo Teorema (11.41), se x é um número real,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Para obter a representação de e^{-x} em série de potências, basta substituir x por $-x$:

$$e^{-x} = 1 + (-x) + \frac{(-x)^2}{2!} + \frac{(-x)^3}{3!} + \ldots + \frac{(-x)^n}{n!} + \ldots$$

ou $$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Pelo Teorema (11.20)(i), podemos somar os termos correspondentes das séries de e^x e e^{-x}, obtendo

$$e^x + e^{-x} = 2 + 2 \cdot \frac{x^2}{2!} + 2 \cdot \frac{x^4}{4!} + \ldots + 2 \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

(Note que as potências ímpares de x se cancelam.) Estamos agora em condições de achar uma série de potências para $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ multiplicando por $\frac{1}{2}$ cada termo da última série (ver Teorema (11.20)(ii). Assim,

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

Poderíamos achar uma representação em série de potências para $\operatorname{senh} x$ utilizando $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ ou diferenciando cada termo da série de $\cosh x$. Fica como exercício mostrar que

$$\operatorname{senh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

EXEMPLO 6

Ache uma representação de xe^{-2x} em série de potências.

SOLUÇÃO

Primeiro substituímos x por $-2x$ no Teorema (11.41):

$$e^{-2x} = 1 + (-2x) + \frac{(-2x)^2}{2!} + \frac{(-2x)^3}{3!} + \ldots + \frac{(-2x)^n}{n!} + \ldots$$

ou $$e^{-2x} = 1 - 2x + (2^2)\frac{x^2}{2!} - (2^3)\frac{x^3}{3!} + \ldots + (-2)^n \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Multiplicando ambos os membros por x, obtemos

$$xe^{-2x} = x - 2x^2 + (2^2)\frac{x^3}{2!} - (2^3)\frac{x^4}{3!} + \ldots + (-2)^n \frac{x^{n+1}}{n!} + \ldots$$

que pode escrever-se como

$$xe^{-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n \frac{x^{n+1}}{n!}$$

EXEMPLO 7

Obtenha uma aproximação de $\int_0^{0,1} e^{-x^2}\,dx$.

SOLUÇÃO

Não podemos aplicar o teorema fundamental ao cálculo da integral, porque não conhecemos uma antiderivada de e^{-x^2}. Embora pudéssemos utilizar a regra do trapézio, ou a regra de Simpson, o método seguinte é mais simples e, além disso, proporciona maior grau de precisão, com uma soma de apenas dois termos. Fazendo $x = -t^2$ no Teorema (11.41), obtemos

$$e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!} + \ldots$$

para todo t. Aplicando o Teorema (11.40)(ii), obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^{0,1} e^{-x^2}\,dx &= \int_0^{0,1} e^{-t^2}\,dt \\ &= \left[t\right]_0^{0,1} - \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{0,1} + \left[\frac{t^5}{10}\right]_0^{0,1} - \ldots \\ &= 0,1 - \frac{(0,1)^3}{3} + \frac{(0,1)^5}{10} - \ldots\end{aligned}$$

Tomando os dois primeiros termos para aproximar a soma desta série alternada convergente, então, pelo Teorema (11.31), o erro é inferior ao terceiro termo $(0,1)^5/10 = 0,000001$. Logo

$$\int_0^{0,1} e^{-x^2}\,dx \approx 0,1 - \frac{0,001}{3} \approx 0,09967$$

com precisão de cinco casas decimais.

O método aplicado no Exemplo 7 é preciso porque os números do intervalo $[0, 0,1]$ estão próximos de 0. A precisão já seria menor (com o mesmo número de termos na série) se, por exemplo, os limites de integração fossem 3 e 3,1.

Até aqui os métodos utilizados para obter representações de funções por séries de potências têm sido *indiretos*, no sentido de que partimos de séries conhecidas e então diferenciamos ou integramos. Na próxima seção estudaremos um método *direto* para achar a representação por séries de potências de uma grande variedade de funções.

EXERCÍCIOS 11.7

Exercs. 1-4: (a) Desenvolva $f(x)$ em série de potências. (b) Use o Teorema (11.40) para representar $f'(x)$ e $\int_0^x f(t)\,dt$ em série de potências.

1 $f(x) = \dfrac{1}{1 - 3x}$, $|x| < \frac{1}{3}$

2 $f(x) = \dfrac{1}{1 + 5x}$, $|x| < \frac{1}{5}$

3 $f(x) = \dfrac{1}{2 + 7x}$, $|x| < \frac{2}{7}$

4 $f(x) = \dfrac{1}{3 - 2x}$, $|x| < \frac{3}{2}$

Exercs. 5-10: Ache uma série de potências de x que tenha a soma dada, e determine o raio de convergência. (*Sugestão*: Use (11.15), (11.40) ou divisão, conforme necessário.)

5 $\dfrac{x^2}{1 - x^2}$ 6 $\dfrac{x}{1 - x^4}$

7 $\dfrac{x}{2 - 3x}$ 8 $\dfrac{x^3}{4 - x^3}$

9 $\dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$ 10 $\dfrac{x^2 - 3}{x - 2}$

11 (a) Prove que

$$\ln(1 - x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \text{ se } |x| < 1.$$

(b) Use a série de (a) para aproximar ln (1,2) com três casas decimais e compare o resultado com o valor obtido por uma calculadora.

12 Use os três primeiros termos da série do Exercício 11(a) para aproximar ln (0,9), e compare o resultado com o valor obtido numa calculadora.

13 Use o Exemplo 5 para provar que

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^n(2n+1)}$$

14 (a) Aproxime $\pi/4$ usando os cinco primeiros termos da série do Exemplo 5.

(b) Estime o erro na aproximação obtida em (a).

Exercs. 15-26: Represente $f(x)$ por uma série de potências, usando os resultados desta seção.

15 $f(x) = xe^{3x}$ 16 $f(x) = x^2 e^{(x^3)}$

17 $f(x) = x^3 e^{-x}$ 18 $f(x) = xe^{-3x}$

19 $f(x) = x^2 \ln(1 + x^2)$, $|x| < 1$

20 $f(x) = x \ln(1 - x)$, $|x| < 1$

21 $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{x}$, $|x| < 1$

22 $f(x) = x^4 \operatorname{arctg}(x^4)$, $|x| < 1$

23 $f(x) = \operatorname{senh}(-5x)$ 24 $f(x) = \operatorname{senh}(x^2)$

25 $f(x) = x^2 \cosh(x^3)$ 26 $f(x) = \cosh(-2x)$

Exercs. 27-32: Aproxime a integral, com quatro casas decimais, por uma série infinita.

27 $\int_0^{1/3} \dfrac{1}{1 + x^6}\,dx$ 28 $\int_0^{1/2} \operatorname{arctg} x^2\,dx$

29 $\int_{0,1}^{0,2} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$ 30 $\int_0^{0,2} \dfrac{x^3}{1 + x^5}\,dx$

31 $\int_0^1 e^{-x^2/10}\,dx$ 32 $\int_0^{0,5} e^{-x^3}\,dx$

33 Use a série de potências de $(1 - x^2)^{-1}$ para obter uma representação em série de $2x(1 - x^2)^{-2}$.

34 Use o método do Exemplo 3 para obter uma representação em série de ln $(3 + 2x)$.

35 Ref. Exercício 37 da Seção 11.6. Use o Teorema (11.40) para provar o seguinte:

(a) Se $J_0(x)$ e $J_1(x)$ são funções de Bessel de primeira espécie de ordens 0 e 1, então

$$D_x J_0(x) = -J_1(x)$$

(b) Se $J_2(x)$ e $J_3(x)$ são funções de Bessel de primeira espécie de ordens 2 e 3, então

$$\int x^3 J_2(x)\, dx = x^3 J_3(x) + C$$

36 A luz é absorvida em hastes e cones na retina do olho. O número de fótons absorvidos por um fotoreceptor durante um lampejo é regido pela *distribuição de Poisson*. Mais precisamente, a probabilidade p_n de um fotoreceptor absorver exatamente n fótons é dada por $p_n = e^{-\lambda}\lambda^n/n!$ para $\lambda > 0$.

(a) Mostre que $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$.

(b) A visão ocorre usualmente quando dois ou mais fótons são absorvidos pelo fotoreceptor. Mostre que a probabilidade desta ocorrência é $1 - e^{-\lambda}(\lambda + 1)$.

Exercs. 37-38: Represente $f(x)$ por uma série de potências. (Denotando o integrando por $g(t)$, suponha que $g(0) = \lim_{t \to 0} g(t)$.)

37 $f(x) = \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\, dt$

38 $f(x) = \int_0^x \frac{e^t - 1}{t}\, dt$

11.8 SÉRIES DE MACLAURIN E DE TAYLOR

Na seção precedente estudamos séries de potências para várias funções especiais, inclusive as em que $f(x)$ tem a forma

$$\frac{1}{1+x},\ \ln(1+x),\ \text{arctg}\ x,\ e^x,\ \text{ou}\ \cosh x$$

desde que x seja convenientemente restrito. Abordaremos agora as duas questões gerais seguintes:

Questão 1: Se uma função f admite uma representação em série de potências

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{ou} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n,$$

qual é a forma de a_n?

Questão 2: Que condições são suficientes para que uma função f admita uma representação em série de potências?

Comecemos com a questão 1. Suponhamos que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots$$

e que o raio de convergência da série seja $r > 0$. Pelo Teorema (11.40)(i), pode-se obter uma representação de $f'(x)$ em série de potências diferenciando termo a termo a série de $f(x)$. Podemos, então, obter uma série para $f''(x)$ diferenciando termo a termo a série de $f'(x)$. Obtêm-se de maneira análoga séries para $f'''(x)$, $f^{(4)}(x)$ etc. Assim,

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$f''(x) = 2a_2 + (3\cdot 2)a_3 x + (4\cdot 3)a_4 x^2 + \ldots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

$$f'''(x) = (3\cdot 2)a_3 + (4\cdot 3\cdot 2)a_4 x + \ldots = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)a_n x^{n-3}$$

e, para todo inteiro positivo k,

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-k+1)a_n x^{n-k}$$

Cada série obtida por diferenciação tem o mesmo raio de convergência que a série de $f(x)$. Substituindo x por 0 em cada uma dessas séries, obtemos

$$f(0) = a_0, f'(0) = a_1, f''(0) = 2a_2, f'''(0) = (3\cdot 2)a_3,$$

e, para todo inteiro positivo k,

$$f^{(k)}(0) = k(k-1)(k-2)\ \ldots\ (1)a_k$$

Fazendo $k = n$,

$$f^{(n)}(0) = n!\, a_n$$

Resolvendo as equações anteriores em relação a $a_0, a_1, a_2, \ldots$, vemos que

$$a_0 = f(0),\ a_1 = f'(0),\ a_2 = \frac{f''(0)}{2},\ a_3 = \frac{f'''(0)}{3\cdot 2}\cdot 2,$$

e, em geral,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Provamos que a série de potências para $f(x)$ tem a forma indicada no próximo teorema. Chama-se *série de Maclaurin para* $f(x)$, em referência ao matemático escocês Colin Maclaurin (1698-1746).

Série de Maclaurin para $f(x)$ (11.42)

Se uma função f admite uma representação em série de potências

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

com raio de convergência $r > 0$, então $f^{(k)}(0)$ existe para todo inteiro positivo k e $a_n = f^{(n)}(0)/n!$. Assim,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

Empregando o tipo de demonstração usado para (11.42), temos o próximo teorema. Se $c \neq 0$, designamos a série como *série de Taylor de $f(x)$ em c*, homenageando o matemático inglês Brook Taylor (1685-1731).

Série de Taylor para $f(x)$ (11.43)

Se uma função f admite uma representação em série de potências

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n$$

com raio de convergência $r > 0$, então $f^{(k)}(c)$ existe para todo inteiro positivo k e $a_n = f^{(n)}(c)/n!$. Assim,

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n + \ldots$$

Note que, para o caso especial $c = 0$, a série de Taylor se reduz à série de Maclaurin. Utilizando a convenção $f^{(0)}(c) = f(c)$, então as séries de Maclaurin e de Taylor para f podem escrever-se em notação de somatório como segue:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \quad \text{e} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n$$

EXEMPLO 1

Pelo Teorema (11.41), e^x admite o seguinte desenvolvimento em série de potências:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots$$

Verifique que se trata de uma série de Maclaurin.

SOLUÇÃO

Se $f(x) = e^x$, então a derivada de ordem n de f é $f^{(n)}(x) = e^x$ e

$$f^{(n)}(0) = e^0 = 1 \qquad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Logo, a série de Maclaurin (11.42) é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots,$$

que é a própria série dada.

Os teoremas (11.42) e (11.43) implicam que, *se* uma função f admite uma representação em séries de potências de x ou $x - c$, então a série *deve* ser uma série de Maclaurin ou uma série de Taylor, respectivamente. Todavia, os teoremas *não* respondem à questão 2 proposta no início desta seção: Que condições garantem a existência de um desenvolvimento de uma função em série de potências? Obteremos tais condições a seguir, para qualquer série em $x - c$ (incluindo $c = 0$). Começamos com a seguinte definição.

Definição (11.44)

Sejam c um número real e f uma função dotada de n derivadas em c: $f'(c), f''(c), \ldots, f^{(n)}(c)$. O **polinômio de grau n de Taylor $P_n(x)$** de f em c é

$$P_n(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n.$$

Em notação de somatório,

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x - c)^k$$

Se $c = 0$ em (11.44), $P_n(x)$ é o **polinômio de Maclaurin de grau n de f.** Note que $P_n(x)$ em (11.44) é a $(n + 1)^a$ soma parcial da série de Taylor (11.43). Fazendo $c = 0$, $P_n(x)$ é a $(n + 1)^a$ soma parcial da série de Maclaurin (11.42). O próximo resultado proporciona uma resposta à questão 2.

Fórmula de Taylor com resto (11.45)

Seja f dotada de $n+1$ derivadas em um intervalo que contém c. Se x é um número diferente de c no intervalo, então existe um número z entre c e x tal que

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x), \text{ onde } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

DEMONSTRAÇÃO

Se x é um número arbitrário, diferente de c, no intervalo, *definamos* $R_n(x)$ como segue:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

Esta equação pode ser escrita como

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

Tudo o que devemos mostrar é que, para um número conveniente z, $R_n(x)$ tem a forma indicada na conclusão do teorema.

Se t é um número arbitrário no intervalo, seja g a função definida por

$$g(t) = f(x) - \left[f(t) + f'(t)(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n \right] - R_n(x)\frac{(x-t)^{n+1}}{(x-c)^{n+1}}$$

Diferenciando cada membro da equação *em relação a* t (considerando x como constante), então muitos termos no membro direito se cancelam. Você poderá verificar que

$$g'(t) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + R_n(x) \cdot (n+1)\frac{(x-t)^n}{(x-c)^{n+1}}$$

Pela fórmula de $g(t)$, vê-se que $g(x) = 0$. Vê-se também que

$$\begin{aligned} g(c) &= f(x) - \left[P_n(x)\right] - R_n(x)\frac{(x-c)^{n+1}}{(x-c)^{n+1}} \\ &= f(x) - P_n(x) - R_n(x) \\ &= f(x) - [P_n(x) + R_n(x)] \\ &= f(x) - f(x) = 0 \end{aligned}$$

Logo, pelo teorema de Rolle, existe um número z entre c e x tal que $g'(z) = 0$, isto é,

$$-\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n + R_n(x) \cdot (n+1)\frac{(x-z)^n}{(x-c)^{n+1}} = 0$$

Resolvendo em relação a $R_n(x)$, obtemos

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

conforme queríamos provar.

Se $c = 0$, referimo-nos ao Teorema (11.45) como **fórmula de Maclaurin com resto.** A expressão $R_n(x)$ obtida neste teorema é chamada **resto da fórmula de Taylor de f em c.** Se $c = 0$, $R_n(x)$ é o **resto da fórmula de Maclaurin de f.** O próximo teorema nos dá condições suficientes para a existência de desenvolvimento de uma função f em série de potências.

Teorema (11.46)

Seja f dotada de derivadas de todas as ordens em um intervalo que contém c, e seja $R_n(x)$ o resto de Taylor de f em c. Se

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

para todo x no intervalo, então $f(x)$ é representada pela série de Taylor para $f(x)$ em c.

DEMONSTRAÇÃO

O polinômio de Taylor $P_n(x)$ é o $(n+1)^{\text{mo}}$ termo da seqüência de somas parciais da série de Taylor de $f(x)$ em c. Pelo Teorema (11.45), $P_n(x) = f(x) - R(x)$, e então

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = \lim_{n\to\infty} f(x) - \lim_{n\to\infty} R_n(x) = f(x) - 0 = f(x)$$

Assim, a seqüência de somas parciais converge para $f(x)$, o que prova o Teorema.

No Exemplo 2 da Seção 11.6 provamos que a série de potências $\sum x^n/n!$ é absolutamente convergente para todo real x. Como o n^{mo} termo de uma série convergente deve tender para 0 quando $n \to \infty$ (ver Teorema (11.16)), obtemos o resultado seguinte.

Teorema (11.47)

Se x é um número real arbitrário

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0$$

Utilizaremos o Teorema (11.47) na solução do exemplo seguinte.

EXEMPLO 2

Estabeleça uma série de Maclaurin para sen x, e prove que ela representa sen x para todo real x.

SOLUÇÃO

Disponhamos nosso trabalho como segue:

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{sen} x & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \cos x & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= -\operatorname{sen} x & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= -\cos x & f'''(0) &= -1 \end{aligned}$$

As derivadas sucessivas seguem este mesmo padrão. A substituição em (11.45) nos dá a seguinte série de Maclaurin:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

A esta altura, tudo o que sabemos é que, *se* sen x pode ser representada por uma série de potências de x, então ela é a série precedente. Para mostrar que sen x é efetivamente representada por esta série de Maclaurin, apliquemos o Teorema (11.46) com $c = 0$. Se n é um inteiro positivo, então ou

$$\left|f^{(n+1)}(x)\right| = |\cos x| \quad \text{ou} \quad |f^{(n+1)}(x)| = |\operatorname{sen} x|$$

Logo, $|f^{(n+1)}(z)| \leq 1$ para todo z. Utilizando a fórmula de $R_n(x)$ do Teorema (11.45), com $c = 0$, obtemos

$$|R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Decorre do teorema (11.47) e do teorema do "sanduíche" (11.7) que $\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0$. Conseqüentemente, $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, e a representação de sen x em série de Maclaurin é válida para todo x.

EXEMPLO 3

Obtenha a série de Maclaurin para cos x.

SOLUÇÃO

Poderíamos proceder diretamente, como no Exemplo 2. Vamos, entretanto, obter a série de cos x diferenciando termo a termo a série de sen x obtida no Exemplo 2. Temos:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

No Teorema (11.41) obtivemos a série de Maclaurin para e^x por uma técnica indireta (ver também Exemplo 1 desta secção). A seguir, deduziremos diretamente esta importante fórmula.

EXEMPLO 4

Determine a série de Maclaurin que represente e^x para todo número real x.

SOLUÇÃO

Se $f(x) = e^x$, então $f^{(k)}(x) = e^x$ para todo inteiro positivo k. Logo, $f^{(k)}(0) = 1$, e a substituição em (11.42) dá

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Tal como na solução do Exemplo 2, empregaremos agora o Teorema (11.46) para provar que esta representação de e^x por série de potências é verdadeira para todo número real x. Utilizando a fórmula de $R_n(x)$ com $c = 0$, obtemos

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{e^z}{(n+1)!}x^{n+1}$$

onde z é um número entre 0 e x. Se $0 < x$, então $e^z < e^x$, já que a função exponencial natural é crescente e, então, para todo inteiro positivo n,

$$0 < R_n(x) < \frac{e^x}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Pelo Teorema (11.47),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^x}{(n+1)!}x^{n+1} = e^x \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

e pelo teorema do "sanduíche" (11.7),

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

Se $x < 0$, então $z < 0$ e, então, $e^z < e^0 = 1$. Conseqüentemente,

$$0 < |R_n(x)| < \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|$$

e novamente vemos que $R_n(x)$ tem por limite 0 quando $n \to \infty$. Decorre do Teorema (11.46) que a representação de e^x em série de potências é válida para todo x diferente de zero. Note, finalmente, que, se $x = 0$, então a série se reduz a $e^0 = 1$.

EXEMPLO 5

Determine a série de Taylor para sen x em potências de $x - (\pi/6)$.

SOLUÇÃO

As derivadas de $f(x) = \text{sen } x$ estão calculadas no Exemplo 2. Calculando-as em $c = \pi/6$, obtemos

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}, f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}, f'''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

este padrão se repete de quatro em quatro números, indefinidamente. A substituição em (11.45) nos dá

$$\text{sen } x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2(2)!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{2(3)!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3 + \dots$$

O $n^{\text{ésimo}}$ termo u_n desta série é dado por

$$u_n = \begin{cases} (-1)^{n/2}\dfrac{1}{2(n!)}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)^n & \text{se } n = 0, 2, 4, 6, \dots \\ (-1)^{(n-1)/2}\dfrac{\sqrt{3}}{2(n!)}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)^n & \text{se } n = 1, 3, 5, 7, \dots \end{cases}$$

A prova de que a série representa sen x para todo x é análoga à dada no Exemplo 2; iremos omiti-la, portanto.

O próximo exemplo evidencia o fato de que uma função f pode ter derivadas de todas as ordens em algum ponto c e, mesmo assim, não admitir uma representação em série de Taylor naquele ponto. Isto nos mostra que se exige uma condição adicional, tal como $\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$, para garantir a existência da série de Taylor.

EXEMPLO 6

Seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Mostre que $f(x)$ não pode ser representada por uma série de Taylor.

SOLUÇÃO

Pela Definição (3.6), a derivada de f em 0 é

$$f'(0) = \lim_{x \to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0}\frac{e^{-1/x^2}}{x} = \lim_{x \to 0}\frac{(1/x)}{e^{1/x^2}}.$$

A última expressão toma a forma indeterminada ∞/∞. Aplicando a regra de l'Hôpital (10.2), vemos que

$$f'(0) = \lim_{x \to 0}\frac{(-1/x^2)}{(-2/x^3)e^{1/x^2}} = \lim_{x \to 0}\frac{x}{2e^{1/x^2}} = 0.$$

Pode-se provar que $f''(0) = 0, f'''(0) = 0$ e, em geral, $f^{(n)}(0) = 0$ para todo inteiro positivo n. De acordo com o Teorema (11.42), se $f(x)$ admite uma representação em série de Maclaurin, então ela é dada por

$$f(x) = 0 + 0x + \frac{0}{2!}x^2 + \dots + \frac{0}{n!}x^n + \dots$$

o que implica que $f(x) = 0$ em todo um intervalo que contém 0. Mas isto contradiz a definição de f. Conseqüentemente, $f(x)$ não admite representação em série de Maclaurin.

Como subproduto do Exemplo 6, decorre do Teorema (11.46) que, para a função f dada, $\lim_{n \to \infty} R_n(x) \neq 0$ em $c = 0$.

Para referência, relacionamos a seguir as séries de Maclaurin obtidas em exemplos nesta seção e na Seção 11.7. Estas séries são de grande importância por sua utilização em matemática avançada e aplicações.

Séries de Maclaurin importantes (11.48)

SÉRIE DE MACLAURIN	INTERVALO DE CONVERGÊNCIA
(a) $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$	$(-\infty, \infty)$
(b) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$	$(-\infty, \infty)$
(c) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$	$(-\infty, \infty)$
(d) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots$	$(-1, 1]$
(e) $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$	$[-1, 1]$
(f) $\operatorname{senh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$	$(-\infty, \infty)$
(g) $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$	$(-\infty, \infty)$

É possível utilizar séries de Maclaurin ou de Taylor para obter aproximações de valores de funções e integrais definidas, conforme ilustrado nos dois próximos exemplos.

EXEMPLO 7

Use os dois primeiros termos não-nulos de uma série de Maclaurin para aproximar

(a) sen (0,1)

(b) sen x para x real, não-nulo, em $[-1, 1]$ e estime o erro na aproximação.

SOLUÇÃO

(a) Fazendo $x = 0{,}1$ na série de Maclaurin para sen x (ver (11.48)(a)), obtemos

$$\operatorname{sen}(0{,}1) = 0{,}1 - \frac{0{,}001}{6} + \frac{0{,}00001}{120} - \ldots$$

Pelo Teorema (11.31), o erro cometido ao aproximarmos sen (0,1) pelos dois primeiros termos desta série alternada é inferior ao terceiro termo, $0{,}00001/120 \approx 0{,}00000008$. Com seis casas decimais,

$$\operatorname{sen}(0{,}1) \approx 0{,}1 - \frac{0{,}001}{6} \approx 0{,}099833$$

(b) Com os dois primeiros termos de (11.48)(a), obtemos a fórmula de aproximação

$$\operatorname{sen} x \approx x - \frac{x^3}{6}$$

Pelo Teorema (11.31), o erro cometido ao utilizarmos esta fórmula para um número real x é inferior a $|x^5|/5!$.

EXEMPLO 8

Obtenha uma aproximação de $\int_0^1 \operatorname{sen}(x^2)\,dx$ com quatro casas decimais.

SOLUÇÃO

Substituindo x por x^2 em (11.48)(a), obtemos

$$\operatorname{sen}(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \ldots$$

Integrando cada termo da série, obtemos

$$\int_0^1 \operatorname{sen}(x^2)\,dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1.320} - \frac{1}{75.600} + \ldots$$

Somando os três primeiros termos,

$$\int_0^1 \operatorname{sen}(x^2)\,dx \approx 0{,}31028$$

Pelo Teorema (11.31), o erro é inferior a $\frac{1}{75.600} \approx 0{,}00001$.

Note que, no exemplo precedente, obtivemos uma precisão de quatro casas decimais somando apenas *três* termos da série integrada de sen (x^2). Para obter este grau de precisão por meio da regra de Simpson ou da regra do trapézio, seria necessário tomar um grande valor de n para o intervalo $[0, 1]$. Entretanto, se o intervalo fosse $[10, 11]$, a eficiência de cada método seria bem diferente. Isto traz à baila um ponto importante. Para aplicações numéricas, além de analisarmos um de-

terminado problema, devemos também procurar o método mais eficaz para calcular a resposta.

Para obter uma representação de uma função f em série de Taylor ou Maclaurin, é necessário achar uma fórmula geral para $f^{(n)}(x)$ e, além disso, investigar $\lim_{n\to\infty} R_n(x)$. Em razão disto, restringimos nossos exemplos a expressões como sen x, cos x e e^x. O método não pode ser usado, por exemplo, se $f(x)$ é tg x ou arc sen x, porque $f^{(n)}(x)$ se torna muito complicada quando n aumenta. A maioria dos exercícios a seguir se baseia em funções cujas derivadas de ordem n podem ser facilmente determinadas, ou em representações por série já estabelecidas. Em casos mais complicados, restringiremos nossa atenção apenas aos primeiros termos da série de Taylor ou de Maclaurin.

EXERCÍCIOS 11.8

Exercs. 1-6: Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, determine a_n usando a fórmula (11.42) para a_n.

1 $f(x) = e^{3x}$ 2 $f(x) = e^{-2x}$

3 $f(x) = \operatorname{sen} 2x$ 4 $f(x) = \cos 3x$

5 $f(x) = \dfrac{1}{1+3x}$ 6 $f(x) = \dfrac{1}{1-2x}$

7 Seja $f(x) = \cos x$.

(a) Use o método do Exemplo 2 para provar que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

(b) Use (11.42) para obter uma série de Maclaurin para $f(x)$.

8 Seja $f(x) = e^{-x}$.

(a) Use o método do Exemplo 4 para provar que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

(b) Use (11.42) para obter uma série de Maclaurin para $f(x)$.

Exercs. 9-14: Use a série de Maclaurin obtida nesta seção para achar uma série de Maclaurin para $f(x)$.

9 $f(x) = x \operatorname{sen} 3x$ 10 $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$

11 $f(x) = \cos(-2x)$ 12 $f(x) = \cos(x^2)$

13 $f(x) = \cos^2 x$ (*Sugestão*: Use a fórmula do ângulo metade.)

14 $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$

Exercs. 15-16: Estabeleça uma série de Maclaurin para $f(x)$. (Não é preciso verificar que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.)

15 $f(x) = 10^x$ 16 $f(x) = \ln(3+x)$

Exercs. 17-20: Ache uma série de Taylor para $f(x)$ em c. (Não é preciso verificar que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.)

17 $f(x) = \operatorname{sen} x;\ c = \pi/4$ 18 $f(x) = \cos x;\ c = \pi/3$

19 $f(x) = 1/x;\ c = 2$ 20 $f(x) = e^x;\ c = -3$

21 Estabeleça uma representação em série para e^{2x} em potências de $x + 1$.

22 Represente $\ln x$ em série de potências de $x - 1$.

Exercs. 23-28: Ache os três primeiros termos da série de Taylor de $f(x)$ em c.

23 $f(x) = \sec x;\ c = \pi/3$

24 $f(x) = \operatorname{tg} x;\ c = \pi/4$

25 $f(x) = \operatorname{arcsen} x;\ c = \frac{1}{2}$

26 $f(x) = \operatorname{arctg} x;\ c = 1$

27 $f(x) = xe^x;\ c = -1$

28 $f(x) = \operatorname{csc} x;\ c = 2\pi/3$

Exercs. 29-38: Use os dois primeiros termos não-nulos de uma série de Maclaurin para aproximar o número e estime o erro na aproximação.

29 $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ 30 $\dfrac{1}{e}$ 31 cos 3°

32 sen 1° 33 arctg 0,1 34 ln 1,5

35 $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ 36 $\int_0^{1/2} x \cos(x^3)\,dx$

37 $\int_0^{0,5} \cos(x^2)\,dx$ 38 $\int_0^{0,1} \operatorname{arctg}(x^2)\,dx$

Exercs. 39-42: Aproxime a integral imprópria com quatro decimais. (Suponha que, se o integrando é $f(x)$, então $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$.)

39 $\int_0^1 \dfrac{1-\cos x}{x^2}\,dx$ 40 $\int_0^1 \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$

41 $\int_0^{1/2} \dfrac{\ln(1+x)}{x}\,dx$ 42 $\int_0^1 \dfrac{1-e^{-x}}{x}\,dx$

Exercs. 43-44: (a) Seja $g(x)$ a soma dos dois primeiros termos não-nulos da série de Maclaurin para $f(x)$. Use $g(x)$ para aproximar $\int_0^1 f(x)\,dx$ e $\int_1^2 f(x)\,dx$. (b) Grafe, no mesmo sistema de eixos, f e g para $0 \le x \le 2$, e use então os gráficos para comparar a precisão das aproximações em (a).

43 $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ 44 $f(x) = \operatorname{senh} x$

45 Use (11.48) para obter uma série de Maclaurin para

$$f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x}$$

46 Use os cinco primeiros termos da série do Exercício 45 para calcular ln 2, e compare sua resposta com o valor dado por uma calculadora ou uma tábua.

47 (a) Use (11.48)(e) com $x = 1$ para representar π como a soma de uma série infinita.

(b) Que precisão se obtém usando os cinco primeiros termos da série para aproximar π?

(c) Aproximadamente quantos termos da série são necessários para garantir uma precisão de quatro casas decimais para π?

48 (a) Use a identidade

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$$

para exprimir π como soma de duas séries infinitas.

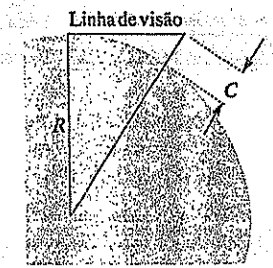
(b) Use os cinco primeiros termos de cada série em (a) para aproximar π e compare o resultado com o obtido no Exercício 47.

49 Ao planejar uma estrada através do deserto, o engenheiro deve fazer compensações para a curvatura da terra ao medir diferenças de elevações (ver figura abaixo).

(a) Se s é o comprimento da estrada e R é o raio da terra, mostre que a correção C é dada por $C = R\,[\sec(s/R) - 1)]$.

(b) Use a série de Maclaurin para sec x para mostrar que C é aproximadamente $s^2/(2R) + (5s^4)/(24R^3)$.

(c) O raio médio da terra é de 3.959 milhas (≈ 6.330 km). Estime a correção, a menos de 0,1 pé, para um trecho de 5 milhas da estrada.



50 A velocidade v de uma onda de água está relacionada com seu comprimento L e a profundidade h da água por

$$v^2 = \frac{gL}{2\pi}\operatorname{tgh}\frac{2\pi h}{L}$$

onde g é uma constante gravitacional.

(a) Mostre que $\operatorname{tgh} x \approx x - \frac{1}{3}x^3$ se $x \approx 0$.

(b) Use a aproximação $\operatorname{tgh} x \approx x$ para mostrar que $v^2 \approx gh$ se h/L é pequeno.

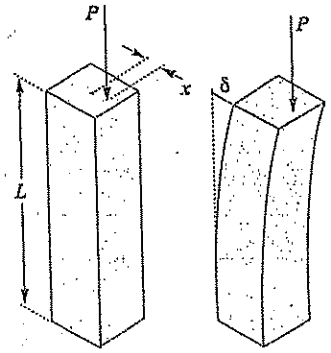
(c) Use a parte (a) e o fato de que a série de Maclaurin de $\operatorname{tgh} x$ é uma série alternada, para mostrar que, se $L > 2h$, então o erro cometido ao tomar $v^2 \approx gh$ é inferior a $0{,}002\,gL$.

51 Se uma grande força de P libras é aplicada a uma coluna de comprimento L em um ponto situado a x unidades à direita do centro (ver figura ao lado), a coluna tende a vergar. A deflexão horizontal δ pode ser expressa como

$$\delta = x(\sec kL - 1) \quad \text{com} \quad k = \sqrt{P/R},$$

onde R é uma constante chamada *rigidez flexural* do material e $0 \le kL < \pi/2$. Use o Exercício 49(b) para mostrar que $\delta \approx \frac{1}{2}PxL^2/R$ se P é pequeno.

52 Mostre que $\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6$ tem precisão de cinco casas decimais se $0 \le x \le \pi/4$.



11.9 APLICAÇÕES DOS POLINÔMIOS DE TAYLOR

No Exemplo 7(b) da seção precedente utilizamos os dois primeiros termos não-nulos da série de Maclaurin para sen x, para obter a fórmula aproximada

$$\operatorname{sen} x \approx x - \frac{x^3}{6}$$

Pela Definição (11.44), a expressão à direita desta fórmula é o polinômio de Taylor de terceiro grau $P_3(x)$ de sen x em $c = 0$. Assim, poderíamos escrever

$$\operatorname{sen} x \approx P_3(x)$$

Tomando mais termos da série de Maclaurin de sen x, obteríamos outras fórmulas de aproximação. Para ilustrar:

$$\operatorname{sen} x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} = P_5(x)$$

Pelo Teorema (11.31), o erro envolvido no uso desta fórmula é inferior a $|x^7|/7!$. Assim, a aproximação é muito precisa se x está próximo de 0.

Podemos aplicar este processo a qualquer função f que tenha um número suficiente de derivadas. Especificamente, se f verifica as hipóteses da fórmula de Taylor com resto (11.45), então

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

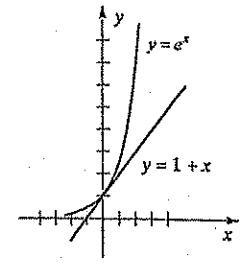


Figura 11.17

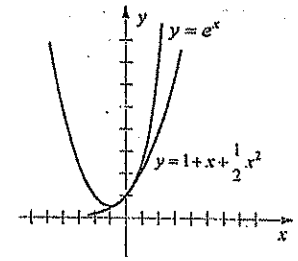


Figura 11.18

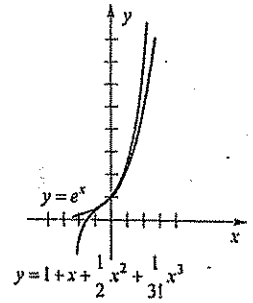


Figura 11.19

onde $P_n(x)$ é o polinômio de Taylor de grau n de f em c, e $R_n(x)$ é o resto de Taylor. Se $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, então, quando n aumenta, $P_n(x) \to f(x)$; logo, a fórmula de aproximação $f(x) \approx P_n(x)$ melhora à medida que n aumenta. Podemos, assim, obter valores aproximados de muitas funções transcendentes, utilizando funções polinomiais. Este fato se reveste de grande importância, porque as funções polinomiais são as funções mais simples para os cálculos – seus valores podem obter-se apenas por meio de adições e multiplicações de números reais.

Outra ilustração: Consideremos a função exponencial dada por $f(x) = e^x$. Por (11.48)(c), a série de Maclaurin e^x é

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Aproximando e^x por meio de polinômios de Taylor (com $c = 0$), obtemos

$$e^x \approx P_1(x) = 1 + x$$

$$e^x \approx P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$e^x \approx P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

etc. Estas fórmulas de aproximação são precisas somente se x está próximo de 0. Para aproximar e^x para valores maiores de x, podemos utilizar polinômios de Taylor com $c \neq 0$.

A precisão das três fórmulas de aproximação precedentes para e^x está ilustrada nos gráficos das funções P_1, P_2 e P_3 nas Figuras 11.17 a 11.19. É interessante notar que o gráfico de $y = P_1(x) = 1 + x$ na Figura 11.17 é a tangente ao gráfico de $y = e^x$ no ponto (0, 1). Você pode verificar que a parábola $y + P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ na Figura 11.18 tem a mesma tangente e a mesma concavidade que o gráfico de $y = e^x$ em (0, 1). O gráfico de $y = P_3(x)$ na Figura 11.19 tem a mesma tangente e concavidade em (0, 1), e também a mesma *taxa de variação de concavidade*, pois $P_3'''(0) = D_x^3 e^x]_{x=0}$. Em geral, pode-se mostrar que, para qualquer inteiro positivo n, $P_n^{(n)}(0) = D_x^n e^x]_{x=0}$. À medida em que n cresce sem limite, o gráfico da equação $y = P_n(x)$ mais e mais se assemelha ao gráfico de $y = e^x$.

$$y = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3$$

A tabela a seguir indica a precisão da fórmula de aproximação $e^x \approx P_3(x)$ para vários valores de x, a menos de um

centésimo. Se se desejasse maior precisão, poderíamos usar qualquer inteiro positivo n maior, obtendo

$$e^x \approx P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

Esta fórmula, notavelmente simples, permite obter aproximações de e^x com qualquer grau de precisão.

x	$-1,5$	$-1,0$	$-0,5$	0	0,5	1,0	1,5
e^x	0,22	0,37	0,61	1	1,65	2,72	4,48
$P_3(x)$	0,06	0,33	0,60	1	1,65	2,67	4,19

No restante desta seção, utilizaremos polinômios de Taylor para aproximar valores de funções que verificam as hipóteses da fórmula de Taylor com resto (11.45). Com a conclusão $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ daquele teorema, vemos que o erro envolvido ao aproximarmos $f(x)$ por $P_n(x)$ é

$$|f(x) - P_n(x)| = |R_n(x)|$$

O enunciado completo deste resultado é dado pelo próximo teorema.

Teorema (11.49)

Seja f dotada de $n+1$ derivadas em todo um intervalo que contém c. Se x é um número daquele intervalo e $x \neq c$, então o erro cometido ao aproximar $f(x)$ pelo polinômio de Taylor de grau n de f em c,

$$P_n(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

é inferior a $|R_n(x)|$, onde

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

e z é o número entre c e x dado por (11.45).

Nos dois próximos exemplos, utilizam-se polinômios de Taylor para aproximar valores de funções. Se estamos interessados em uma precisão de k casas decimais para aproximar uma soma, costumamos aproximar cada termo da soma com $k+1$ casas decimais, arredondando para k casas decimais o resultado final. Em certos casos, este processo pode não ter o grau de precisão desejado, mas é utilizado para aproximações elementares. Em livros de *análise numérica* encontram-se técnicas mais precisas.

EXEMPLO 1

Seja $f(x) = \ln x$.

(a) Determine $P_3(x)$ e $R_3(x)$ em $c = 1$.

(b) Aproxime ln 1,1 com quatro casas decimais utilizando $P_3(1,1)$, e use $R_3(1,1)$ para estimar o erro nesta aproximação.

SOLUÇÃO

(a) Tal como no Teorema (11.49), o polinômio geral de Taylor $P_3(x)$ e o resto de Taylor $R_3(x)$ em $c = 1$ são

$$P_3(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3$$

e

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(z)}{4!}(x-1)^4$$

onde z é um número entre 1 e x. Precisamos, assim, das quatro primeiras derivadas de f. Convém dispor nosso trabalho da seguinte maneira:

$$\begin{array}{ll} f(x) = \ln x & f(1) = 0 \\ f'(x) = x^{-1} & f'(1) = 1 \\ f''(x) = -x^{-2} & f''(1) = -1 \\ f'''(x) = 2x^{-3} & f'''(1) = 2 \\ f^{(4)}(x) = -6x^{-4} & f^{(4)}(z) = -6z^{-4} \end{array}$$

Substituindo em $P_3(x)$ e $R_3(x)$, obtemos

$$P_3(x) = 0 + 1(x-1) - \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3$$

e

$$R_3(x) = \frac{-6z^{-4}}{4!}(x-1)^4 = -\frac{1}{4z^4}(x-1)^4$$

onde z está entre 1 e x.

(b) Pela parte (a),

$$\ln 1,1 \approx P_3(1,1) = 0,1 - \tfrac{1}{2}(0,1)^2 + \tfrac{1}{3}(0,1)^3$$

ou $$\ln 1,1 \approx 0,0953$$

Para estimar o erro nesta aproximação, consideramos

$$|R_3(1,1)| = \left| -\frac{(0,1)^4}{4z^4} \right|, \text{ onde } 1 < z < 1,1$$

Como $z > 1$, $1/z < 1$ e, portanto, $1/z^4 < 1$. Conseqüentemente,

$$|R_3(1,1)| = \left| -\frac{(0,1)^4}{4z^4} \right| < \left| -\frac{0,0001}{4} \right| = 0,000025$$

Porque $0,000025 < 0,00005$, decorre do Teorema (11.49) que a aproximação $\ln 1,1 \approx 0,0953$ tem precisão de quatro casas decimais.

Se quisermos aproximar um valor funcional $f(x)$ para algum x, convém escolher o número c do Teorema (11.49) tal que o resto $R_n(x)$ esteja bem próximo de 0 quando n for relativamente pequeno (digamos, $n = 3$ ou $n = 4$). Isto será verdadeiro se escolhermos c próximo de x. Além disso, devemos escolher c de modo que os valores das $n + 1$ primeiras derivadas de f em c sejam fáceis de calcular. Foi o que fizemos no Exemplo 1, onde, para aproximar $\ln x$ para $x = 1,1$, escolhemos $c = 1$. O próximo exemplo constitui outra ilustração da escolha adequada de c.

EXEMPLO 2

Use um polinômio de Taylor para aproximar cos 61° e estime a precisão da aproximação.

SOLUÇÃO

Queremos aproximar $f(x) = \cos x$ se $x = 61°$. Notemos de início que 61° está próximo de 60°, ou $\pi/3$ radianos, e que é fácil calcular valores de funções trigonométricas em $\pi/3$. Isto sugere escolhermos $c = \pi/3$ em (11.49). A escolha de n dependerá do grau de precisão que queiramos atingir. Tentemos $n = 2$. Neste caso, são necessárias as três primeiras derivadas; dispomos nosso trabalho da seguinte maneira:

$$f(x) = \cos x \qquad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = -\operatorname{sen} x \qquad f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f''(x) = -\cos x \qquad f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$f'''(x) = \operatorname{sen} x \qquad f'''(z) = \operatorname{sen} z$$

UFPB/BIBLIOTECA/PRAI

Tal como no Teorema (11.49), o polinômio de Taylor de segundo grau de f em $c = \pi/3$ é

$$P_2(x) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\frac{1}{2}}{2!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2$$

Como x representa um número real, devemos converter 60° em radianos antes de substituir em $P_2(x)$. Escrevendo

$$61° = 60° + 1° = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180}$$

e substituindo, obtemos

$$P_2\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180}\right) = \frac{1}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\pi}{180}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{180}\right)^2 \approx 0,48481$$

e então

$$\cos 61° \approx 0,48481$$

Para estimar a precisão desta aproximação, consideramos

$$|R_2(x)| = \left| \frac{f'''(z)}{3!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 \right| = \left| \frac{\operatorname{sen} z}{3!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 \right|$$

onde z está entre $\pi/3$ e x. Fazendo $x = (\pi/3) + (\pi/180)$ e levando em conta o fato de que $|\operatorname{sen} z| \leq 1$, obtemos

$$\left| R_2\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180}\right) \right| = \left| \frac{\operatorname{sen} z}{3!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^3 \right| \leq \left| \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^3 \right| \leq 0,000001$$

Assim, pelo Teorema (11.49), a aproximação $\cos 61° \approx 0,48481$ tem precisão de cinco casas decimais. Se quisermos maior precisão, devemos determinar um valor de n tal que o valor máximo de $|R_n[(\pi/3) + (\pi/180)]|$ esteja dentro do intervalo desejado.

EXEMPLO 3

Se $f(x) = e^x$, use o polinômio de Taylor $P_9(x)$ de f em $c = 0$ para aproximar e, e estime o erro cometido na aproximação.

SOLUÇÃO

Para todo inteiro positivo k, $f^{(k)}(x) = e^x$, e, então, $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$. Assim, fazendo $n = 9$ e $c = 0$ no Teorema (11.49), obtemos

$$P_9(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^9}{9!}$$

e, portanto,

$$e \approx P_9(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{9!}$$

Isto nos dá $e \approx 2{,}71828153$.

Para estimar o erro, consideramos

$$R_9(x) = \frac{e^z}{10!}x^{10}$$

Se $x = 1$, então $0 < z < 1$. Utilizando os resultados do Capítulo 7 sobre e^x, temos $e^z < e^1 < 3$, e

$$|R_9(1)| = \left|\frac{e^z}{10!}(1)\right| < \frac{3}{10!} < 0{,}000001$$

Logo, a aproximação $e \approx 2{,}71828$ tem precisão de cinco casas decimais.

EXERCÍCIOS 11.9

Exercs. 1-4: (a) Ache os polinômios de Maclaurin $P_1(x)$, $P_2(x)$ e $P_3(x)$ para $f(x)$. (b) Esboce os gráficos de P_1, P_2, P_3 e f no mesmo plano coordenado. (a) Aproxime $f(a)$ com quatro casas decimais por meio de $P_3(a)$ e use $R_3(a)$ para estimar o erro na aproximação.

1 $f(x) = \operatorname{sen} x$; $a = 0{,}05$

2 $f(x) = \cos x$; $a = 0{,}2$

3 $f(x) = \ln(x + 1)$; $a = 0{,}9$

4 $f(x) = \operatorname{arctg} x$; $a = 0{,}1$

© **Exercs. 5-6:** Grafe, no mesmo plano coordenado, f, P_1, P_2 e P_3 para $-3 \le x \le 3$.

5 $f(x) = \operatorname{senh} x$ 6 $f(x) = \cosh x$

Exercs. 7-18: Ache a fórmula de Taylor com resto (11.45) para $f(x)$, c e n dados.

7 $f(x) = \operatorname{sen} x$, $c = \pi/2$, $n = 3$

8 $f(x) = \cos x$, $c = \pi/4$, $n = 3$

9 $f(x) = \sqrt{x}$, $c = 4$, $n = 3$

10 $f(x) = e^{-x}$, $c = 1$, $n = 3$

11 $f(x) = \operatorname{tg} x$, $c = \pi/4$, $n = 2$

12 $f(x) = 1/(x-1)^2$, $c = 2$, $n = 5$

13 $f(x) = 1/x$, $c = -2$, $n = 5$

14 $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $c = -8$, $n = 3$

15 $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $c = 1$, $n = 2$

16 $f(x) = \ln \operatorname{sen} x$, $c = \pi/6$, $n = 3$

17 $f(x) = xe^x$, $c = -1$, $n = 4$

18 $f(x) = \log x$, $c = 10$, $n = 2$

Exercs. 19-30: Ache a fórmula de Maclaurin com resto para $f(x)$ e n dados.

19 $f(x) = \ln(x + 1)$, $n = 4$

20 $f(x) = \operatorname{sen} x$, $n = 7$

21 $f(x) = \cos x$, $n = 8$

22 $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $n = 3$

23 $f(x) = e^{2x}$, $n = 5$

24 $f(x) = \sec x$, $n = 3$

25 $f(x) = 1/(x-1)^2$, $n = 5$

26 $f(x) = \sqrt{4 - x}$, $n = 3$

27 $f(x) = \operatorname{arcsen} x$, $n = 2$

28 $f(x) = e^{-x^2}$, $n = 3$

29 $f(x) = 2x^4 - 5x^3$, $n = 4$ e $n = 5$

30 $f(x) = \cosh x$, $n = 4$ e $n = 5$

© **Exercs. 31-34:** Aproxime o número com quatro casas decimais utilizando o exercício indicado e o fato de que $\pi/180 \approx 0{,}0175$. Prove que sua resposta é correta mostrando que $|R_n(x)| < 0{,}5 \times 10^{-4}$.

31 sen 89° (Exercício 7)

32 cos 47° (Exercício 8)

33 $\sqrt{4{,}03}$ (Exercício 9)

34 $e^{-1{,}02}$ (Exercício 10)

© **Exercs. 35-40:** Aproxime o número utilizando o exercício indicado, e estime o erro na aproximação por meio de $R_n(x)$.

35 $-1/(2.2)$ (Exercício 13)

36 $\sqrt[3]{-8{,}5}$ (Exercício 14)

37 ln 1,25 (Exercício 19)

38 sen 0,1 (Exercício 20)

39 cos 30° (Exercício 21)

40 log 10,01 (Exercício 18)

Exercs. 41-46: Use a fórmula de Maclaurin com resto para estabelecer a fórmula de aproximação, e indique, em termos de casas decimais, a precisão da aproximação se $|x| \le 0{,}1$.

41 $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$

42 $\sqrt[3]{1 + x} \approx 1 + \frac{1}{3}x$

43 $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$

44 $\operatorname{sen} x \approx x - \frac{x^3}{6}$

45 $\ln(1 + x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

46 $\cosh x \approx 1 + \frac{x^2}{2}$

47 Seja $P_n(x)$ o polinômio de Maclaurin de grau n. Se $f(x)$ é um polinômio de grau n, prove que $f(x) = P_n(x)$.

11.10 A SÉRIE BINOMIAL

O teorema binomial afirma que se k é um inteiro positivo, então, para todo a e b

$$(a + b)^k = a^k + ka^{k-1}b + \frac{k(k-1)}{2!}a^{k-2}b^2 + \ldots + \frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{n!}a^{k-n}b^n + \ldots + b^k$$

Fazendo $a = 1$ e $b = x$, obtemos

$$(1 + x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{n!}x^n + \ldots + x^k$$

Se k não é um inteiro positivo (ou 0), convém estudar a série de potências $\sum a_n x^n$ com $a_0 = 1$ e $a_n = k(k-1) \ldots (k-n+1)/n!$ para $n \geq 1$. Está série infinita tem a forma

$$1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{k(k-1)\ \ldots\ (k-n+1)}{n!}x^n + \ldots$$

e é chamada **série binomial**. Se k é um inteiro não-negativo, a série se reduz à soma finita dada no teorema binomial. Caso contrário, a série não termina. Com a fórmula de a_n, pode-se mostrar que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{k-n}{n+1}\right||x| = |x|$$

Logo, pelo teste da razão (11.35), a série é absolutamente convergente se $|x| < 1$ e divergente se $|x| > 1$. Assim, a série binomial representa uma função f tal que

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{k(k-1)\ \ldots\ (k-n+1)}{n!}x^n \quad \text{se} \quad |x| < 1$$

Já observamos que, se k é um inteiro não-negativo, então $f(x) = (1+x)^k$. Provaremos agora que isto é verdadeiro para *todo* real k. Diferenciando cada termo da série binomial, obtemos

$$f'(x) = k + k(k-1)x + \ldots + \frac{nk(k-1)\ \ldots\ (k-n+1)}{n!}x^{n-1} + \ldots$$

e, portanto,

$$xf'(x) = kx + k(k-1)x^2 + \ldots + \frac{nk(k-1)\ \ldots\ (k-n+1)}{n!}x^n + \ldots$$

Somando os termos correspondentes das duas séries precedentes, o coeficiente de x^n é

$$\frac{(n+1)k(k-1)\ \ldots\ (k-n)}{(n+1)!} + \frac{nk(k-1)\ \ldots\ (k-n+1)}{n!}$$

que se reduz a

$$[(k-n)+n]\frac{k(k-1)\ \ldots\ (k-n+1)}{n!} = ka_n$$

Conseqüentemente

$$f'(x) + xf'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} ka_n x^n = kf(x)$$

ou, equivalentemente,

$$f'(x)(1+x) - kf(x) = 0$$

Se definirmos a função g por $g(x) = f(x)/(1+x)^k$, então

$$g'(x) = \frac{(1+x)^k f'(x) - f(x)k(1+x)^{k-1}}{(1+x)^{2k}} = \frac{(1+x)f'(x) - kf(x)}{(1+x)^{k+1}} = 0$$

Segue-se que $g(x) = c$ para alguma constante c, isto é

$$\frac{f(x)}{(1+x)^k} = c$$

Como $f(0) = 1$, vemos que $c = 1$ e, então, $f(x) = (1+x)^k$, que é o que queríamos provar. A próxima afirmação resume o assunto.

Série binomial (11.50)

Se $|x| < 1$, então, para todo número real k,

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{k(k-1)\ \ldots\ (k-n+1)}{n!}x^n + \ldots$$

EXEMPLO 1

Ache uma representação de $\sqrt[3]{1+x}$, em série de potências.

SOLUÇÃO

Utilizando (11.50) com $k = \frac{1}{3}$, obtemos

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)\ \ldots\ (\frac{1}{3}-n+1)}{n!}x^n + \ldots,$$

que pode escrever-se como

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3^2 \cdot 2!}x^2 + \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{3^3 \cdot 3!}x^3 + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1 \cdot 2 \ldots (3n-4)}{3^n \cdot n!}x^n + \ldots$$

para $|x| < 1$. A fórmula para o termo de ordem n da série é válida desde que $n \geq 2$.

EXEMPLO 2

Ache uma representação de $\sqrt[3]{1+x^4}$ em série de potências.

SOLUÇÃO

Pode-se obter a série de potências substituindo x por x^4 na série do Exemplo 1. Logo, se $|x| < 1$, então

$$\sqrt[3]{1+x^4} = 1 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{2}{3^2 \cdot 2!}x^8 + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1 \cdot 2 \ldots (3n-4)}{3^n \cdot n!}x^{4n} + \ldots$$

EXEMPLO 3

Obtenha uma aproximação de $\int_0^{0,3} \sqrt[3]{1+x^4}\,dx$.

SOLUÇÃO

Integrando os termos da série obtida no Exemplo 2, obtemos

$$\int_0^{0,3} \sqrt[3]{1+x^4}\,dx \approx 0,3 + 0,000162 - 0,000000243 + \ldots$$

Conseqüentemente, a integral pode ser aproximada por 0,300162, que tem precisão de seis casas decimais, pois o erro é inferior a 0,000000243.

A série binomial pode ser utilizada para obter fórmulas de aproximação polinomial para $(1+x)^k$. Como ilustração, se $|x| < 1$, então, pelo Exemplo 1,

$$\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{3}x$$

Como a série é alternada do segundo termo em diante, o erro cometido nesta aproximação é inferior ao terceiro termo, $\frac{1}{9}x^2$.

EXERCÍCIOS 11.10

Exercs. 1-12: Estabeleça uma representação da expressão em série de potências, e indique o raio de convergência.

1 (a) $\sqrt{1+x}$ (b) $\sqrt{1-x^3}$

2 (a) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$ (b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}}$

3 $(1+x)^{-2/3}$ 4 $(1+x)^{1/4}$

5 $(1-x)^{3/5}$ 6 $(1-x)^{2/3}$

7 $(1+x)^{-2}$ 8 $(1+x)^{-4}$

9 $(1+x)^{-3}$ 10 $x(1+2x)^{-2}$

11 $\sqrt[3]{8+x}$ (*Sugestão*: Considere $2\sqrt[3]{1+\frac{1}{8}x}$.)

12 $(4+x)^{3/2}$

Exercs. 13-14: (a) Obtenha uma representação de $f(x)$ em série de potências utilizando a relação dada. (b) Ache o raio de convergência.

13 $f(x) = \operatorname{arcsen} x$; $\operatorname{arcsen} x = \int_0^x (1/\sqrt{1-t^2})\,dt$

14 $f(x) = \operatorname{argsh} x$; $\operatorname{argsh} x = \int_0^x (1/\sqrt{1+t^2})\,dt$

Exercs. 15-20: Aproxime a integral com três casas decimais, usando o exercício indicado.

15 $\int_0^{1/2} \sqrt{1+x^3}\,dx$ (Exercício 1)

16 $\int_0^{1/2} \dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}\,dx$ (Exercício 2)

17 $\int_0^{0,2} (1-x^2)^{3/5}\,dx$ (Exercício 5)

18 $\int_0^{0,4} (1-x^3)^{2/3}\,dx$ (Exercício 6)

19 $\int_0^{0,3} \dfrac{1}{(1+x^3)^2}\,dx$ (Exercício 7)

20 $\int_0^{0,1} \dfrac{1}{(1+5x^2)^4}\,dx$ (Exercício 8)

Exercs. 21-22: Para o valor dado de k, grafe $f(x) = (1+x)^k$ e $g(x) = 1+kx$ no mesmo plano coordenado, para $-1 \leq x \leq 1$. Use os gráficos para estimar o maior intervalo fechado no qual $|f(x) - g(x)| \leq \frac{1}{10}$.

21 $k = \frac{1}{2}$ 22 $k = \frac{5}{2}$

23 Ref. Exercício 44 da Seção 10.4. A fórmula do período T de um pêndulo de comprimento L, deslocado do equilíbrio de um ângulo inicial de θ_0 radiano, é dada pela integral imprópria

$$T = 2\sqrt{\frac{2L}{g}}\int_0^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}\,d\theta$$

Fazendo a substituição $\operatorname{sen} u = (1/k)\operatorname{sen}\frac{1}{2}\theta$, com $k = \operatorname{sen}\frac{1}{2}\theta_0$, pode-se mostrar que

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2 u}}\,du$$

(a) Use a série binomial de $(1-x)^{-1/2}$ para mostrar que

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{L}{a}}\left(1 + \frac{1}{4}k^2\right)$$

(b) Aproxime T se $\theta_0 = \pi/6$.

11.11 EXERCÍCIOS DE REVISÃO

Exercs. 1-6: Determine se a seqüência converge ou diverge; se convergir, ache o limite.

1 $\left\{\frac{\ln (n^2+1)}{n}\right\}$ 2 $\{100(0{,}99)^n\}$

3 $\left\{\frac{10^n}{n^{10}}\right\}$ 4 $\left\{\frac{1}{n}+(-2)^n\right\}$

5 $\left\{\frac{n}{\sqrt{n+4}}-\frac{n}{\sqrt{n+9}}\right\}$

6 $\left\{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{2n}\right\}$

Exercs. 7-32: Se a série é de termos positivos, determine se converge ou diverge; se a série contém termos negativos, determine se é absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente.

7 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)(n+2)}}$ 8 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+3)^2}{(n+1)^3}$

9 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ 10 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2+(\frac{1}{2})^n}$

11 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n+1}}{n5^{n-1}}$ 12 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+2}$

13 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{\ln (n+1)}$ 14 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-1}{n^2+1}$

15 $\sum_{n=1}^{\infty}(n^2+9)(-2)^{1-n}$ 16 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+\cos n}{n^3+1}$

17 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n^e}$ 18 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}$

19 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ 20 $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{(0{,}9)^n}{\ln n}$

21 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} 5\frac{\pi}{3}n}{n^{5\pi/3}}$ 22 $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt[3]{n-1}}{n^2-1}$

23 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$ 24 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+3}{n!}$

25 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n}{n^2}$

26 $\frac{2}{1!}-\frac{2\cdot 4}{2!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}{n!}+\ldots$

27 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)^n}{n^{2n}}$ 28 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-1}{n^2+9}$

29 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2n}}{(2n-1)!}$ 30 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}-\frac{5}{\sqrt{n}}\right)$

31 $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{\ln n}}{n}$ 32 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt{1+n^2}}$

Exercs. 33-38: Use o teste da integral (11.23) para determinar a convergência ou divergência da série.

33 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+2)^3}$ 34 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2-1}}$

35 $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2}e^{1/n}$ 36 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^3}$

37 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{\sqrt[3]{n+8}}$ 38 $\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{n^2-4n}$

Ⓒ **Exercs. 39-40:** Aproxime a soma da série com três casas decimais.

39 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n+1)!}$

40 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2(n^2+1)}$

Exercs. 41-44: Ache o intervalo de convergência da série.

41 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{(-3)^n}x^n$ 42 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^{2n}}{\sqrt{n+1}}x^n$

43 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}(x+10)^n$

44 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}(x-1)^n$

Exercs. 45-46: Ache o raio de convergência da série.

45 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^n$ 46 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+5)!}(x+5)^n$

Exercs. 47-52: Ache a série de Maclaurin para $f(x)$ e indique o raio de convergência.

47 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x} & \text{se } x\neq 0\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}$

48 $f(x)=xe^{-2x}$ 49 $f(x)=\operatorname{sen} x\cos x$

50 $f(x)=\ln(2+x)$ 51 $f(x)=(1+x)^{2/3}$

52 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

53 Dê uma representação em série para e^{-x} em potências de $x+2$.

54 Dê uma representação em série para $\cos x$ em potências de $x-(\pi/2)$.

55 Dê uma representação em série para $\sqrt{x}$ em potências de $x-4$.

Ⓒ **Exercs. 56-60:** Use uma série infinita para aproximar o número com três casas decimais.

56 $1/\sqrt[3]{e}$ 57 $\int_0^1 x^2e^{-x^2}\,dx$

58 $\int_0^1 f(x)\,dx$ com
$f(x)=(\operatorname{sen} x)/\sqrt{x}$ se $x\neq 0$ e $f(0)=0$

59 $\sqrt[5]{1{,}01}$ 60 $e^{-0{,}25}$

Exercs. 61-62: Ache a fórmula de Taylor com resto para $f(x)$, c e n dados.

61 $f(x)=\ln\cos x$, $c=\pi/6$, $n=3$

62 $f(x)=\sqrt{x-1}$, $c=2$, $n=4$

Exercs. 63-64: Ache a fórmula de Maclaurin com resto para $f(x)$ e n dados.

63 $f(x)=e^{-x^3}$, $n=3$ 64 $f(x)=\frac{1}{1-x}$, $n=6$

65 Use a fórmula de Taylor com resto para aproximar cos 43° com quatro casas decimais.

Ⓒ 66 Use a fórmula de Taylor com resto para mostrar que a fórmula de aproximação

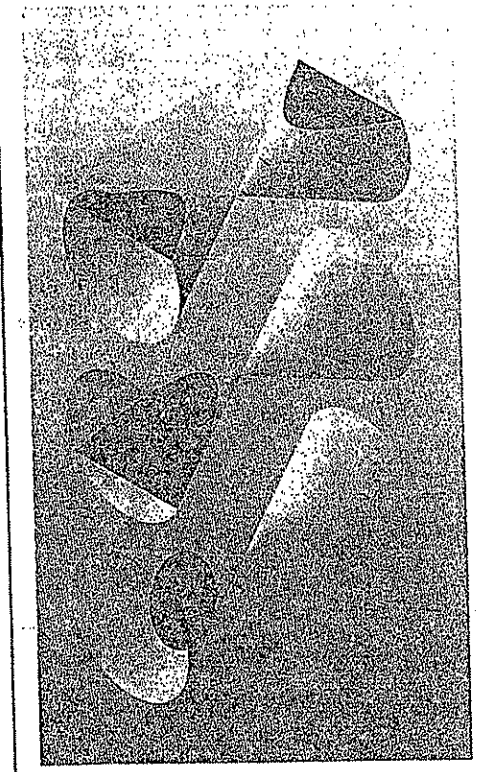
$$\operatorname{sen} x\approx x-\tfrac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5$$

tem precisão de quatro casas decimais para $0\le x\le\pi/4$.

MAKRON Books

Capítulo 12

TÓPICOS DE GEOMETRIA ANALÍTICA



INTRODUÇÃO

As *seções cônicas*, também chamadas *cônicas*, são obtidas interceptando por um plano um cone circular reto de duas folhas. Variando a posição do plano, tem-se uma *elipse*, uma *parábola* ou uma *hipérbole*, conforme ilustração ao lado. Se o plano intercepta o cone apenas em um ponto ou ao longo de uma ou duas de suas retas, têm-se as *cônicas degeneradas*.

Investigadas extensamente pelos antigos gregos, as seções cônicas revelaram propriedades que nos permitem defini-las em termos de pontos e retas. Fato digno de nota é que, embora estudadas há mais de dois mil anos, as seções cônicas não se tornaram obsoletas; ao contrário, têm grande importância nas investigações atuais sobre o espaço exterior e no estudo do comportamento das partículas atômicas.

Boa parte do material deste capítulo pode ser considerada uma revisão, pois aparece também em textos de pré-cálculo. Exigem-se, entretanto, métodos de cálculo infinitesimal para resolver problemas que incluem a determinação de equações de tangentes às cônicas, o cálculo de áreas e volumes de regiões determinadas por cônicas e a demonstração de propriedades reflexivas usadas na construção de telescópios e holofotes.

12.1 PARÁBOLAS

Nesta seção definiremos uma *parábola* e deduziremos equações de parábolas que tenham eixo vertical ou horizontal.

Definição (12.1) Uma **parábola** é o conjunto de todos os pontos de um plano eqüidistantes de um ponto fixo F (**foco**) e de uma reta fixa l (**diretriz**) do plano.

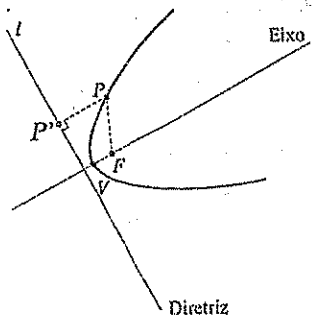


Figura 12.1

Admitiremos que F não pertence a l, pois isto resultaria em uma reta. Se P é um ponto do plano e P' é o ponto de l determinado por uma reta por P perpendicular a l (ver Figura 12.1), então, pela Definição (12.1), P pertence à parábola se e somente se as distâncias $d(P, F)$ e $d(P, P')$ são iguais. O eixo da parábola é a reta por F perpendicular à diretriz. O vértice da parábola é o ponto V do eixo, eqüidistante de F e l.

Para obter uma equação simples de uma parábola, fixemos o eixo-y coincidindo com o eixo da parábola, com origem no vértice V, conforme Figura 12.2. Neste caso, o foco F tem coordenadas $(0, p)$ para algum número real $p \neq 0$, e a equação da diretriz é $y = -p$. (A figura exibe o caso $p > 0$.) Pela fórmula da distância, um ponto $P(x, y)$ pertence à parábola se e somente se

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y+p)^2}$$

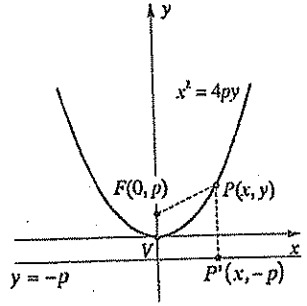


Figura 12.2

Elevando ao quadrado ambos os membros e simplificando:

$$(x-0)^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2$$
$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$
$$x^2 = 4py$$

Uma equação equivalente é $y = \frac{1}{4p}x^2$.

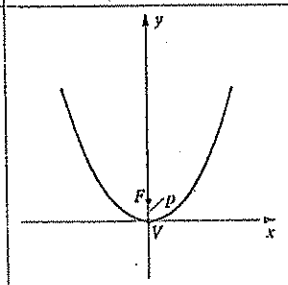
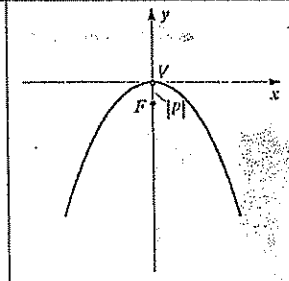
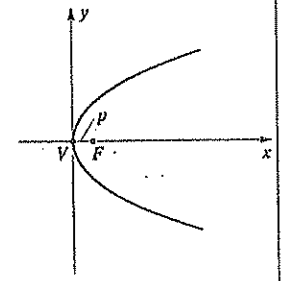
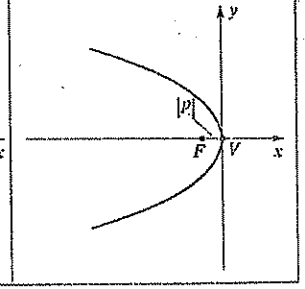
Mostramos que as coordenadas de todo ponto (x, y) da parábola verificam $x^2 = 4py$. Reciprocamente, se (x, y) é solução de $x^2 = 4py$, então, invertendo a marcha anterior vemos que o ponto (x, y) pertence à parábola. Se $p > 0$, a parábola tem abertura para cima, conforme Figura 12.2. Se $p < 0$, a parábola tem abertura para baixo. O gráfico é simétrico em relação ao eixo-y, pois substituindo-se x por $-x$ a equação $x^2 = 4py$ não se altera.

Permutando os papéis de x e y, obtemos $y^2 = 4px$, ou, equivalentemente, $x = y^2/(4p)$. Esta é a equação de uma parábola com vértice na origem, foco $F(p, 0)$ e abertura para a direita se $p > 0$ ou para a esquerda se $p < 0$.

Abreviadamente, costumamos referir-nos à *parábola* $x^2 = 4py$ ($y^2 = 4px$), em lugar de *a parábola de equação* $x^2 = 4py$ (ou $y^2 = 4px$).

O quadro a seguir resume nosso estudo.

Parábolas com vértice $V(0, 0)$ (12.2)

EQUAÇÃO	GRÁFICO PARA $p > 0$	GRÁFICO PARA $p < 0$
$x^2 = 4py$ $y = \frac{1}{4p}x^2$		
$y^2 = 4px$ $x = \frac{1}{4p}y^2$		

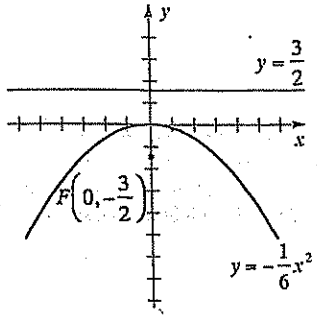


Figura 12.3

Vemos, de (12.2), que, para qualquer real não-nulo a, o gráfico de $y = ax^2$ ou $x = ay^2$ é uma parábola com vértice $V(0, 0)$. Além disso, $a = 1/(4p)$, ou, equivalentemente, $p = 1/(4a)$, onde $|p|$ é a distância do foco F ao vértice V. Para achar a diretriz l, recorde que l é também a distância $|p|$ de V.

EXEMPLO 1

Determine o foco e a diretriz da parábola $y = -\frac{1}{6}x^2$ e trace o gráfico.

SOLUÇÃO

A equação tem a forma $y = ax^2$ com $a = -\frac{1}{6}$. Tal como em (12.2), $a = 1/(4p)$, ou

$$p = \frac{1}{4a} = \frac{1}{4(-\frac{1}{6})} = -\frac{3}{2}$$

A parábola é aberta para baixo e tem foco $F(0, -\frac{3}{2})$, conforme ilustrado na Figura 12.3. A diretriz é a reta horizontal $y = \frac{3}{2}$, que está à distância $\frac{3}{2}$ acima de V, conforme figura.

EXEMPLO 2

(a) Determine a equação da parábola que tem vértice na origem, abertura para a direita e passa pelo ponto $P(7, -3)$.

(b) Determine o foco.

SOLUÇÃO

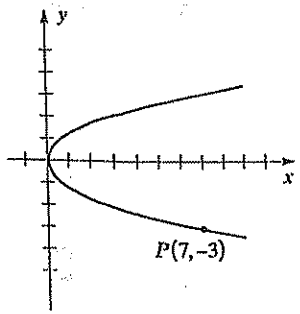


Figura 12.4

(a) A Figura 12.4 é um esboço da parábola. De acordo com (12.2), a equação da parábola é da forma $x = ay^2$ para algum número a. Se $P(7, -3)$ pertence ao gráfico, então

$$7 = a(-3)^2 \text{ ou } a = \frac{7}{9}$$

Logo, a equação da parábola é $x = \frac{7}{9}y^2$.

(b) O foco está à distância p à direita do vértice, com

$$p = \frac{1}{4a} = \frac{1}{4(\frac{7}{9})} = \frac{9}{28}$$

Assim, o foco tem coordenadas $\left(\frac{9}{28}, 0\right)$

Para estender nosso estudo a uma parábola cujo vértice *não* está na origem, utilizamos uma **translação de eixos**, conforme Figura 12.5, onde os eixos x e y são transladados para posições denotadas por x' e y' — paralelas às posições originais. Todo ponto P do plano tem, assim, duas representações diferentes: $P(x, y)$ no sistema xy e $P(x', y')$ no sistema $x'y'$. Se a origem do novo sistema $x'y'$ tem coordenadas (h, k) no plano xy, conforme Figura 12.5, vê-se que

$$x = x' + h \qquad \text{e} \qquad y = y' + k$$

Estas fórmulas são válidas para todos os valores de h e k. Fórmulas equivalentes:

$$x' = x - h \qquad \text{e} \qquad y' = y - k$$

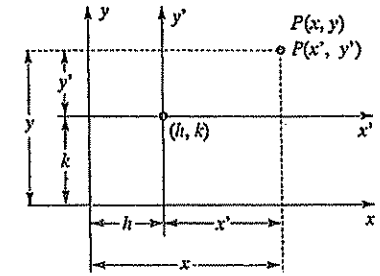


Figura 12.5

Tem-se então:

Fórmulas de translação de eixos (12.3)

Se (x, y) são as coordenadas de um ponto P em um plano-xy e se (x', y') são as coordenadas de P em um plano-$x'y'$ com origem no ponto (h, k) do plano-xy, então

(i) $x = x' + h, y = y' + k$

(ii) $x' = x - h, y' = y - k$

Se, no plano-xy, certa coleção de pontos constitui o gráfico de uma equação em x e y, então, para achar a equação em x' e y' que tenha o mesmo gráfico no plano-$x'y'$, substituímos x por $x' + h$ e y por $y' + k$. Reciprocamente, se um conjunto de pontos

no plano-$x'y'$ é o gráfico de uma equação em x' e y', então, para achar a equação correspondente em x e y, substituímos x' por $x - h$ e y' por $y - k$.

Ilustramos (12.3) a seguir. Sabemos que

$$(x')^2 = 4py'$$

é a equação de uma parábola com vértice na origem O' do plano-$x'y'$. Utilizando as fórmulas (ii) de translação de eixos, vê-se que

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

é a equação da mesma parábola no plano-xy com vértice $V(h, k)$. O foco é $F(h, k + p)$ e a diretriz é $y = k - p$.

Desenvolvendo o membro esquerdo de $(x - h)^2 = 4p(y - k)$ e simplificando, somos conduzidos a uma equação da forma

$$y = ax^2 + bx + c$$

onde a, b e c são números reais. Reciprocamente, se $a \neq 0$, então o gráfico de $y = ax^2 + bx + c$ é uma parábola com eixo vertical. Tal como em $y = ax^2$, pode-se mostrar que $a = 1/(4p)$, ou $p = 1/(4a)$.

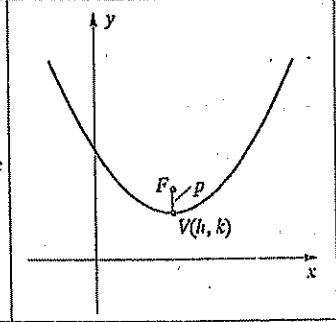
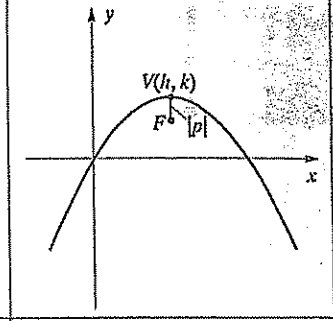
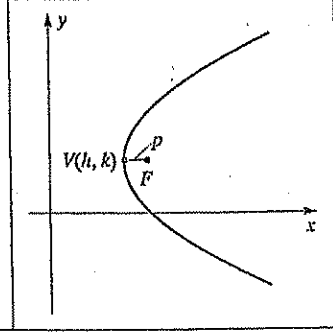
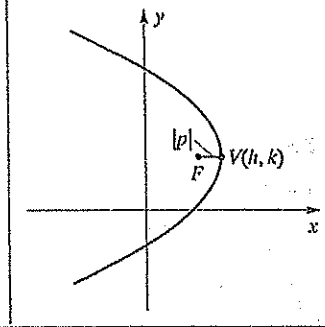
Analogamente, começando com $(y')^2 = 4px'$ e utilizando (12.3), obtemos

$$(y - k)^2 = 4p(x - h),$$

que é a equação de uma parábola no plano-xy com vértice $V(h, k)$, abertura para a direita se $p > 0$ ou para a esquerda se $p < 0$. Esta equação pode escrever-se na forma $x = ay^2 + by + c$, onde $a = 1/(4p)$ ou $p = 1/(4a)$.

O quadro a seguir resume este estudo. Por conveniência, tomamos $V(h, k)$ no primeiro quadrante.

Parábolas com vértice $V(h, k)$ (12.4)

EQUAÇÃO	GRÁFICO PARA $p > 0$	GRÁFICO PARA $p < 0$
$(x-h)^2 = 4p(y-k)$ $y = ax^2 + bx + c$ $p = \frac{1}{4a}$		
$(y-k)^2 = 4p(x-h)$ $x = ay^2 + by + c$ $p = \frac{1}{4a}$		

Se a é um número real não-nulo, então, por (12.4), o gráfico da equação $y = ax^2 + bx + c$ é uma parábola com eixo vertical. Poderíamos achar o vértice $V(h, k)$ algebricamente, completando quadrados e escrevendo a equação na forma $(x - h)^2 = 4p(y - k)$. Outro método para determinar V consiste em utilizar uma derivada. Como a tangente em V é horizontal, podemos achar a coordenada-x, h, de V diferenciando $y = ax^2 + bx + c$ e resolvendo a equação $dy/dx = 0$ em relação a x, como a seguir:

$$\frac{dy}{dx} = 2ax + b = 0 \qquad \text{ou} \qquad x = -\frac{b}{2a}$$

A coordenada-y, k, de V é obtida substituindo x por $-b/(2a)$ em $y = ax^2 + bx + c$. Podem-se então determinar as coordenadas do foco F e a equação da diretriz l utilizando $p = 1/(4a)$.

A derivada segunda $d^2y/dx^2 = 2a$ nos diz que a parábola tem concavidade para cima se $a > 0$ ou para baixo se $a < 0$.

EXEMPLO 3

Discuta $y = 2x^2 - 6x + 4$ e esboce o gráfico.

SOLUÇÃO

Conforme (12.4), o gráfico é uma parábola com eixo vertical. Como já vimos, o vértice V é o ponto em que a tangente é horizontal. Consideramos assim

$$\frac{dy}{dx} = 4x - 6 = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Fazendo $x = \frac{3}{2}$ na equação dada, obtemos

$$y = 2(\tfrac{3}{2})^2 - 6(\tfrac{3}{2}) + 4 = -\frac{1}{2}$$

Logo, o vértice é $V(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$.

O coeficiente de x^2 é $a = 2$, de modo que

$$p = \frac{1}{4a} = \frac{1}{4(2)} = \frac{1}{8}$$

Como a parábola tem abertura para cima, o foco F está à distância $p = \frac{1}{8}$ acima de V, o que nos dá

$$F(\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{8}) = F(\tfrac{3}{2}, -\tfrac{3}{8})$$

A diretriz é a reta horizontal l que está à distância $p = \frac{1}{8}$ abaixo de V. Portanto, a equação de l é

$$y = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{8} \quad \text{ou} \quad = -\tfrac{5}{8}$$

O gráfico está esboçado na Figura 12.6. Note que o intercepto-y é 4 e os interceptos-x (soluções de $2x^2 - 6x + 4 = 0$) são 1 e 2.

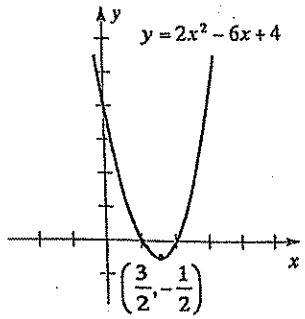


Figura 12.6

Para equações da forma $x = ay^2 + by + c$, podemos achar a coordenada-y, k, do vértice $V(h, k)$ resolvendo em relação a y a equação $dx/dy = 0$. A coordenada-x, h, de V pode então ser obtida substituindo y por k na equação. Neste caso, a parábola tem abertura para a direita ou para a esquerda, e V é o ponto em que a tangente é vertical, pois $dx/dy = 1/(dy/dx)$.

EXEMPLO 4

Discuta $x = \frac{1}{2}y^2 + 4y + 11$ e esboce o gráfico.

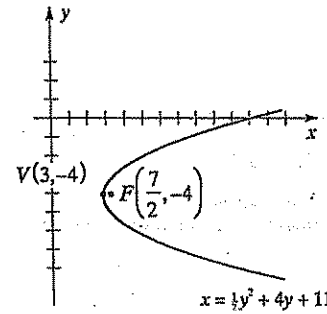


Figura 12.7

SOLUÇÃO

Conforme (12.4), o gráfico é uma parábola com eixo horizontal. Para determinar a coordenada-y do vértice V (o ponto em que a tangente é vertical), consideramos

$$\frac{dx}{dy} = y + 4 = 0 \quad \text{ou} \quad y = -4$$

Substituindo y por -4 na equação dada, obtemos

$$x = \tfrac{1}{2}(-4)^2 + 4(-4) + 11 = 3$$

Logo, o vértice é $V(3, -4)$.

O coeficiente de y^2 é $a = \frac{1}{2}$; assim,

$$p = \frac{1}{4a} = \frac{1}{4(\frac{1}{2})} = \frac{1}{2}$$

A parábola tem abertura para a direita, de modo que o foco F está à distância $\frac{1}{2}$ à direita de V. Temos, pois,

$$F(3 + \tfrac{1}{2}, -4) = F(\tfrac{7}{2}, -4)$$

A diretriz é a reta vertical l, à distância $\frac{1}{2}$ à esquerda de V. Portanto, a equação de l é

$$x = 3 - \tfrac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x = \tfrac{5}{2}$$

A parábola está ilustrada na Figura 12.7.

EXEMPLO 5

Determine a equação da parábola de vértice $V(-4, 2)$ e diretriz $y = 5$.

SOLUÇÃO

A Figura 12.8 mostra o vértice e a diretriz. O tracejado indica uma forma possível da parábola. Segue-se que uma equação da parábola é

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

com $h = -4$, $k = 2$ e $p = -3$, o que nos dá

$$(x+4)^2 = -12(y-2)$$

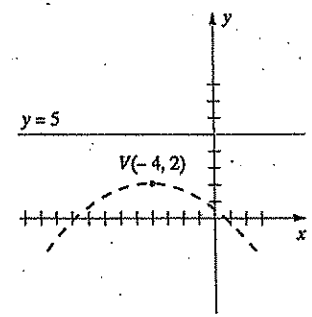


Figura 12.8

Esta equação pode ser escrita na forma $y = ax^2 + bx + c$, como segue:

$$x^2 + 8x + 16 = -12y + 24$$
$$12y = -x^2 - 8x + 8$$
$$y = -\frac{1}{12}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$$

EXEMPLO 6

Engenheiros de tráfego estão projetando um trecho de rodovia que deve ligar uma rodovia horizontal com outra com 20% de aclive (coeficiente angular $\frac{1}{5}$), conforme ilustrado no corte da Figura 12.9. A transição suave de um para outro trecho deve ocorrer em uma distância horizontal de 800 metros, com um trecho parabólico ligando os pontos A e B.

(a) Determine a equação da parábola de vértice A que tem tangente de coeficiente angular 0 em A e $\frac{1}{5}$ em B.

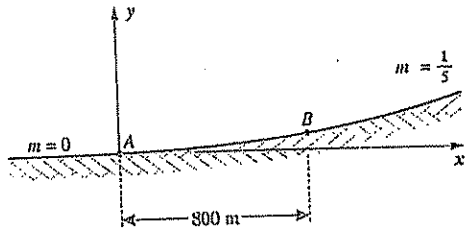


Figura 12.9

(b) Ache a diferença de elevação entre B e a porção horizontal da rodovia.

(c) Estabeleça uma integral para o comprimento do trecho entre A e B.

(d) Calcule a integral em (c).

SOLUÇÃO

(a) Introduzindo um plano-xy como na Figura 12.9, então uma parábola com vértice (0, 0) e abertura para cima tem equação $y = ax^2$ para algum número a. O coeficiente angular m da tangente em um ponto arbitrário $P(x, y)$ da parábola é

$$m = \frac{dy}{dx} = 2ax$$

Assim, a tangente tem coeficiente angular 0 em A (a origem). A transição em B é suave se $m = \frac{1}{5}$ quando $x = 800$, isto é, se

$$\frac{1}{5} = 2a(800) \qquad \text{ou} \qquad a = \frac{1}{8.000}$$

Logo, a equação da parábola é $y = \frac{1}{8.000}x^2$.

(b) A diferença de elevação entre B e a porção horizontal da rodovia é a coordenada-y de B. Fazemos, pois, $x = 800$ na equação obtida em (a), obtendo

$$y = \frac{1}{8.000}(800)^2 = 80m$$

(c) Por (6.14), o comprimento (em metros) do trecho parabólico da rodovia entre A e B é

$$L = \int_0^{800} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_0^{800} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{4.000}\right)^2}\, dx$$

(d) A integral em (c) pode ser calculada mediante a substituição trigonométrica $x/4.000 = \operatorname{tg}\theta$ seguida de integração por partes, ou recorrendo à tábua de integrais no Apêndice IV. Para obter um valor aproximado, pode-se utilizar a regra do trapézio ou a regra de Simpson. Pela Fórmula 21 da tábua de integrais,

$$\int \sqrt{a^2 + u^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 + u^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{a^2 + u^2}\right| + C,$$

e a substituição

$$u = \frac{1}{4.000}x, \quad du = 7\frac{1}{4.000}\, dx$$

e notando que $u = \frac{1}{5}$ quando $x = 800$, obtemos:

$$L = 4.000 \int_0^{1/5} \sqrt{1 + u^2}\, du$$

$$= 4.000 \left[\frac{u}{2}\sqrt{1 + u^2} + \frac{1}{2}\ln\left|u + \sqrt{1 + u^2}\right|\right]_0^{1/5}$$

$$= 80\sqrt{26} + 2.000 \ln\left(\frac{1 + \sqrt{26}}{5}\right) \approx 805 \text{ m}$$

Cabe notar que $d(A, B) \approx 804$ m.

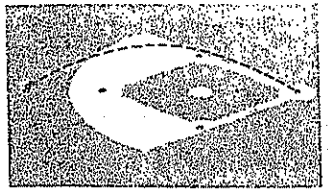


Figura 12.10 Trajetória da bola.

Há muitas aplicações das parábolas. Se, conforme Figura 12.10, um jogador de beisebol lança uma bola em direção não-vertical e se a gravidade é a única força atuando sobre a bola (isto é, desprezando-se a resistência do ar e outros fatores externos), então a trajetória da bola (ou de qualquer objeto projetado) é parabólica. Podemos utilizar este fato (a ser provado no Capítulo 15) para determinar onde a bola tocará o solo, para achar a altura máxima atingida etc.

A forma de cabos de certos tipos de pontes suspensas é parabólica. Todavia, conforme mostramos na Seção 8.3, para um cabo suspenso *livremente* a curva é uma catenária, e não uma parábola.

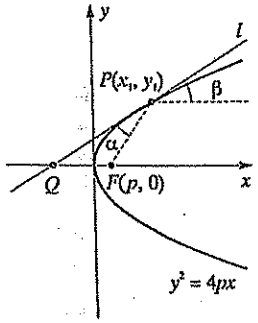


Figura 12.11

Uma propriedade importante está associada às tangentes a parábolas. Suponhamos que l é a tangente em um ponto $P(x_1, y_1)$ da parábola $y^2 = 4px$, e seja F o foco. De acordo com a Figura 12.11, denotemos por α o ângulo entre l e o segmento FP, e seja β o ângulo entre l e a semi-reta horizontal com extremidade P. No Exercício 42 pede-se demonstrar que $\alpha = \beta$. Esta *propriedade reflexiva* tem muitas aplicações. Por exemplo, a forma do espelho de um holofote se obtém fazendo uma parábola girar sobre seu eixo. Se uma fonte de luz é colocada em F, então, por uma lei da física (*o ângulo de reflexão é igual ao ângulo de incidência*), um raio de luz será refletido ao longo de uma reta paralela ao eixo (ver Figura 12.12(i)). Emprega-se o mesmo princípio na construção de espelhos para telescópios ou fornos solares – um raio de luz caminhando em direção ao espelho parabólico, paralelamente ao eixo, se refletirá no foco (ver Figura 12.12(ii)). Esta propriedade é também utilizada em antenas de sistemas de radar, rádio telescópios e microfones de campo usados em jogos de futebol.

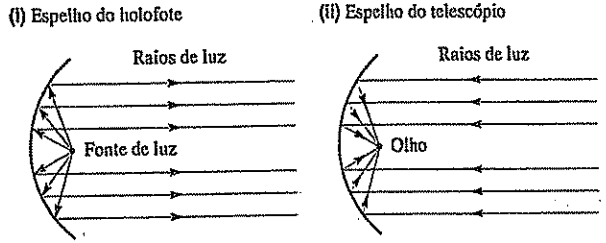


Figura 12.12

EXERCÍCIOS 12.1

Exercs. 1-6: Determine o vértice, o foco e a diretriz da parábola. Esboce o gráfico, exibindo o foco e a diretriz.

1 $y = -\frac{1}{12}x^2$

2 $x = 2y^2$

3 $2y^2 = -3x$

4 $x^2 = -3y$

5 $y = 8x^2$

6 $y^2 = -100x$

Exercs. 7-16: Determine o vértice e o foco da parábola. Esboce o gráfico, exibindo o foco.

7 $y = x^2 - 4x + 2$

8 $y = 8x^2 + 16x + 10$

9 $y^2 - 12 = 12x$

10 $y^2 - 20y + 100 = 6x$

11 $y^2 - 4y - 2x - 4 = 0$

12 $y^2 + 14y + 4x + 45 = 0$

13 $4x^2 + 40x + y + 106 = 0$

14 $y = 40x - 97 - 4x^2$

15 $x^2 + 20y = 10$

16 $4x^2 + 4x + 4y + 1 = 0$

Exercs. 17-24: Ache a equação da parábola que verifica as condições dadas:

17 foco $F(2, 0)$, diretriz $x = -2$

18 foco $F(0, -4)$, diretriz $y = 4$

19 vértice $V(3, -5)$, diretriz $x = 2$

20 vértice $V(-2, 3)$, diretriz $y = 5$

21 vértice $V(-1, 0)$, foco $F(-4, 0)$

22 vértice $V(1, -2)$, foco $F(1, 0)$

23 vértice na origem, simétrica em relação ao eixo-y e passando pelo ponto $(2, -3)$.

24 vértice $V(-3, 5)$, eixo paralelo ao eixo-x e passando pelo ponto $(5, 9)$.

25 Um holofote é projetado de modo que toda secção transversa contendo seu eixo de simetriz seja uma parábola com a fonte de luz no foco. Onde está o foco se o refletor tem 1 m de abertura e 0,30 m de profundidade?

26 Ache a equação da parábola de eixo vertical e que passa por $A(2, 5)$, $B(-2, -3)$ e $C(1, 6)$.

27 Seja R a região delimitada pela parábola $x^2 = 4y$ e a reta l pelo foco perpendicular ao eixo da parábola.

(a) Ache a área de R.

(b) Se R gira em torno do eixo-y, ache o volume do sólido resultante.

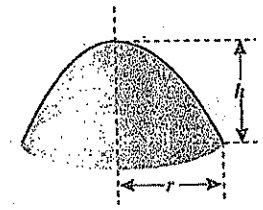
(c) Se R gira em torno do eixo-x, ache o volume do sólido resultante.

28 Repita (a) – (c) do Exercício 27 se R é a região delimitada pelos gráficos de $x = 5$ e $y^2 = 2x - 6$

29 Fazendo-se uma parábola girar em torno de seu eixo, obtém-se um *parabolóide de revolução*. O parabolóide é a forma básica de muitos coletores e refletores. A figura mostra um parabolóide (finito) de altura h e raio da base r.

(a) O *comprimento focal* do parabolóide é a distância p entre o vértice e o foco da parábola. Expresse p em termos de r e h.

(b) Ache o volume do parabolóide.



30 Ref. Exercício 29. Um radiotelescópio tem a forma de um parabolóide de revolução com comprimento focal p e diâmetro da base $2a$.

(a) Mostre que a área da superfície S que pode coletar ondas de rádio é

$$S = \frac{8\pi p^2}{3}\left[\left(1 + \frac{a^2}{4p^2}\right)^{3/2} - 1\right]$$

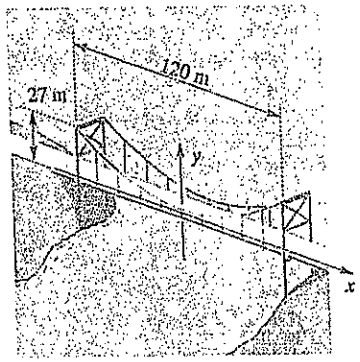
(b) Um dos maiores radiotelescópios, localizado em Jodrell Bank, Cheshire, Inglaterra, tem 76 metros de diâmetro e 15 metros de comprimento focal. Aproxime S a menos 0,01 m^2.

31 Uma seção de ponte suspensa tem seu peso distribuído uniformemente entre duas torres distantes 120 metros uma da outra e situadas a 27 metros acima da rodovia horizontal. Um cabo suspenso entre os topos das torres tem a forma de uma parábola, com o ponto central a 3 metros acima da rodovia. Suponha introduzido um sistema de eixos coordenados, conforme figura.

(a) Ache a equação da parábola.

(b) Estabeleça uma integral para o valor do comprimento do cabo.

(c) Se o cabo parabólico é apoiado em nove cabos verticais equiespaçados, ache o comprimento total desses cabos de apoio.



32 Seja R a região delimitada pela parábola $x = ay^2$ e pela reta l, pelo foco e perpendicular ao eixo da parábola. Ache a área da superfície curva obtida fazendo-se R girar em torno do eixo-x.

33 Uma criança joga uma bola a um ângulo de 45°, da beira de um platô acima de uma colina de coeficiente angular $-\frac{3}{4}$, conforme figura na coluna ao lado.

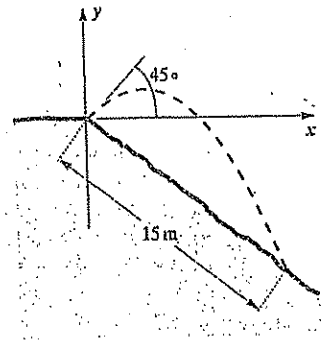
34 Prove que o ponto de uma parábola mais próximo do foco é o vértice.

35 Um arco parabólico tem altura central de k metros, conforme figura. Prove que a altura do maior retângulo que pode caber dentro do arco é $\frac{2}{3}k$ metros.

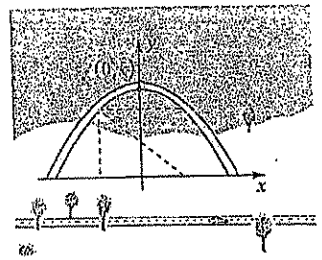
(a) Se a bola toca o solo a 50 metros colina abaixo, ache a equação de sua trajetória parabólica. (Ignore a altura da criança.)

(b) Qual a altura máxima da bola em relação ao solo?

(33)



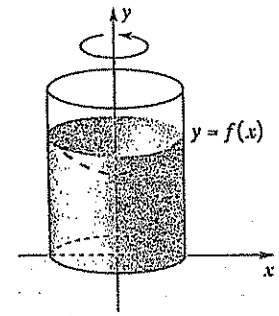
(35)



36 Um recipiente cilíndrico, parcialmente cheio de mercúrio, gira em torno de seu eixo à razão de ω radianos/seg (ver figura na página seguinte). Da física, sabemos que a função f, cujo gráfico gera a superfície interna do mercúrio, é solução da equação diferencial $y' = (\omega^2/g)x$, onde $g \approx 9{,}8$ m/seg^2.

(a) Mostre que $y = \frac{1}{19{,}8}\omega^2 x^2 + f(0)$.

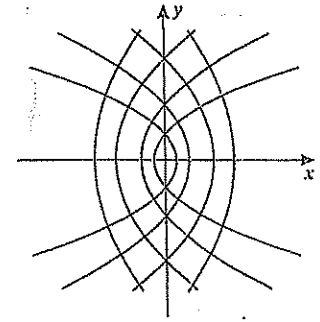
(b) Para que valor de ω o foco da parábola está a 60 cm do vértice?



37 A parábola $y^2 = 4p(x + p)$ tem seu foco na origem e eixo ao longo do eixo-x. Atribuindo-se diferentes valores a p, obtém-se uma família de *parábolas confocais*, conforme figura. Famílias deste tipo ocorrem em estudos de eletricidade e magnetismo.

(a) Mostre que há exatamente duas parábolas da família que passam por um ponto dado $P(x_1, y_1)$ se $y_1 \neq 0$.

(b) Mostre que as duas parábolas em (a) são mutuamente ortogonais – isto é, as tangentes em $P(x_1, y_1)$ são perpendiculares.



38 Uma *corda focal* é um segmento de reta que passa pelo foco de uma parábola e tem suas extremidades na parábola. Se AB é uma corda focal, prove que as tangentes em A e B

(a) são perpendiculares;

(b) interceptam-se sobre a diretriz.

Exercs. 39-40: Ref. Exercício 37. Grafe nos mesmos eixos as parábolas confocais $x^2 = 4p(y + p)$ para os valores dados de p. Estime os pontos de intersecção e verifique que as tangentes nesses pontos são perpendiculares.

39 $p = 1{,}3, -1$ 40 $p = 0{,}2, -2{,}1$

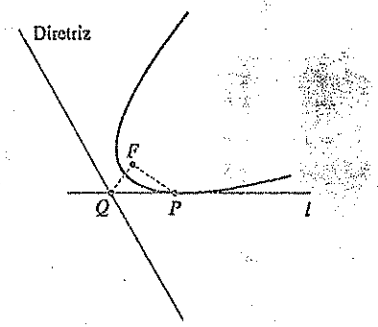
41 Sejam m e b números reais diferentes de zero.

(a) Se a reta $y = mx + b$ intercepta a parábola $y^2 = 4px$ em apenas um ponto, mostre que $p = mb$.

(b) Mostre que o coeficiente angular da tangente a $y^2 = 4px$ em $P(x_1, y)$ é $y_1/(2x_1)$.

42 Estabeleça a propriedade reflexiva da parábola. (*Sugestão*: Mostre que $d(Q, F) = d(F, P)$ na Figura 12.11 e use o resultado do Exercício 41.)

43 Suponha que a tangente l a uma parábola em P intercepte a diretriz em Q, conforme figura. Se F é o foco, prove que o ângulo PQF é reto.



12.2 ELIPSES

Pode-se definir uma elipse da seguinte maneira:

Definição (12.5) Uma elipse é o conjunto de todos os pontos de um plano, cuja soma das distâncias a dois pontos fixos (focos) é constante.

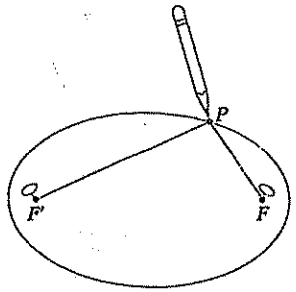


Figura 12.13

Constrói-se como segue uma elipse no papel: Fixam-se duas tachas em dois pontos arbitrários F e F', amarrando-se nelas as extremidades de um pedaço de barbante. Fixe um lápis no barbante, mantendo este tenso, e desloque o lápis sobre o papel, conforme a figura. A soma das distâncias $d(F,P)$ e $d(F',P)$ é o comprimento do barbante, sendo, pois, constante; assim, o lápis traçará uma elipse de focos F e F'. Mudando as posições de F e F' e mantendo fixo o comprimento do barbante, podemos variar consideravelmente a forma da elipse. Se F e F' são muito distantes um do outro, de tal modo que $d(F,F')$ seja quase igual ao comprimento do barbante, obtemos uma elipse alongada. Se $d(F,F')$ está próximo de zero, a elipse é quase circular. Se $F = F'$, temos um círculo de centro F.

Introduzindo sistemas adequados de coordenadas, podemos estabelecer equações simples para elipses. Escolhamos o eixo-x como a reta que passa pelos focos F e F', com origem no ponto médio do segmento $F'F$. O ponto médio é o centro da elipse. Se F tem coordenadas $(c, 0)$ com $c > 0$, então, tal como na Figura 12.14, F' tem coordenadas $(-c, 0)$. Logo, a distância entre F e F' é $2c$. Denotaremos por $2a$ a soma constante das distâncias de P a F e F'. Para obter pontos que não estejam sobre o eixo-x, devemos ter $2a > 2c$ – isto é, $a > c$. Por definição, $P(x, y)$ está na elipse se e somente se as seguintes equações equivalentes são verdadeiras:

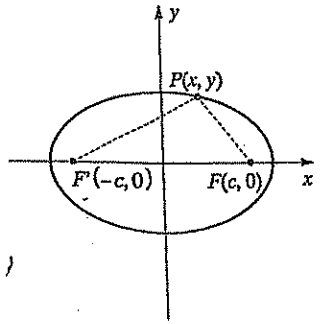


Figura 12.14

$$d(P, F) + d(P, F') = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Elevando ao quadrado ambos os membros da última equação, temos

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$$

ou

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx$$

Novamente elevando ambos os membros ao quadrado,

$$a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$$

ou

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Dividindo ambos os membros por $a^2(a^2 - c^2)$, obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

Lembrando que $a > c$ e, portanto, $a^2 - c^2 > 0$, fazemos

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} \quad \text{ou} \quad b^2 = a^2 - c^2,$$

o que nos dá

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Como $c > 0$ e $b^2 = a^2 - c^2$, segue-se que $a^2 > b^2$ e, então, $a > b$.

Mostramos que as coordenadas de todo ponto (x, y) da elipse na Figura 12.15 verificam a equação $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$.

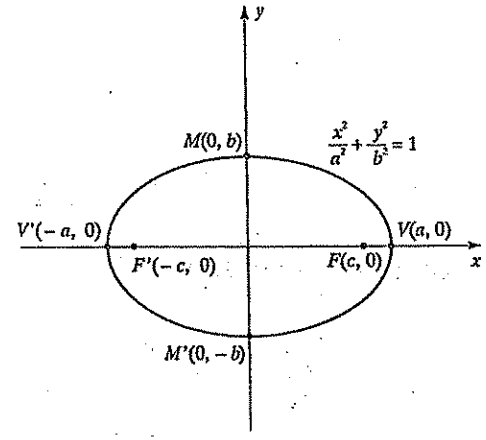


Figura 12.15

Reciprocamente, se (x, y) é uma solução desta equação, então, invertendo o raciocínio, vemos que o ponto (x, y) pertence à elipse.

Podemos achar os interceptos-x da elipse fazendo $y = 0$ na equação. Temos então $x^2/a^2 = 1$, ou $x^2 = a^2$, e conseqüentemente os interceptos-x são a e $-a$. Os pontos correspondentes $V(a, 0)$ e $V'(-a, 0)$ do gráfico são os vértices da elipse (ver Figura 12.15). O segmento $V'V$ é o eixo maior. Da mesma forma, fazendo $x = 0$, obtemos $y^2/b^2 = 1$, ou $y^2 = b^2$. Logo, os interceptos-y são b e $-b$. O segmento que une $M'(0, -b)$ e $M(0, b)$ é o eixo menor da elipse. Como $a > b$, o eixo maior é sempre maior do que o eixo menor.

Mediante testes de simetria, vemos que a elipse é simétrica em relação ao eixo-x, ao eixo-y e à origem.

O que acabamos de ver pode ser resumido desta forma.

Teorema (12.6)

O gráfico da equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

para $a^2 > b^2$ é uma elipse com vértice $(\pm a, 0)$. As extremidades do eixo menor são $(0, \pm b)$. Os focos são $(\pm c, 0)$, com $c^2 = a^2 - b^2$.

EXEMPLO 1

Discuta $4x^2 + 18y^2 = 36$, e trace o gráfico.

SOLUÇÃO

Para obter a forma do Teorema (12.6), dividimos ambos os membros da equação por 36 e simplificamos. Isto conduz a

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{2} = 1$$

que está na forma própria, com $a^2 = 9$ e $b^2 = 2$. Assim, $a = 3$ e $b = \sqrt{2}$; os extremos do eixo maior são $(\pm 3, 0)$ e os extremos do eixo menor são $(0, \pm \sqrt{2})$. Como

$$c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 2 = 7, \text{ ou } c = \sqrt{7}$$

os focos são $(\pm \sqrt{7}, 0)$. O gráfico é o da Figura 12.16.

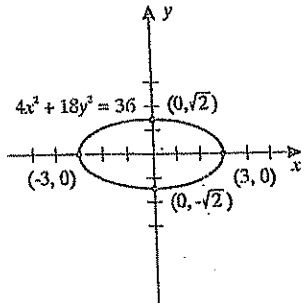


Figura 12.16

EXEMPLO 2

Ache a equação da elipse de vértices $(\pm 4, 0)$ e focos $(\pm 2, 0)$.

SOLUÇÃO

Na notação do Teorema (12.6), $a = 4$ e $c = 2$. Como $c^2 = a^2 - b^2$, vemos que $b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 4 = 12$. Isto nos dá

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$$

Às vezes, escolhe-se o eixo maior da elipse segundo o eixo-y. Se os focos são $(0, \pm c)$, então, pelo mesmo tipo de argumento já empregado, obtemos o seguinte.

Teorema (12.7)

O gráfico da equação

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

para $a^2 > b^2$ é uma elipse com vértices $(0, \pm a)$. As extremidades do eixo menor são $(\pm b, 0)$. Os focos são $(0, \pm c)$, onde $c^2 = a^2 - b^2$.

A Figura 12.17 é um gráfico típico.

Do que precede, vê-se que a equação de uma elipse com centro na origem e focos sobre um dos eixos coordenados, pode sempre ser escrita como

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 1 \qquad \text{ou} \qquad qx^2 + py^2 = pq$$

com p e q positivos e $p \neq q$. Se $p > q$, o eixo maior coincide com o eixo-x e se $q > p$, o eixo maior está sobre o eixo-y. Não é preciso memorizar estes fatos, porque, em qualquer problema concreto, o eixo maior pode ser determinado examinando-se os interceptos x e y.

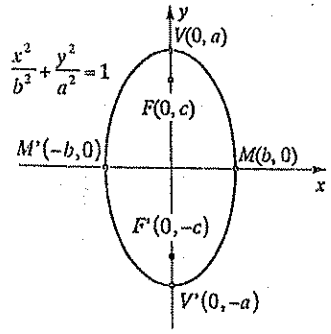


Figura 12.17

EXEMPLO 3

Trace o gráfico de $9x^2 + 4y^2 = 25$.

SOLUÇÃO

O gráfico é uma elipse com centro na origem e focos sobre um dos eixos coordenados. Para obter os interceptos-x, fazemos $y = 0$, o que dá

$$9x^2 = 25 \quad \text{ou} \quad x = \pm \frac{5}{3}$$

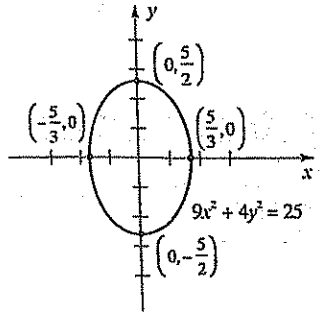


Figura 12.18

Analogamente, para determinar os interceptos-y, fazemos $x = 0$, obtendo

$$4y^2 = 25 \quad \text{ou} \quad y = \pm\frac{5}{2}$$

Isto nos permite esboçar o traçado da elipse (ver Figura 12.18). Como $\frac{5}{3} < \frac{5}{2}$, o eixo maior está sobre o eixo-y.

Para determinar os focos, calculamos primeiro

$$c^2 = a^2 - b^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{125}{36}$$

Assim, $c = 5\sqrt{5}/6$ e os focos são $(0, \pm 5\sqrt{5/6})$.

Podemos utilizar as fórmulas (12.3) de translação de eixos para generalizar nosso trabalho para uma elipse com centro em um ponto arbitrário $C(h, k)$ no plano-xy. Por exemplo, como o gráfico de

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

é uma elipse com centro em O' em um plano $x'y'$ (ver Figura 12.19), sua equação no sistema xy de coordenadas é

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

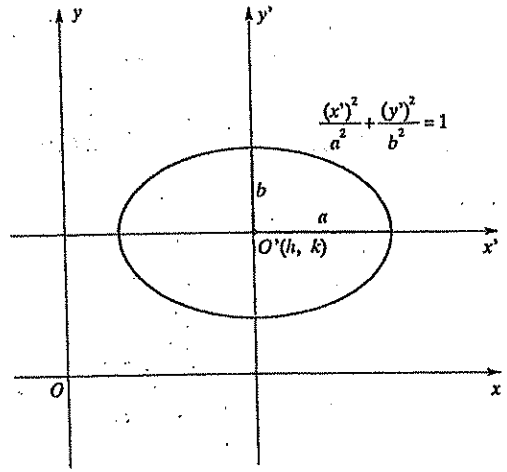


Figura 12.19

Desenvolvendo os quadrados indicados na última equação e simplificando, obtemos uma equação da forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

onde os coeficientes são números reais e A e C são ambos positivos. Reciprocamente, partindo de uma tal equação e completando quadrados, podemos obter uma forma que evidencie o centro da elipse e os comprimentos dos eixos maior e menor. O próximo exemplo ilustra esta técnica.

EXEMPLO 4

Discuta a equação $16x^2 + 9y^2 + 64x - 18y - 71 = 0$, e trace seu gráfico.

SOLUÇÃO

Começamos escrevendo a equação na forma

$$16(x^2 + 4x\ ) + 9(y^2 - 2y\ ) = 71$$

Em seguida, completamos os quadrados das expressões entre parênteses:

$$16(x^2 + 4x + 4) + 9(y^2 - 2y + 1) = 71 + 64 + 9$$

Adicionando 4 à expressão dentro do primeiro par de parênteses, devemos adicionar 64 ao membro direito. Analogamente, adicionando 1 à expressão dentro do segundo par de parênteses, devemos adicionar 9 ao membro direito. A última equação pode ser escrita

$$16(x+2)^2 + 9(y-1)^2 = 144$$

Dividindo por 144, obtemos

$$\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$$

que é da forma

$$\frac{(x')^2}{9} + \frac{(y')^2}{16} = 1,$$

com $x' = x + 2$ e $y' = y - 1$. Isto equivale a fazer $h = -2$ e $k = 1$ nas fórmulas de translação de eixos.

O gráfico da equação $(x')^2/9 + (y')^2/16 = 1$ é uma elipse com centro na origem O' no plano $x'y'$ e eixo maior sobre o eixo-y'. Segue-se que o gráfico da equação é uma elipse com centro $C(-2, 1)$ no plano xy e eixo maior sobre a reta vertical $x = -2$. Com $a = 4$ e $b = 3$, obtemos a elipse da Figura 12.20.

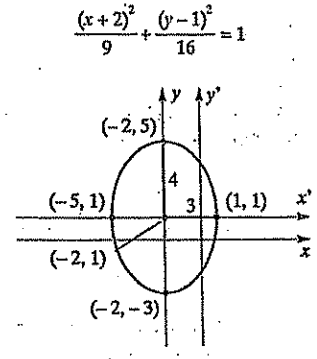


Figura 12.20

Para achar os focos, calculamos primeiro

$$c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 9 = 7$$

A distância do centro da elipse aos focos é $c = \sqrt{7}$. Como o centro é $(-2, 1)$, os focos são $(-2, 1 \pm \sqrt{7})$.

Nos dois próximos exemplos empregaremos métodos de cálculo para resolver vários problemas que envolvem elipses.

EXEMPLO 5

(a) Use a diferenciação implícita para achar uma fórmula para o coeficiente angular da tangente em $P(x_1, y_1)$ à elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

com $a > b > 0$.

(b) Aplique a fórmula obtida em (a) para determinar onde a tangente é horizontal ou vertical.

(c) Prove que a equação da tangente em $P(x_1, y_1)$ é

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

SOLUÇÃO

(a) Diferenciando implicitamente a equação da elipse, obtemos

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0 \qquad \text{ou} \qquad y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

Logo, o coeficiente angular m da tangente em $P(x_1, y_1)$ é

$$m = -(b^2 x_1)/(a^2 y_1)$$

(b) A tangente é horizontal se $b^2 x = 0$, ou $x = 0$, o que nos dá os pontos extremos $(0, \pm b)$ do eixo menor.

A tangente é vertical se $a^2 y = 0$, ou $y = 0$, o que nos dá os vértices $(\pm a, 0)$ da elipse.

(c) Aplicando a fórmula para m em (a), obtemos como equação da tangente em $P(x_1, y_1)$

$$y - y_1 = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}(x - x_1)$$

Podemos modificar a forma desta equação como segue:

$$a^2 y_1 y - a^2 y_1^2 = -b^2 x_1 x + b^2 x_1^2$$
$$b^2 x_1 x + a^2 y_1 y = b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2$$

Dividindo ambos os membros por $a^2 b^2$, obtemos

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}$$

Como $P(x_1, y_1)$ pertence à elipse, (x_1, y_1) é uma solução da equação em (a) e, assim, o membro direito da última equação é igual a 1. Isto completa a prova.

EXEMPLO 6

Ache a área da região delimitada por uma elipse cujos eixos maior e menor têm comprimentos $2a$ e $2b$, respectivamente.

SOLUÇÃO

Pelo Teorema (12.6), vemos que a equação da elipse é $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$. Resolvendo em relação a y, obtemos

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

O gráfico da elipse tem a forma geral exibida na Figura 12.16 e, daí, por simetria, basta achar a área da região no primeiro quadrante e multiplicar o resultado por 4. De acordo com (5.19),

$$A = 4\int_0^a y\, dx = 4\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

Fazendo a substituição trigonométrica $x = a \operatorname{sen} \theta$, obtemos

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos\theta \text{ e } dx = a \cos\theta\, d\theta$$

Como os valores de θ que correspondem a $x = 0$ e $x = a$ são $\theta = 0$ e $\theta = \pi/2$, respectivamente, obtemos

$$A = 4\frac{b}{a}\int_0^{\pi/2} a^2 \cos^2\theta\, d\theta = 4ab\int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2\theta}{2}\, d\theta$$

$$= 2ab\left[\theta + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\right]_0^{\pi/2} = 2ab\,[\pi/2] = \pi ab$$

Como caso especial, se $b = a$, a elipse é um círculo e $A = \pi a^2$.

As elipses podem ser muito achatadas ou quase circulares. Para obter informações sobre o *achatamento* de uma elipse, costuma-se lançar mão da *excentricidade e* (não confundir com a base dos logaritmos naturais). A excentricidade é definida a seguir, onde a, b e c têm os mesmos significados que anteriormente.

Definição (12.8)

A excentricidade e de uma elipse é

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

Consideremos a elipse $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$, e suponhamos fixo o comprimento $2a$ do eixo maior e variável o comprimento $2b$ do eixo menor. Como $\sqrt{a^2 - b^2} < a$, vê-se que $0 < e < 1$. Se $e \approx 1$, então $\sqrt{a^2 - b^2} \approx a$ assim, $b \approx 0$. Neste caso, a elipse é muito achatada. Se $e \approx 0$, então $\sqrt{a^2 - b^2} \approx 0$ e $a \approx b$. Neste caso, a elipse é quase circular.

Após muitos anos de estudo de uma enorme quantidade de dados empíricos, o astrônomo alemão Johannes Kepler (1571-1630) formulou três leis que descrevem o movimento dos planetas em torno do sol. (Estas leis serão demonstradas no Capítulo 15.) A primeira lei de Kepler afirma que a órbita de cada planeta do sistema solar é uma elipse que tem o Sol como um dos focos. A maior parte dessas órbitas são quase circulares e, por conseguinte, suas excentricidades estão próximas de 0. A título de ilustração, para a Terra, $e \approx 0{,}017$; para Marte, $e \approx 0{,}093$; e para Urano, $e \approx 0{,}046$. As órbitas de Mercúrio e Plutão são menos circulares, com excentricidade 0,206 e 0,249, respectivamente.

Muitos cometas têm órbitas elípticas com o Sol como um dos focos. Neste caso, a excentricidade e está próxima de 1, e a elipse é muito achatada. Utiliza-se a **unidade astronômica** (UA) – isto é, a distância média da Terra ao Sol – para indicar grandes distâncias. (1 UA ≈ 93.000.000 milhas ≈ 148.800.000 quilômetros.)

EXEMPLO 7

O cometa de Halley tem uma órbita elíptica com excentricidade $e \approx 0{,}967$. A menor distância do cometa de Halley ao Sol é 0,587 UA. Dê uma aproximação da distância máxima do cometa ao Sol, a menos de 0,1 UA.

Cometa de Halley

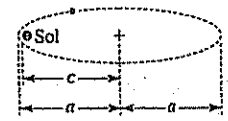


Figura 12.21

SOLUÇÃO

A Figura 12.21 ilustra a órbita do cometa, onde c é a distância do centro da elipse a um foco (o Sol) e $2a$ é o comprimento do eixo maior.

Como $a - c$ é a distância mínima entre o Sol e o cometa, temos (em UA)

$$a - c = 0{,}587, \quad \text{ou} \quad a = c + 0{,}587$$

Como $e = c/a = 0{,}967$,

$$c = 0{,}967a = 0{,}967(c + 0{,}587))$$

$$c \approx 0{,}967c + 0{,}568$$

Assim,

$$0{,}033 \approx 0{,}568 \text{ e } c \approx \frac{0{,}568}{0{,}033} \approx 17{,}2$$

Conseqüentemente,

$$a = c + 0{,}587$$

$$a \approx 17{,}2 + 0{,}587 \approx 17{,}8$$

e a distância máxima do Sol ao cometa é

$$a + c \approx 17{,}8 + 17{,}2, \quad \text{ou} \quad a + c \approx 35{,}0 \text{ AU}$$

Uma elipse goza da propriedade reflexiva análoga à da parábola, discutida no fim da Seção 12.1. Como ilustração, seja l a tangente em um ponto P de uma elipse com focos F e F', conforme Figura 12.22. Se α é o ângulo entre $F'P$ e l e se β é o ângulo entre FP e l, pode-se mostrar que $\alpha = \beta$. Assim, se um raio de luz ou som emana de um foco, será refletido no outro foco. Esta propriedade é utilizada na construção de certos equipamentos óticos. É também percebida nas *galerias sussurrantes* – isto é, compartimentos com tetos em forma elítica, nos quais uma pessoa que sussurra em um foco pode ser ouvida no outro foco. A rotunda do Capitólio em Washington, D.C., e o Tabernáculo dos Mórmons, em Salt Lake City, são exemplos de galerias sussurrantes.

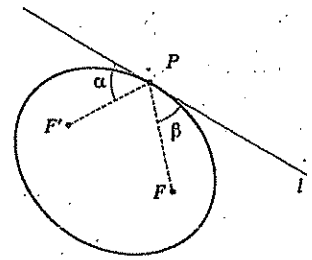


Figura 12.22

EXERCÍCIOS 12.2

Exercs. 1-14: Ache os vértices e os focos da elipse. Esboce o gráfico, mostrando os focos.

1 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

2 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

3 $4x^2 + y^2 = 16$

4 $y^2 + 9x^2 = 9$

5 $5x^2 + 2y^2 = 10$

6 $\frac{1}{2}x^2 + 2y^2 = 8$

7 $4x^2 + 25y^2 = 1$

8 $10y^2 + x^2 = 5$

9 $4x^2 + 9y^2 - 32x - 36y + 64 = 0$

10 $x^2 + 2y^2 + 2x - 20y + 43 = 0$

11 $9x^2 + 16y^2 + 54x - 32y - 47 = 0$

12 $4x^2 + 9y^2 + 24x + 18y + 9 = 0$

13 $25x^2 + 4y^2 - 250x - 16y + 541 = 0$

14 $4x^2 + y^2 = 2y$

Exercs. 15-24: Ache a equação da elipse que tem centro na origem e verifica as condições dadas.

15 vértices $V(\pm 8, 0)$ focos $F(\pm 5, 0)$

16 vértices $V(0, \pm 7)$ focos $F(0, \pm 2)$

17 vértices $V(0, \pm 5)$ eixo menor de comprimento 3

18 focos $F(\pm 3, 0)$ eixo menor de comprimento 2

19 vértices $V(0, \pm 6)$ passando por $(3, 2)$

20 passando por $(2, 3)$ e $(6, 1)$

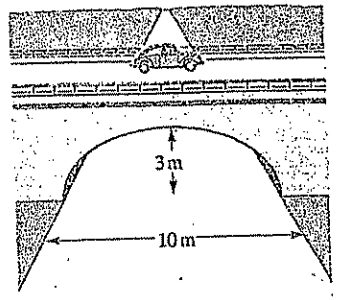
21 excentricidade $\frac{3}{4}$ vértices $V(0, \pm 4)$

22 excentricidade $\frac{1}{2}$ vértices no eixo-x, passando por $(1, 3)$

23 Interceptos-x ± 2, interceptos-y $\pm \frac{1}{3}$

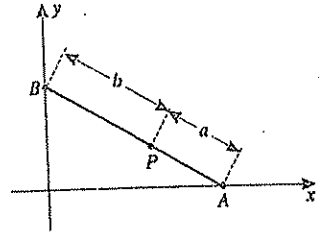
24 interceptos-x $\pm \frac{1}{2}$ interceptos-y ± 4

25 O arco de uma ponte é semi-elíptico, com eixo maior horizontal. A base do arco tem 10 metros e a parte mais alta está a 3 metros acima da rodovia, conforme figura. Determine a altura do arco a 2 metros do centro da base.



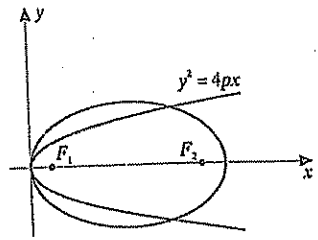
26 Suponha que o comprimento do eixo maior da órbita da Terra seja de 186.000.000 milhas, com excentricidade de 0,017. Determine, a menos de 1.000 milhas, as distâncias máxima e mínima da Terra ao Sol.

27 Um segmento de comprimento $a + b$ se move com seus extremos A e B sempre sobre os eixos coordenados (ver figura). Prove que o ponto P descreve uma elipse.



28 Uma elipse tem um vértice na origem e focos $F_1(p, 0)$ e $F_2(p + 2c, 0)$, conforme figura. Se o foco F_1 é fixo e (x, y) pertence à elipse, mostre que $\lim_{c \to \infty} y^2 = 4px$.

(Assim, uma parábola pode ser considerada como uma elipse com "um dos focos no infinito".)

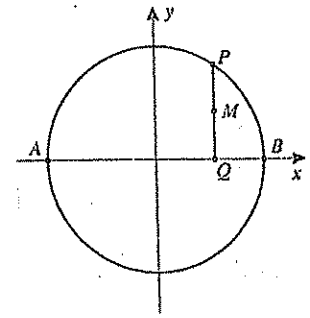


29 Ref. Figura 4.56 do Capítulo 4. Em um sistema mola-massa, a energia total E (a soma da energia potencial e da energia cinética) é dada por $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$, onde x é o deslocamento da massa m a partir da posição de equilíbrio, v é a velocidade da massa e k é a constante da mola na lei de Hooke.

(a) Para uma velocidade inicial e deslocamento dados, a energia total do sistema é constante. Mostre que v e x estão relacionados por uma equação cujo gráfico é uma elipse e ache os comprimentos dos eixos maior e menor.

(b) Ache uma relação entre a área A da elipse em (a) e a energia total E.

30 De um ponto P no círculo $x^2 + y^2 = 4$, traça-se um segmento PQ perpendicular ao diâmetro AB, determinando-se o ponto médio M (ver figura). Determine a equação da coleção de todos esses pontos médios M, e trace o gráfico.



31 Se tangentes à elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$ se interceptam sobre o eixo-y no ponto $(0, 6)$, ache os pontos de tangência.

32 (a) Mostre que o comprimento C da elipse de equação $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ é dado por

$$C = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \theta}\, d\theta$$

onde e é a excentricidade. (Trata-se de uma *integral elíptica*, que não pode ser calculada com os métodos do Capítulo 9.)

(b) O planeta Mercúrio percorre uma órbita elíptica com $e = 0{,}206$ e $a = 0{,}387$ UA. Use a parte (a) e a regra de Simpson, com $n = 10$, para obter uma aproximação do comprimento da órbita.

(c) Ache as distâncias máxima e mínima de Mercúrio ao Sol.

Exercs. 33-34: Determine as equações da tangente e da normal à elipse do ponto P.

33 $5x^2 + 4y^2 = 56$; $P(-2, 3)$

34 $9x^2 + 4y^2 = 72$; $P(2, 3)$

35 Ache o volume do sólido gerado pela revolução, em torno do eixo-x, da região delimitada pela elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

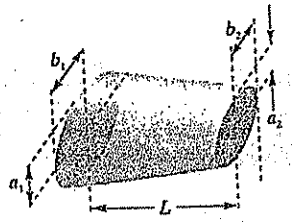
36 Faça o Exercício 35 com a região girando em torno do eixo-y.

37 A base de um sólido é uma região delimitada por uma elipse de eixos maior e menor com comprimentos de 16 e 9, respectivamente. Ache o volume do sólido, se toda secção transversa por um plano perpendicular ao eixo maior tem a forma de um quadrado.

38 Faça o Exercício 37 se a secção transversa tem a forma de um triângulo.

39 Um modelo comum para os membros humanos é o *tronco de cone elíptico* exibido na figura a seguir, onde as seções transversas perpendiculares ao eixo do tronco são elípticas e têm a mesma excentricidade. Para os membros humanos, a excentricidade típica varia de 0,6 a valores próximos a 1. Se $k = a_1/b_1 = a_2/b_2$ e se L é o comprimento do membro, mostre que o volume V é dado pela equação

$$V = (\tfrac{1}{3}\pi L/k)(a_1^2 + a_1a_2 + a_2^2)$$



40 A base de um cone elíptico reto tem eixos maior e menor de comprimentos $2a$ e $2b$, respectivamente. Determine o volume, se a altura do cone é h.

41 A forma da superfície da Terra pode ser aproximada fazendo-se girar em torno do eixo-x a elipse $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$, com $a = 6.378$ km e $b = 6.356$ km. Aproxime a área da superfície a menos de 10^6 km^2. (*Sugestão*: Use (6.19) com $f(x) = \sqrt{b^2 - (b^2/a^2)x^2}$, e faça a substituição $u = (b/a)x$).

42 Ache as dimensões do retângulo de área máxima que pode ser inscrito em uma elipse de semi-eixos a e b, se dois lados do retângulo devem ser paralelos ao eixo maior.

43 Prove que se a normal a um ponto $P(x_1, y_1)$ de uma elipse passa pelo centro da elipse, então a elipse é um círculo.

44 Estabeleça a propriedade reflexiva da elipse mostrando que $\alpha = \beta$ na Figura 12.22.

Exercs. 45-46: Grafe, no mesmo sistema de eixos, as elipses dadas. (a) Estime seus pontos de intersecção. (b) Estabeleça uma integral para aproximar a área interior comum às duas elipses.

45 $\dfrac{x^2}{2,9} + \dfrac{y^2}{2,1} = 1$; $\dfrac{x^2}{4,3} + \dfrac{(y-2,1)^2}{4,9} = 1$

46 $\dfrac{x^2}{3,9} + \dfrac{y^2}{2,4} = 1$; $\dfrac{(x+1,9)^2}{4,1} + \dfrac{y^2}{2,5} = 1$

12.3 HIPÉRBOLES

A definição de hipérbole é análoga à de elipse. A única diferença é que, em lugar de considerarmos a *soma* das distâncias a dois pontos fixos, tomamos a *diferença*.

Definição (12.9) Uma **hipérbole** é o conjunto de todos os pontos de um plano, tais que a diferença de suas distâncias a dois pontos fixos do plano (os **focos**) é constante.

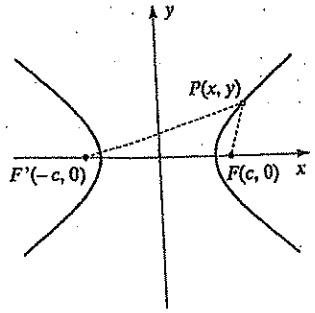


Figura 12.23

Para determinar uma equação simples de uma hipérbole, escolhemos um sistema coordenado com focos em $F(c, 0)$ e $F'(-c, 0)$ e denotamos por $2a$ a distância (constante). Referindo-nos à Figura 12.23, vemos que um ponto $P(x, y)$ pertence à hipérbole se e somente se,

$$d(P,F') - d(P,F) = 2a$$

ou

$$d(P,F) - d(P,F') = 2a$$

Para hipérboles (ao contrário de elipses) necessitamos de $a < c$ para obter pontos da hipérbole que não estejam sobre o eixo-x, pois, se P é um tal ponto, então, pela Figura 12.23, vemos que

$$d(P,F) < d(F',F) + d(P,F')$$

porque o comprimento de um lado de um triângulo é sempre menor do que a soma dos outros dois. Analogamente,

$$d(P,F') < d(F',F) + d(P,F)$$

Formas equivalentes das duas desigualdades anteriores:

$$d(P,F) - d(P,F') < d(F',F)$$

e

$$d(P,F') - d(P,F) < d(F',F)$$

Como as diferenças nos membros esquerdos dessas desigualdades são ambas iguais a $2a$, e como $d(F',F) = 2c$, as duas últimas desigualdades implicam $2a < 2c$, ou $a < c$.

As equações $d(P,F') - d(P,F) = 2a$ e $d(P,F) - d(P,F') = 2a$ podem ser substituídas pela equação (única)

$$|d(P,F) - d(P,F')| = 2a$$

Aplicando a fórmula da distância para achar $d(P,F)$ e $d(P,F')$, obtemos a equação da hipérbole

$$\left|\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2}\right| = 2a$$

Com o mesmo tipo de simplificação usado na dedução da equação da elipse, podemos escrever a equação precedente como

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

Fazendo, nesta equação,

$$b^2 = c^2 - a^2 \text{ com } b > 0,$$

obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Mostramos que as coordenadas de todo ponto (x, y) da hipérbole da Figura 12.23 verificam a última equação. Reciprocamente, se (x, y) é uma solução daquela equação, então, invertendo o raciocínio, vemos que o ponto (x, y) pertence à hipérbole.

Aplicando testes de simetria, vemos que a hipérbole é simétrica em relação a ambos os eixos e à origem. Os interceptos-x são $\pm a$. Os pontos correspondentes $V(a, 0)$ e $V'(-a, 0)$ são os **vértices**, e o segmento $V'V$ é o **eixo transverso** da hipérbole. A origem é o centro da hipérbole. O gráfico não tem intercepto-y, pois a equação $-y^2/b^2 = 1$ não tem solução.

Tudo o que se disse pode resumir-se da seguinte forma:

Teorema (12.10)

O gráfico da equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

é uma hipérbole de vértices $(\pm a, 0)$. Os focos são $(\pm c, 0)$, com $c^2 = a^2 + b^2$.

Resolvendo a equação $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ em relação a y, obtemos

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

Não há pontos (x, y) no gráfico se $x^2 - a^2 < 0$ ou, equivalentemente, se $-a < x < a$. Há pontos $P(x, y)$ no gráfico se $x \geq a$ ou $x \leq -a$.

A reta $y = (b/a)x$ é uma assíntota da hipérbole, porque a distância vertical $p(x)$ entre o ponto $P(x, y)$ da hipérbole e o ponto correspondente $P'(x, y_1)$ da reta tende para 0 quando x tende para infinito. Para prová-lo, notemos que, se $x > 0$, então

$$p(x) = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2})$$

Pode-se mostrar, racionalizando o numerador, que

$$\frac{x - \sqrt{x^2 - a^2}}{1} = \frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$$

Logo, $$\lim_{x \to \infty} p(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{b}{a} \frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = 0$$

Analogamente, $\lim_{x \to -\infty} p(x) = 0$. Pode-se mostrar também que a reta $y = (-b/a)x$ é assíntota da hipérbole no Teorema 12.10.

As assíntotas $y = \pm (b/a)x$ servem de guia para o traçado do gráfico. Uma froma conveniente de traçar as assíntotas é grafar primeiro os vértices $V(a, 0)$, $V'(-a, 0)$ e os pontos $W(0, b)$, $W'(0, -b)$ (ver Figura 12.24). O segmento $W'W$, de comprimento $2b$, é o eixo conjugado da hipérbole. Traçando-se retas horizontais e verticais pelos pontos extremos dos eixos conjugado e transverso, respectivamente, então as diagonais do retângulo resultante têm coeficientes angulares b/a e $-b/a$. Assim, prolongando essas diagonais, obtemos retas de equações $y = (\pm b/a)x$. Traça-se então a hipérbole conforme a Figura 12.24, usando as assíntotas como guias. As duas curvas que integram a hipérbole são os ramos da hipérbole.

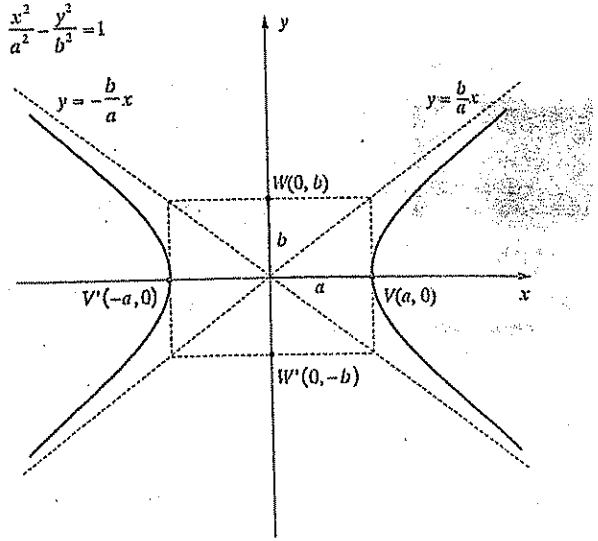


Figura 12.24

EXEMPLO 1

Discuta a equação $9x^2 - 4y^2 = 36$ e trace o gráfico.

SOLUÇÃO

Dividindo ambos os membros por 36, obtemos

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

que tem a forma indicada no Teorema (12.10), com $a^2 = 4$ e $b^2 = 9$. Logo, $a = 2$ e $b = 3$. Os vértices $(\pm 2, 0)$ e as extremidades $(0, \pm 3)$ do eixo conjugado determinam um retângulo cujas diagonais (prolongadas) nos dão as assíntotas. A Figura 12.25 exibe o gráfico da equação.

$9x^2 - 4y^2 = 36$

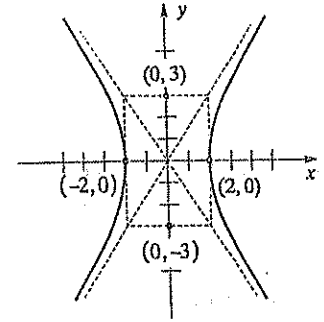


Figura 12.25

As equações das assíntotas $y = \pm \frac{3}{2}x$, podem ser obtidas apelando para o gráfico ou para as equações $y = \pm (b/a)x$.

Para achar os focos, calculamos

$$c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 9 = 13$$

Assim, $c = \sqrt{13}$ e os focos são $(\pm\sqrt{13}, 0)$.

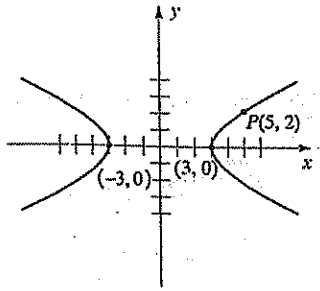


Figura 12.26

O exemplo precedente mostra que, na hipérbole, nem sempre se verifica $a > b$, como no caso da elipse. Na realidade, podemos ter $a < b$, $a > b$ ou $a = b$.

EXEMPLO 2

Uma hipérbole tem vértices $(\pm 3, 0)$ e passa pelo ponto $P(5, 2)$. Ache sua equação, focos e assíntotas.

SOLUÇÃO

Começamos esboçando uma hipérbole que passa pelo ponto $P(5, 2)$ e tenha vértices $(\pm 3, 0)$ (Figura 12.26).

A equação da hipérbole tem a forma

$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Como $P(5, 2)$ pertence à hipérbole, as coordenadas x e y verificam a última equação, isto é,

$$\frac{25}{9} - \frac{4}{b^2} = 1$$

Resolvendo em relação a b^2 temos $b^2 = \frac{9}{4}$, e assim a equação desejada é

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{\frac{9}{4}} = 1$$

ou, equivalentemente, $x^2 - 4y^2 = 9$.

Para achar os focos, calculamos primeiro

$$c^2 = a^2 + b^2 = 9 + \frac{9}{4} = \frac{45}{4}$$

Logo, $c = \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{5}$, e os focos são $(\pm \frac{3}{2}\sqrt{5},\ 0)$.

As equações gerais das assíntotas são $y = \pm (b/a)x$. Fazendo $a = 3$ e $b = \frac{3}{2}$, obtemos $y = \pm \frac{1}{2}x$.

Se os focos da hipérbole são os pontos $(0, \pm c)$ no eixo-y, então, pelo mesmo argumento anterior, obtemos o teorema seguinte.

Teorema (12.11)

O gráfico da equação

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

é uma hipérbole com vértices $(0, \pm a)$. Os focos são $(0, \pm c)$, com $c^2 = a^2 + b^2$.

Para a hipérbole do teorema precedente, os pontos extremos do eixo conjugado são $W(b, 0)$ e $W'(-b, 0)$. Obtemos as assíntotas como anteriormente, utilizando as diagonais do retângulo determinado por esses pontos, os vértices e retas paralelas aos eixos coordenados. O gráfico é o da Figura 12.27. As equações das assíntotas são $y = \pm (a/b)x$. Note a diferença entre estas equações e as equações $y = \pm (b/a)x$ das assíntotas da hipérbole considerada anteriormente.

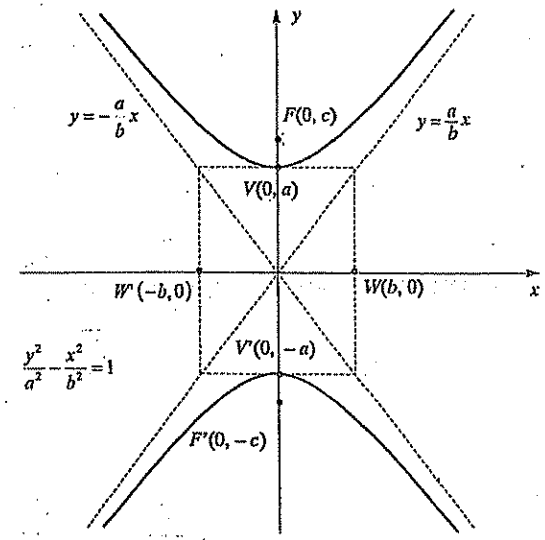


Figura 12.27

EXEMPLO 3

Discuta a equação $4y^2 - 2x^2 = 1$ e trace o gráfico.

$4y^2 - 2x^2 = 1$

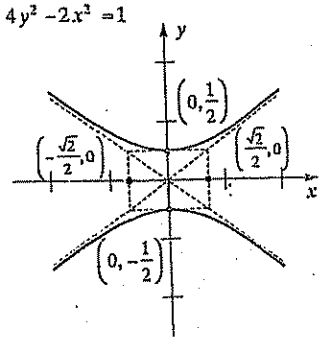


Figura 12.28

SOLUÇÃO

Podemos chegar à forma do último teorema escrevendo a equação

$$\frac{y^2}{\frac{1}{4}} - \frac{x^2}{\frac{1}{2}} = 1$$

Assim, $a^2 = \frac{1}{4}$, $b^2 = \frac{1}{2}$, $c^2 = a^2 + b^2 = \frac{3}{4}$

e conseqüentemente

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad c = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Os vértices são $(0, \pm\frac{1}{2})$, os focos são $(0, \pm\sqrt{3}/2)$, e os pontos extremos do eixo conjugado são $(\pm\sqrt{2}/2, 0)$. O gráfico é o da Figura 12.28.

Para obter equações das assíntotas, podemos usar $y = \pm(a/b)x$, obtendo $y = \pm(\sqrt{2}/2)x$.

Tal como no caso da elipse, podemos utilizar translações de eixos para generalizar nosso trabalho. Esta técnica é ilustrada pelo exemplo seguinte.

EXEMPLO 4

Discuta a equação $9x^2 - 4y^2 - 54x - 16y + 29 = 0$ e esboce o gráfico.

SOLUÇÃO

Dispomos nosso trabalho da seguinte forma:

$$\begin{aligned} 9(x^2 - 6x\ \ ) - 4(y^2 + 4y\ \ ) &= -29 \\ 9(x^2 - 6x + 9) - 4(y^2 + 4y + 4) &= -29 + 81 - 16 \\ 9(x-3)^2 - 4(y+2)^2 &= 36 \\ \frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{9} &= 1 \end{aligned}$$

Esta equação é da forma

$$\frac{(x')^2}{4} - \frac{(y')^2}{9} = 1$$

com $x' = x - 3$ e $y' = y + 2$. Assim, transladamos os eixos x e y para a nova origem $C(3, -2)$. O gráfico é uma hipérbole com vértices no eixo-x' (a reta $y = -2$) e

$$a^2 = 4, \ b^2 = 9, \ c^2 = a^2 + b^2 = 13$$

$$\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$

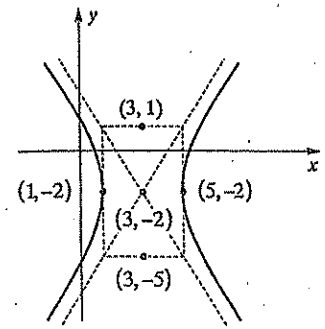


Figura 12.29

Logo,

$$a = 2, \quad b = 3, \quad c = \sqrt{13}$$

Como se vê na Figura 12.29, os vértices são $(3 \pm 2, -2)$, isto é, $(5, -2)$ e $(1, -2)$. As extremidades do eixo conjugado são $(3, -2 \pm 3)$, isto é, $(3, 1)$ e $(3, -5)$. Os focos são $(3 \pm \sqrt{13}, -2)$, e as equações das assíntotas são

$$y + 2 = \pm\tfrac{3}{2}(x - 3)$$

Os resultados das três últimas seções indicam que o gráfico de toda equação da forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

é uma cônica, com exceção apenas de certos casos degenerados em que se obtém um ponto, uma ou duas retas, ou nenhum gráfico. Embora tenhamos considerado apenas exemplos especiais, nossos métodos são absolutamente gerais. Se A e C são iguais e distintos de 0, então o gráfico, quando existe, é um círculo ou, em casos excepcionais, um ponto. Se A e C são diferentes mas têm o mesmo sinal, então, completando quadrados e fazendo uma translação adequada de eixos, obtemos uma equação cujo gráfico, quando existe, é uma elipse (ou um ponto). Se A e C têm sinais opostos, obtém-se a equação de uma hipérbole ou possivelmente, no caso degenerado, duas retas que se interceptam. Se A ou C (mas não ambos) é 0, o gráfico é uma parábola ou, em certos casos, um par de retas paralelas.

Concluiremos esta seção com algumas aplicações de hipérboles.

EXEMPLO 5

A estação A da Guarda Costeira está a 200 milhas diretamente a leste de outra estação B. Um navio percorre uma reta paralela à reta que une A a B, e a 50 milhas ao norte dela. Emitem-se sinais de rádio de A e B à razão de 980 ft/μsec (microssegundo). Se, à 1:00 p.m., o sinal de B chega ao navio 400 μ seg após o sinal de A, localize a posição do navio naquele instante.

SOLUÇÃO

Introduzamos um sistema de coordenadas conforme a Figura 12.30(i), com as estações nos pontos A e B no eixo-x e o navio em P na reta $y = 50$. Como à 1:00 p.m. o sinal de B leva mais 400 μseg do que o de A para chegar, a diferença $d_1 - d_2$ entre as distâncias indicadas naquele instante é

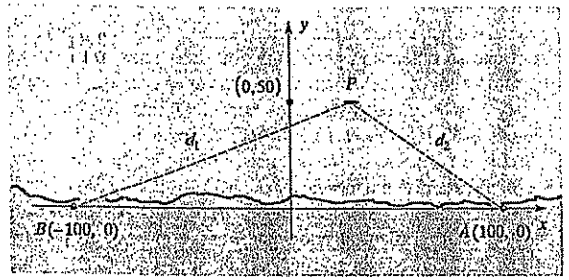
$$d_1 - d_2 = (980)(400) = 392.000ft$$

Dividindo por 5.280 (ft/mi), obtemos

$$d_1 - d_2 = \frac{392.000}{5280} = 74{,}2424 \ \ldots \text{ mi}$$

À 1:00 p.m., o ponto P está no ramo direito de uma hipérbole cuja equação é $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ (ver Figura 12.30(ii)), consistindo em todos os pontos cuja diferença das distâncias aos focos B e A é $d_1 - d_2$. Na dedução da equação $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ fizemos $d_1 - d_2 = 2a$; segue-se que, na situação presente,

(i)



(ii)

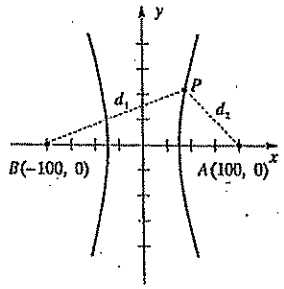


Figura 12.30

$$a = \frac{74.2424 \ \ldots}{2} = 37.1212\ldots \quad \text{e} \quad a^2 \approx 1.378$$

Como a distância c da origem a qualquer um dos focos é 100,

$$b^2 = c^2 - a^2 \approx 10.000 - 1.378 \text{ ou } b^2 \approx 8.622$$

Logo, a equação (aproximada) da hipérbole de focos A e B e que passa por P é

$$\frac{x^2}{1.378} - \frac{y^2}{8.622} = 1$$

Fazendo $y = 50$ (a coordenada-y de P), obtemos

$$\frac{x^2}{1.378} - \frac{2.500}{8.622} = 1$$

Resolvendo em relação a x, obtemos $x \approx 42{,}16$. Arredondando para a milha mais próxima, obtemos, para coordenadas de P, (42, 50), aproximadamente.

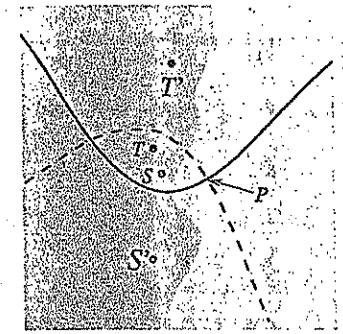


Figura 12.31

A base do sistema de navegação LORAN (Long Range Navigation) é uma extensão do método utilizado no Exemplo 5. Este sistema compreende dois pares de rádiotransmissores, tais como os situados em T, T' e S, S' na Figura 12.31. Suponha que os sinais emitidos pelos transmissores T e T' cheguem ao radiorreceptor de um navio localizado em um ponto P. Pode-se usar a diferença entre os tempos de chegada dos sinais para determinar a diferença nas distâncias de P a T e T'. Assim, P está em um ramo de uma hipérbole com focos em T e T'. Repetindo o processo para o outro par de transmissores, vemos que P também está em um ramo de uma hipérbole com focos em S e S'. A intersecção desses dois ramos determina a posição de P.

No próximo exemplo empregamos uma integral definida para determinar o volume de um sólido de revolução obtido a partir de uma região que tem uma hipérbole como parte de sua fronteira.

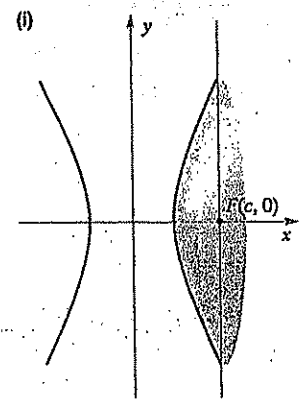
EXEMPLO 6

A região delimitada pela hipérbole de equação $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ e por uma reta vertical por um dos focos gira em torno do eixo-x. Ache o volume V do sólido gerado.

SOLUÇÃO

A região e o sólido de revolução estão ilustrados na Figura 12.32(i). O ponto $F(c, 0)$, com $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, é um foco da hipérbole. Conforme Figura 12.32(ii), consideremos o disco gerado por um retângulo vertical de altura y e largura dx. O volume do disco é $\pi y^2\, dx$.

(i)



(ii)

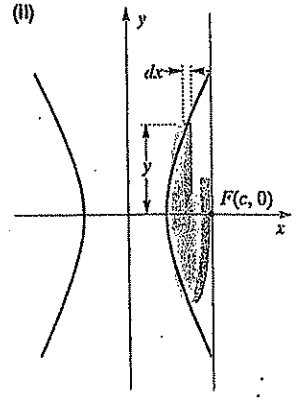


Figura 12.32

Aplicando o operador limite de soma $\int_a^c$, obtemos

$$V = \int_a^c \pi y^2\,dx = \pi \int_a^c b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)dx$$

$$= \pi b^2\left[\frac{x^3}{3a^2} - x\right]_a^c$$

$$= \frac{\pi b^2}{3a^2}\left[x(x^2 - 3a^2)\right]_a^c$$

$$= \frac{\pi b^2}{3a^2}[c(c^2 - 3a^2) - a(a^2 - 3a^2)]$$

$$= \frac{\pi b^2}{3a^2}[\sqrt{a^2 + b^2}\,(b^2 - 2a^2) + 2a^3]$$

A superfície do sólido no Exemplo 6 é parte do *hiperbolóide* gerado pela revolução de toda a hipérbole em torno do eixo-x. Estudaremos detalhadamente os hiperbolóides no Capítulo 14.

Uma hipérbole goza de propriedade reflexiva análoga à da elipse, estudada no fim da Seção 12.2. Como ilustração, seja l a tangente em um ponto P de uma hipérbole de focos F e F', conforme Figura 12.33. Se α é o ângulo agudo entre $F'P$ e l, e se β é o ângulo agudo entre FP e l, então $\alpha = \beta$. Dirigindo-se um raio de luz ao longo da reta l_1 para F, ele se refletirá em P segundo a reta l_2 para F'. Esta propriedade é utilizada na construção de telescópios do tipo Cassegrain (ver Exercício 43).

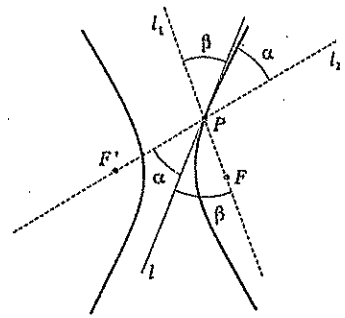


Figura 12.33

EXERCÍCIOS 12.3

Exercs. 1-18: Ache os vértices e os focos da hipérbole. Trace o gráfico, exibindo as assíntotas e os focos.

1 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ 2 $\frac{y^2}{49} - \frac{x^2}{16} = 1$

3 $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$ 4 $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{16} = 1$

5 $y^2 - 4x^2 = 16$ 6 $x^2 - 2y^2 = 8$

7 $x^2 - y^2 = 1$ 8 $y^2 - 16x^2 = 1$

9 $x^2 - 5y^2 = 25$ 10 $4y^2 - 4x^2 = 1$

11 $3x^2 - y^2 = -3$ 12 $16x^2 - 36y^2 = 1$

13 $25x^2 - 16y^2 + 250x + 32y + 109 = 0$

14 $y^2 - 4x^2 - 12y - 16x + 16 = 0$

15 $4y^2 - x^2 + 40y - 4x + 60 = 0$

16 $25x^2 - 9y^2 + 100x - 54y + 10 = 0$

17 $9y^2 - x^2 - 36y + 12x - 36 = 0$

18 $4x^2 - y^2 + 32x - 8y + 49 = 0$

Exercs. 19-28: Ache a equação da hipérbole que tem centro na origem e verifica as condições dadas.

19 Focos $F(0, \pm 4)$ vértices $V(0, \pm 1)$

20 Focos $F(\pm 8, 0)$ vértices $V(\pm 5, 0)$

21 Focos $F(\pm 5, 0)$ vértices $V(\pm 3, 0)$

22 Focos $F(0, \pm 3)$ vértices $V(0, \pm 2)$

23 Focos $F(0, \pm 5)$ comprimento do eixo conjugado 4

24 vértices $V(\pm 4, \pm 1)$, passa por $(8, 2)$

25 vértices $V(\pm 3, 0)$ assíntotas $y = \pm 2x$

26 focos $F(0, \pm 10)$ assíntotas $y = \pm \frac{1}{3}x$

27 interceptos-$x \pm 5$ assíntotas $y = \pm 2x$

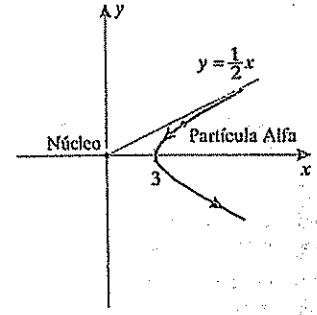
28 interceptos-$y \pm 2$ assíntotas $y = \pm \frac{1}{4}x$

29 Os gráficos das equações

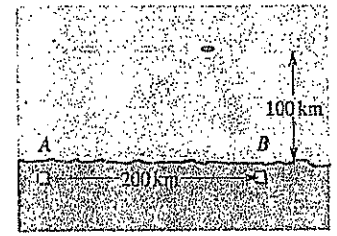
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ e } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

são chamados *hipérboles conjugadas*. Trace os gráficos delas no mesmo plano coordenado, com $a = 5$ e $b = 3$. Descreva a relação entre os dois gráficos.

30 Em 1911, o físico Ernest Rutherford (1871-1937) descobriu que quando partículas *alfa* são atiradas para o núcleo de um átomo, elas são eventualmente repelidas do núcleo segundo uma trajetória hiperbólica. A figura ilustra a trajetória de uma partícula que se encaminha para a origem ao longo da reta $y = \frac{1}{2}x$ e chega a 3 unidades do núcleo. Determine a equação da trajetória.



31 Um navio segue um curso paralelo a uma costa retilínea, a 100 km desta. O navio emite um pedido de socorro, que é recebido pela Guarda Costeira nas estações A e B, localizadas à distância de 200 km uma da outra, conforme figura. Medindo a diferença entre os instantes de recepção dos sinais, constata-se que o navio está 160 km mais próximo de B do que de A. Onde está o navio?



32 Conforme Exemplo 5, Seção 12.2. Prove que a equação da tangente ao gráfico da hipérbole $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$. Em $P(x_1, y_1)$ é

$$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

33 Se duas tangentes à hipérbole $9x^2 - y^2 = 36$ se interceptam sobre o eixo-y em (0, 6), ache os pontos de tangência.

34 Ache a equação de uma reta por $P(2, -1)$ tangente à hipérbole $x^2 - 4y^2 = 16$.

Exercs. 35-36: Determine as equações da tangente e da normal à hipérbole no ponto P.

35 $2x^2 - 5y^2 = 3$; $P(-2, 1)$

36 $3y^2 - 2x^2 = 40$; $P(2, -4)$

Exercs. 37-38: Seja R a região delimitada pela hipérbole de equação $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ e uma reta vertical por um foco.

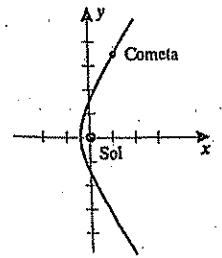
37 Ache a área da região R.

38 Ache o volume do sólido gerado pela revolução de R em torno do eixo-y.

39 Seja R a região delimitada pelo ramo direito da hipérbole $x^2 - y^2 = 8$ e pela reta vertical pelo foco. Ache a área da superfície curva do sólido gerado pela revolução de R em torno do eixo-x.

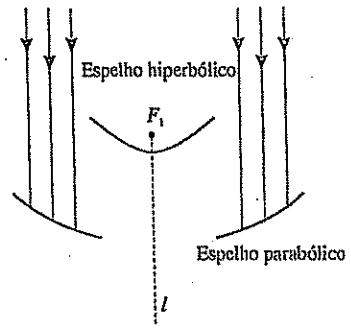
40 Mostre que o vértice é o ponto de um ramo de uma hipérbole mais próximo do foco associado àquele ramo.

41 Alguns cometas percorrem trajetórias hiperbólicas tendo o Sol como um dos focos (ver figura). Se a equação da trajetória de um cometa é $12x^3 + 24x - 4y^2 + 9 = 0$, qual é a menor distância (aproximadamente) em UA entre o cometa e o Sol? (*Sugestão*: Ver Exercício 40.)

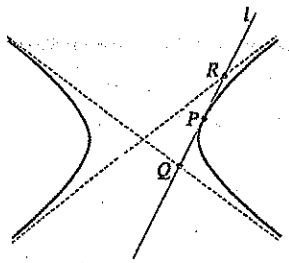


42 Estabeleça a propriedade reflexiva da hipérbole mostrando que $\alpha = \beta$ na Figura 12.33.

43 O telescópio Cassegrain (que data de 1672) utiliza as propriedades reflexivas de parábola e hipérbole. A figura exibe parte de um espelho parabólico com foco em F_1 e eixo ao longo da reta l, e um segundo espelho hiperbólico com um foco também em F_1 e o eixo transverso ao longo de l. Para onde convergem afinal os raios de luz paralelos ao eixo comum?



44 Seja l a tangente em um ponto P de uma hipérbole (ver figura). Se l intercepta as assíntotas em Q e R, mostre que P é o ponto médio de QR.



Exercs. 45-46: Grafe, no mesmo sistema de eixos, as hipérboles dadas. (a) Estime o ponto de intersecção no primeiro quadrante. (b) Estabeleça uma integral para aproximar a área da região do primeiro quadrante delimitada pelas hipérboles e por um eixo coordenado.

45 $\dfrac{(y - 0{,}1)^2}{1{,}6} - \dfrac{(x + 0{,}2)^2}{0{,}5} = 1$;
$\dfrac{(y - 0{,}5)^2}{2{,}7} - \dfrac{(x + 0{,}1)^2}{5{,}3} = 1$

46 $\dfrac{(x - 0{,}1)^2}{0{,}12} - \dfrac{y^2}{0{,}1} = 1$;
$\dfrac{x^2}{0{,}9} - \dfrac{(y - 0{,}3)^2}{2{,}1} = 1$

12.4 ROTAÇÃO DE EIXOS

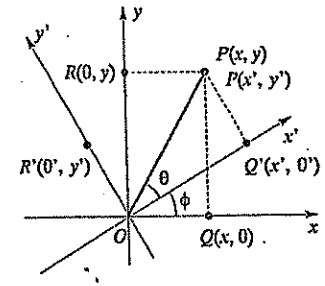


Figura 12.34

Podemos obter o plano-$x'y'$ usado em uma translação de eixos levando a origem O do plano-xy para uma nova posição $C(h, k)$ sem alterar as direções positivas dos eixos nem as unidades de comprimento. Introduziremos a seguir um novo plano coordenado obtido mantendo-se O fixo e girando os eixos x e y em torno de O para uma outra posição, denotada por x' e y'. Uma transformação deste tipo é uma **rotação de eixos.**

Consideremos a rotação de eixos da Figura 12.34 e seja ϕ o ângulo agudo da rotação do eixo-x positivo, a fim de coincidir com o eixo-x' positivo. Se (x, y) são as coordenadas de um ponto P no plano-xy, então (x', y') serão suas coordenadas no novo plano-$x'y'$.

Denotemos como na Figura 12.34 as projeções de P nos vários eixos, e seja θ o ângulo POQ'. Se $p = d(O, P)$, então

$$x' = p\cos\theta \qquad y' = p\operatorname{sen}\theta$$

$$x = p\cos(\theta + \phi) \qquad y = p\operatorname{sen}(\theta + \phi)$$

Aplicando as fórmulas de adição do seno e do cosseno, vemos que

$$x = p\cos\theta\cos\phi - p\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi$$

$$y = p\operatorname{sen}\theta\cos\phi + p\cos\theta\operatorname{sen}\phi$$

Como $x' = p\cos\theta$ e $y' = p\operatorname{sen}\theta$, temos (i) do próximo teorema. As fórmulas em (ii) podem ser obtidas de (i) resolvendo-se em relação a x' e y'.

Fórmulas de rotação de eixos (12.12)

Fazendo-se os eixos x e y girar de um ângulo agudo ϕ em torno da origem O, as coordenadas (x, y) e (x', y') de um ponto P nos planos xy e $x'y'$ estarão relacionadas a seguir:

(i) $x = x'\cos\phi - y'\operatorname{sen}\phi$, $\quad y = x'\operatorname{sen}\phi + y'\cos\phi$

(ii) $x' = x\cos\phi + y\operatorname{sen}\phi$ $\quad y' = -x\operatorname{sen}\phi + y\cos\phi$

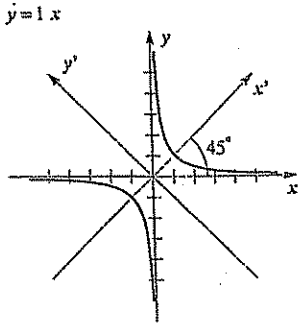


Figura 12.35

EXEMPLO 1

A Figura 12.35 ilustra o gráfico de $xy = 1$ ou, equivalentemente, $y = 1/x$. Giram-se os eixos coordenados de um ângulo de 45°. Ache a equação do gráfico em relação ao novo plano-$x'y'$.

SOLUÇÃO

Fazendo $\phi = 45°$ nas fórmulas (12.12)(i) de rotação de eixos, obtemos:

$$x = x'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - y'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')$$

$$y = x'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + y'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')$$

Substituindo na equação $xy = 1$, obtemos

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') = 1$$

Isto se reduz a

$$\frac{(x')^2}{2} - \frac{(y')^2}{2} = 1$$

que é a equação de uma hipérbole com vértices $(\pm\sqrt{2}, 0)$ sobre o eixo-x'. Note que as assíntotas tem equações $y' = \pm x'$ no novo sistema; estas correspondem aos eixos x e y originais.

O Exemplo 1 ilustra um método de eliminação do termo em xy de uma equação. Este método pode ser empregado para transformar qualquer função da forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

com $B \neq 0$, em uma equação em x' e y' que não contenha termo em $x'y'$. Isto é sempre possível, como passamos a demonstrar. Girando os eixos de um ângulo ϕ e utilizando as fórmulas (12.12)(i) de rotação de eixos para substituir x e y, obtemos

$$A(x'\cos\phi - y'\operatorname{sen}\phi)^2 + B(x'\cos\phi - y'\operatorname{sen}\phi)(x'\operatorname{sen}\phi + y'\cos\phi)$$
$$+ C(x'\operatorname{sen}\phi + y'\cos\phi)^2 + D(x'\cos\phi - y'\operatorname{sen}\phi)$$
$$+ E(x'\operatorname{sen}\phi + y'\cos\phi) + F = 0$$

Efetuando as multiplicações e reagrupando os termos, podemos escrever a equação na forma

$$A'(x')^2 + B'x'y' + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

com

$$A' = A\cos^2\phi + B\cos\phi\operatorname{sen}\phi + C\operatorname{sen}^2\phi$$

$$B' = 2(C - A)\operatorname{sen}\phi\cos\phi + B(\cos^2\phi - \operatorname{sen}^2\phi)$$

$$C' = A\operatorname{sen}^2\phi - B\operatorname{sen}\phi\cos\phi + C\cos^2\phi$$

$$D' = D\cos\phi + E\operatorname{sen}\phi$$

$$E' = -D\operatorname{sen}\phi + E\cos\phi$$

$$F' = F$$

Para eliminar o termo em $x'y'$, devemos escolher ϕ tal que $B' = 0$, isto é

$$2(C - A)\operatorname{sen}\phi\cos\phi + B(\cos^2\phi - \operatorname{sen}^2\phi) = 0$$

Com as fórmulas do ângulo duplo, esta equação pode escrever-se como

$$(C - A)\operatorname{sen} 2\phi + B\cos 2\phi = 0$$

que é equivalente a

$$\operatorname{cotg} 2\phi = \frac{A - C}{B}$$

Isto prova o próximo resultado.

Teorema (12.13) Para eliminar o termo em xy da equação

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

onde $B \neq 0$, escolhe-se um ângulo ϕ tal que

$$\operatorname{cotg} 2\phi = \frac{A - C}{B} \quad \text{com} \quad 0° < 2\phi < 180°$$

e aplicam-se as fórmulas de rotação de eixos.

O gráfico de qualquer equação em x e y do tipo apresentado no teorema precedente é uma cônica, a não ser em casos degenerados.

Ao utilizar o teorema precedente, note-se que $\operatorname{sen} 2\phi > 0$, pois $0° < 2\phi < 180°$. Além disso, como $\cot 2\phi = \cos 2\phi / \operatorname{sen} 2\phi$, os sinais de $\cot 2\phi$ e $\cos 2\phi$ são sempre os mesmos.

EXEMPLO 2

Discuta a equação $41x^2 - 24xy + 34y^2 - 25 = 0$ e trace o gráfico.

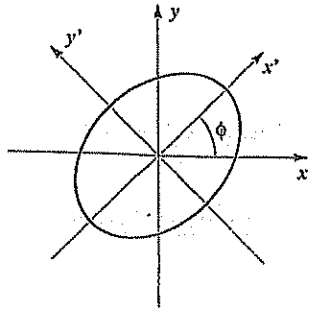


Figura 12.36

SOLUÇÃO

Com a notação do Teorema (12.13):

$$A = 41, \quad B = -24, \quad C = 34$$

$$\operatorname{cotg} 2\phi = \frac{41 - 34}{-24} = -\frac{7}{24}$$

Como cot 2ϕ é negativa, escolhemos 2ϕ tal que $90° < 2\phi < 180°$, e, conseqüentemente, $\cos 2\phi = -\frac{7}{25}$. Aplicamos então as fórmulas do ângulo metade, obtendo

$$\operatorname{sen} \phi = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\phi}{2}} = \sqrt{\frac{1 - (-\frac{7}{25})}{2}} = \frac{4}{5}$$

$$\cos \phi = \sqrt{\frac{1 + \cos \phi}{2}} = \sqrt{\frac{1 + (-\frac{7}{25})}{2}} = \frac{3}{5}$$

Assim, as fórmulas de rotação de eixos procuradas são

$$x = \frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y' \quad \text{e} \quad y = \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y'$$

Após substituir x e y na equação dada e simplificar, chegamos à equação

$$(x')^2 + 2(y')^2 = 1$$

O gráfico é, pois, uma elipse com vértices em $(\pm 1, 0)$ no eixo-x'. Como $\operatorname{tg} \phi = \operatorname{sen} \phi / \cos \phi = (\frac{4}{5})/(\frac{3}{5}) = \frac{4}{3}$, obtemos $\phi = \operatorname{arc\,tg} (\frac{4}{3})$. Com aproximação de 1 minuto, $\phi \approx 53°8'$. O gráfico é o da Figura 12.36.

O próximo teorema dá regras que permitem identificar o tipo de cônica antes de efetuar a rotação de eixos.

Teorema de identificação (12.14)

O gráfico da equação

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

é uma cônica, ou uma cônica degenerada. Se o gráfico é uma cônica, então é

(i) uma parábola, se $B^2 - 4AC = 0$.

(ii) uma elipse, se $B^2 - 4AC < 0$.

(iii) uma hipérbole, se $B^2 - 4AC > 0$.

DEMONSTRAÇÃO

Girando os eixos x e y de um ângulo ϕ com auxílio das fórmulas de rotação de eixos, obtemos

$$A'(x')^2 + B'x'y' + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

Com as fórmulas de A', B' e C' citadas anteriormente, pode-se mostrar que

$$(B')^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC$$

Para uma rotação adequada de eixos, obtemos $B' = 0$ e

$$A'(x')^2 + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

A não ser em casos degenerados, o gráfico desta equação é uma elipse se $A'C' > 0$ (A' e C' têm o mesmo sinal), uma hipérbole se $A'C' < 0$ (A' e C' têm sinais opostos) ou uma parábola se $A'C' = 0$ (ou $A' = 0$ ou $C' = 0$). Entretanto, se $B' = 0$, então $B^2 - 4AC = -4A'C'$, e, assim, o gráfico é uma elipse se $B^2 - 4AC < 0$, hipérbole se $B^2 - 4AC > 0$, ou uma parábola se $B^2 - 4AC = 0$.

A expressão $B^2 - 4AC$ é chamada **discriminante** da equação no teorema de identificação (12.14). Dizemos que este discriminante é **invariante** sob uma rotação de eixos, porque permanece inalterado em qualquer rotação.

EXEMPLO 3

Aplique o teorema de identificação (12.14) para determinar se o gráfico da equação

$$41x^2 - 24xy + 34y^2 - 25 = 0$$

é uma parábola, uma elipse ou uma hipérbole.

SOLUÇÃO

A equação já foi estudada no Exemplo 2, onde fizemos uma rotação de eixos. Como $A = 41$, $B = -24$ e $C = 34$, o discriminante é

$$B^2 - 4AC = 576 - 4(41)(34) = -5000 < 0$$

Logo, pelo teorema de identificação, o gráfico é uma elipse.

Em alguns casos, após eliminar o termo em xy, pode ser necessário transladar os eixos do sistema $x'y'$ para obter o gráfico, conforme ilustrado no próximo exemplo.

EXEMPLO 4

Discuta a equação e trace o gráfico.

$$x^2 + 2\sqrt{3}\,xy + 3y^2 + 8\sqrt{3}\,x - 8y + 32 = 0$$

SOLUÇÃO

Com $A = 1$, $B = 2\sqrt{3}$ e $C = 3$, vemos que

$$B^2 - 4AC = 12 - 12 = 0$$

Pelo teorema (12.14), o gráfico é uma parábola.

Para fazer uma rotação de eixos, calculamos

$$\operatorname{cotg} 2\phi = \frac{A - C}{B} = \frac{1 - 3}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Logo, $2\phi = 120°$, $\phi = 60°$, e

$$\operatorname{sen}\phi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\phi = \frac{1}{2}$$

As fórmulas (12.12)(i) de rotação de eixos são:

$$x = \frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y' = \frac{1}{2}(x' - \sqrt{3}\,y')$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\,x' + y')$$

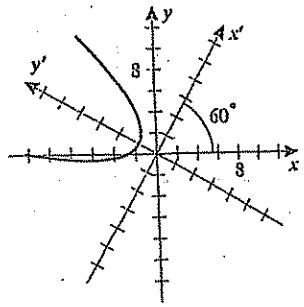


Figura 12.37

Substituindo x e y na equação dada e simplificando, somos conduzidos a

$$4(x')^2 - 16y' + 32 = 0$$

ou, equivalentemente,

$$(x')^2 = 4(y' - 2)$$

A parábola está ilustrada na Figura 12.37, onde cada intervalo representa duas unidades. Note que o vértice está no ponto (0, 2) no plano $x'y'$, e que o gráfico é simétrico em relação ao eixo-y'.

EXERCÍCIOS 12.4

Exercs. 1-13: (a) Use o teorema de identificação (12.14) para determinar se o gráfico da equação é uma parábola, uma elipse ou uma hipérbole. (b) Faça uma rotação adequada de eixos para achar uma equação do gráfico no plano $x'y'$ e trace o gráfico, indicando os vértices.

1 $x^2 - 2xy + y^2 - 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y = 0$

2 $x^2 - 2xy + y^2 + 4x + 4y = 0$

3 $5x^2 - 8xy + 5y^2 = 9$

4 $x^2 - xy + y^2 = 3$

5 $11x^2 + 10\sqrt{3}\,xy + y^2 = 4$

6 $7x^2 - 48xy - 7y^2 = 225$

7 $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 60x - 80y + 100 = 0$

8 $x^2 + 4xy + 4y^2 + 6\sqrt{5}\,x - 18\sqrt{5}\,y + 45 = 0$

9 $40x^2 - 36xy + 25y^2 - 8\sqrt{13}\,x - 12\sqrt{13}\,y = 0$

10 $18x^2 - 48xy + 82y^2 + 6\sqrt{10}\,x + 2\sqrt{10}\,y - 80 = 0$

11 $5x^2 + 6\sqrt{3}\,xy - y^2 + 8x - 8\sqrt{3}\,y - 12 = 0$

12 $15x^2 + 20xy - 4\sqrt{5}\,x + 8\sqrt{5}\,y - 100 = 0$

13 $32x^2 - 72xy + 53y^2 = 80$

Exercs. 14-16: Trace o gráfico da equação.

14 $1{,}1x^2 - 1{,}3xy + y^2 - 2{,}9x - 1{,}9y = 0$

15 $2{,}1x^2 - 4xy + 1{,}5y^2 - 4x + y - 1 = 0$

16 $3{,}2x^2 - 4\sqrt{2}\,xy + 2{,}5y^2 + 2{,}1y + 3x - 2{,}1 = 0$

12.5 EXERCÍCIOS DE REVISÃO

Exercs. 1-16: Ache os vértices e os focos da cônica e trace o gráfico.

1 $y^2 = 64x$

2 $y = 8x^2 + 32x + 33$

3 $9y^2 = 144 - 16x^2$

4 $9y^2 = 144 + 16x^2$

5 $x^2 - y^2 - 4 = 0$

6 $25x^2 + 36y^2 = 1$

7 $25y = 100 - x^2$

8 $3x^2 + 4y^2 - 18x + 8y + 19 = 0$

9 $x^2 - 9y^2 + 8x + 90y - 210 = 0$

10 $x = 2y^2 + 8y + 3$

11 $4x^2 + 9y^2 + 24x - 36y + 36 = 0$

12 $4x^2 - y^2 - 40x - 8y + 88 = 0$

13 $y^2 - 8x + 8y + 32 = 0$

14 $4x^2 + y^2 - 24x + 4y + 36 = 0$

15 $x^2 - 9y^2 + 8x + 7 = 0$

16 $y^2 - 2x^2 + 6y + 8x - 3 = 0$

Exercs. 17-26: Ache a equação da cônica que verifica as condições dadas.

17 hipérbole com vértices $V(0, \pm 7)$ e extremidades do eixo conjugado $(\pm 3, 0)$

18 parábola com foco $F(-4, 0)$ e diretriz $x = 4$

19 parábola com foco $F(0, -10)$ e diretriz $y = 10$

20 parábola, com vértice na origem, simétrica em relação ao eixo-x, e passando por $P(5, -1)$

21 elipse com vértices $V(0, \pm 10)$ e focos $F(0, \pm 5)$

22 hipérbole com focos $F(\pm 10, 0)$ e vértices $V(\pm 5, 0)$

23 hipérbole com vértice $V(0, \pm 6)$ e assíntotas $y = \pm 9x$.

24 elipse com focos $F(\pm 2, 0)$ e passando por $P(2, \sqrt{2})$

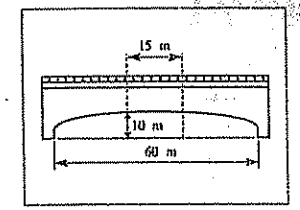
25 elipse com excentricidade $\frac{2}{3}$ e extremidades do eixo menor $(\pm 5, 0)$

26 elipse com excentricidade $\frac{3}{4}$ e focos $F(\pm 12, 0)$

27 Deve-se construir uma ponte sobre um rio de 60 metros de largura. O arco da ponte deve ser semi-elíptico e construído de tal forma que um navio de 15 metros de largura e 10 metros de altura possa passar com segurança sob o arco (ver figura).

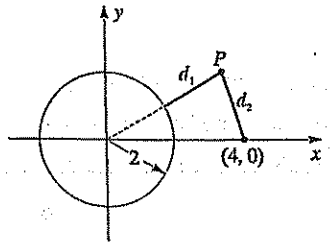
(a) Ache a equação do arco.

(b) Dê uma aproximação da altura do arco no meio da ponte.



28 Um ponto $P(x, y)$ está à mesma distância de $(4, 0)$ e do círculo $x^2 + y^2 = 4$, conforme figura. Mostre que o conjunto de todos esses pontos constituem um ramo de hipérbole e trace o gráfico.

28



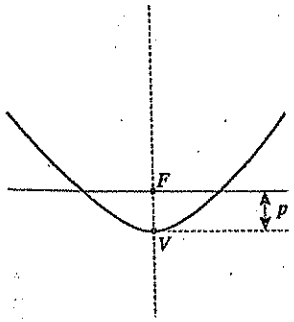
29 Ache equações da tangente e da normal à hipérbole $4x^2 - 9y^2 - 8x + 6y - 36 = 0$ no ponto $P(-3, 2)$.

30 Tangentes à parábola $y = 2x^2 + 3x + 1$ passam pelo ponto $P(2, -1)$. Ache as coordenadas-x dos pontos de tangência.

31 Prove que há exatamente uma reta de coeficiente angular dado m tangente à parábola $x^2 = 4py$ e mostre que sua equação é $y = mx - pm^2$.

32 Considere a elipse $px^2 + qy^2 = pq$, com $p > 0$ e $q > 0$. Prove que se m é um número real, há exatamente duas retas de coeficiente angular m tangentes à elipse, e mostre que suas equações são $y = mx \pm \sqrt{p + qm^2}$.

33 Seja R a região delimitada por uma parábola e a reta pelo foco perpendicular ao eixo, e seja p a distância do vértice V ao foco F, conforme figura a seguir. Ache a área de R.



34 Seja R a região delimitada pela parábola $9y = 5x^2 - 39x + 90$ e uma assíntota da hipérbole $9y^3 - 4x^2 = 36$.

(a) Ache a área de R.

(b) Ache o volume do sólido gerado pela rotação de R em torno do eixo-y.

35 Uma elipse de eixos de comprimentos 8 e 4 gira em torno do seu eixo maior. Ache o volume do sólido resultante.

36 Um sólido tem por base a região do plano-xy delimitada pelo gráfico de $x^2 + y^2 = 16$. Ache o volume do sólido se toda secção transversa por um plano perpendicular ao eixo-x é uma semi-elipse com semi-eixo de comprimento 5.

37 Ache o centróide da região no plano-xy delimitada pela hipérbole $b^2y^2 - a^2x^2 = a^2b^2$ e por uma reta horizontal $y = c$ por um foco.

38 Use o discriminante para identificar o gráfico da equação. (Não é preciso traçar o gráfico.)

(a) $2x^2 - 3xy + 4y^2 + 6x - 2y - 6 = 0$

(b) $3x^2 + 2xy - y^2 - 2x + y + 4 = 0$

(c) $x^2 - 6xy + 9y^2 + x - 3y + 5 = 0$

Exercs. 39-40: Use uma rotação conveniente de eixos para achar a equação do gráfico em um plano $x'y'$, e esboce o gráfico, indicando vértices.

39 $x^2 - 8xy + 16y^2 - 12\sqrt{17}\,x - 3\sqrt{17}\,y = 0$

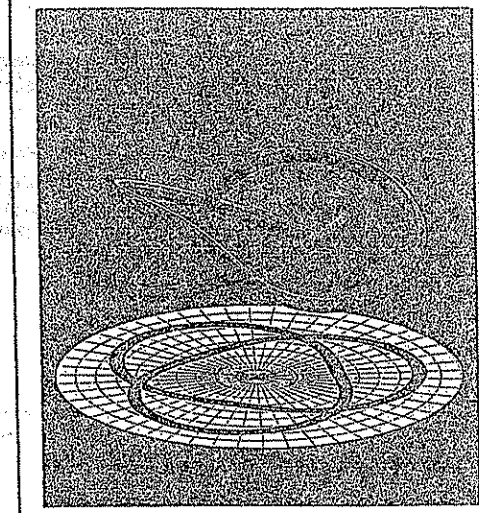
40 $8x^2 + 12xy + 17y^2 - 16\sqrt{5}\,x - 12\sqrt{5}\,y = 0$

MAKRON Books

Capítulo 13
CURVAS PLANAS E COORDENADAS POLARES

INTRODUÇÃO

O conceito de *curva* é mais geral do que o de gráfico de uma função, pois, uma curva pode interceptar a si própria à maneira de um oito, ser fechada (como é o caso de círculos e elipses) ou desenvolver-se em espiral em torno de um ponto. Na verdade, em matemática avançada estudam-se curvas que passam por todos os pontos de um plano!



As curvas que estudaremos neste capítulo estão situadas em um plano xy e gozam da propriedade de que as coordenadas x e y de um ponto arbitrário P da curva podem expressar-se como funções de uma variável t, chamada *parâmetro*. A razão da escolha da letra t é que, em muitas aplicações, esta variável denota o tempo e P representa um objeto em movimento que está na posição (x, y) no instante t. Em capítulos posteriores empregaremos tal representação para definir velocidade, aceleração e outros conceitos associados ao movimento.

Nas Seções 13.3 e 13.4 estudamos coordenadas polares e utilizamos integrais definidas para achar áreas delimitadas por gráficos de equações polares. Os métodos são análogos aos desenvolvidos no Capítulo 6. A diferença fundamental é que, aqui, consideramos limites de somas de setores circulares, e não de retângulos verticais ou horizontais.

Encerrando o capítulo, apresentamos uma descrição unificada das cônicas em termos de equações polares. Tais equações são indispensáveis para o estudo de órbitas de planetas, satélites e partículas atômicas.

13.1 CURVAS PLANAS

Se f é uma função contínua, o gráfico da equação $y = f(x)$ costuma chamar-se uma *curva plana*. Entretanto, esta definição é restrita, porque exclui muitos gráficos úteis. A definição a seguir é mais geral.

Definição (13.1) Uma **curva plana** é um conjunto C de pares ordenados $(f(t), g(t))$, em que f e g são funções contínuas em um intervalo I.

Por simplicidade, referimo-nos a uma curva plana como uma **curva**. O **gráfico** de C da Definição (13.1) consiste em todos os pontos $P(t) = (f(t), g(t))$ de um plano-xy, para t em I. Usaremos alternadamente os termos *curva* e *gráfico de uma curva*. Dizemos às vezes que o ponto $P(t)$ traça a curva C quando t varia em I.

A Figura 13.1 apresenta os gráficos de algumas curvas, onde I é um intervalo fechado $[a, b]$. Em (i) da figura, $P(a) \neq P(b)$, e $P(a)$ e $P(b)$ são as **extremidades**, ou **pontos extremos**, de C. A curva em (i) intercepta a si própria, isto é, dois valores distintos de t originam o mesmo ponto. Se $P(a) = P(b)$, como na Figura 13.1(ii), C é uma **curva fechada**. Se $P(a) = P(b)$ e C não intercepta a si própria em nenhum outro ponto, tal como em (iii), então a Figura 13.1 é uma **curva fechada simples**.

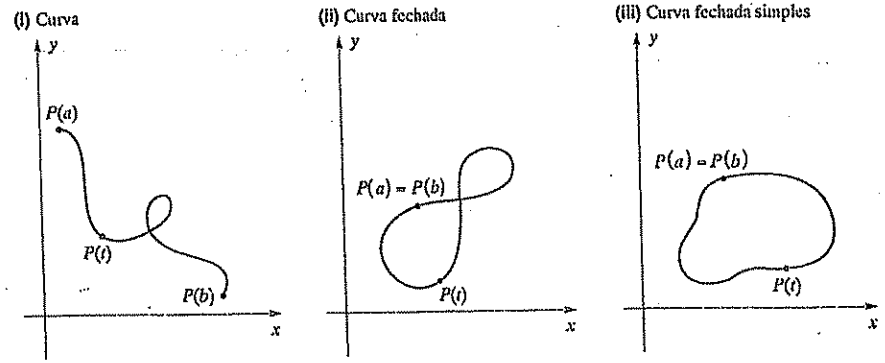


Figura 13.1

Na próxima definição mostramos uma forma conveniente de representar curvas.

Definição (13.2) Seja C uma curva que consiste em todos os pares ordenados $(f(t), g(t))$, onde f e g são funções contínuas em um intervalo I. As equações

$$x = f(t), y = g(t)$$

para t em I, são as **equações paramétricas** de C, com **parâmetro** t.

Referimo-nos à curva C nesta definição como uma **curva parametrizada**; as equações paramétricas constituem uma **parametrização** de C. Costuma-se usar a notação

$$x = f(t), y = g(t); t \in I$$

para indicar o domínio I de f e g. Às vezes, é possível eliminar o parâmetro, obtendo-se uma equação familiar em x e y para C. Em casos simples, podemos traçar uma curva parametrizada grafando os pontos e ligando-os na ordem crescente de t, conforme ilustrado no próximo exemplo.

EXEMPLO 1

Trace o gráfico da curva C de equações paramétricas

$$x = 2t, y = t^2 - 1; -1 \leq t \leq 2$$

SOLUÇÃO

Utilizamos as equações paramétricas para fazer uma tabela de coordenadas de pontos $P(x, y)$ de C como segue:

t	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	0	$-\frac{3}{4}$	-1	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	3

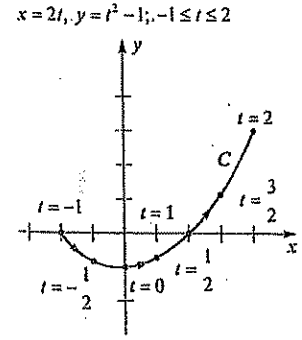


Figura 13.2

Grafando os pontos obtemos o gráfico da Figura 13.2. As setas no gráfico indicam a direção em que $P(x, y)$ traça a curva quando t *aumenta* de -1 a 2.

Em geral é possível obter uma descrição mais clara do gráfico eliminando o parâmetro. Resolvendo a primeira equação

paramétrica em relação a t, obtemos $t = \frac{1}{2}x$. Levando este valor de t na segunda equação, obtemos:

$$y = (\tfrac{1}{2}x)^2 - 1$$

O gráfico desta equação em x e y é uma parábola simétrica em relação ao eixo-y e com vértice $(0, -1)$. Todavia, como $x = 2t$ e $-1 \le t \le 2$, vemos que $-2 \le x \le 4$ para os pontos (x, y) de C e, assim, C é a *parte* da parábola compreendida entre os pontos $(-2, 0)$ e $(4, 3)$, exibida na figura 13.2.

Conforme indicado pelas setas na Figura 13.2, o ponto $P(x, y)$ traça a curva C *da esquerda para a direita* quando t aumenta. As equações paramétricas

$$x = -2t, y = t^2 - 1; -2 \le t \le 1$$

nos dão o mesmo gráfico, todavia, quando t cresce, $P(x, y)$ traça a curva *da direita para a esquerda*. Para outras parametrizações, o ponto $P(x, y)$ pode oscilar para a frente e para trás, à medida que t aumenta.

A **orientação** de uma curva parametrizada C é a direção definida pelos valores *crescentes* do parâmetro. Costuma-se indicar a orientação colocando-se setas em C como na Figura 13.2. Se $P(x, y)$ se move para frente e para trás quando t aumenta, podemos colocar setas ao longo (mas fora) de C. Como observamos, uma curva pode ter diferentes orientações, dependendo da parametrização.

O próximo exemplo mostra que às vezes convém eliminar o parâmetro antes de grafar os pontos.

EXEMPLO 2

Um ponto se move em um plano de tal forma que sua posição $P(x, y)$ no instante t é dada por

$$x = a \cos t, y = a \operatorname{sen} t; t \text{ em } \mathbb{R}$$

onde $a > 0$. Descreva o movimento do ponto.

SOLUÇÃO

Podemos eliminar o parâmetro escrevendo as equações paramétricas como

$$\frac{x}{a} = \cos t, \frac{y}{a} = \operatorname{sen} t$$

$x = a \cos t, y = a \operatorname{sen} t; t \text{ em } \mathbb{R}$

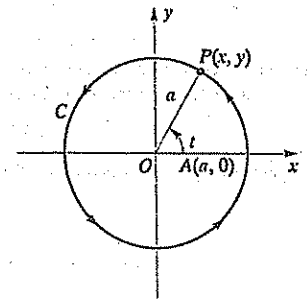


Figura 13.3

e usando a identidade $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$ para obter

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 = 1$$

ou

$$x^2 + y^2 = a^2$$

Isto nos mostra que o ponto $P(x, y)$ se move no círculo C de raio a com centro na origem (ver Figura 13.3). O ponto está em $A(a, 0)$ quando $t = 0$, em $(0, a)$ quando $t = \pi/2$, em $(-a, 0)$ quanto $t = \pi$, em $(0, -a)$ quando $t = 3\pi/2$, e de volta em $A(a, 0)$ quando $t = 2\pi$. Assim, P percorre o círculo no sentido anti-horário, completando uma volta a cada 2π unidades de tempo. A orientação de C está indicada pelas setas na figura.

Note que, neste exemplo, podemos interpretar t geometricamente como a medida em radianos do ângulo gerado pelo segmento de reta OP.

EXEMPLO 3

Trace o gráfico da curva C de equações paramétricas

$$x = -2 + t^2, y = 1 + 2t^2; t \text{ em } \mathbb{R}$$

e indique a orientação.

SOLUÇÃO Para eliminar o parâmetro, usamos a primeira equação para obter $t^2 = x + 2$, substituindo t^2 na segunda equação. Assim,

$$y = 1 + 2(x + 2)$$

(i) (ii)

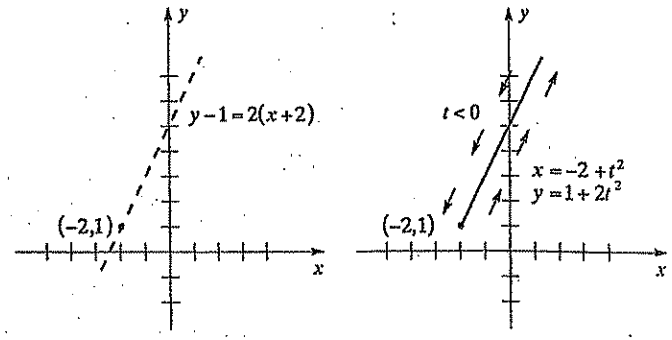


Figura 13.4

Esta é a equação da reta por $P(-2, 1)$ e de coeficiente angular 2, conforme indicado pelo tracejado na Figura 13.4(i). Entretanto, como $t^2 \geq 0$, vemos, pelas equações paramétricas de C, que

$$x = -2 + t^2 \geq -2 \quad \text{e} \quad y = 1 + 2t^2 \geq 1$$

Assim, o gráfico de C é a parte da reta à direita de $(-2, 1)$ (o ponto correspondente a $t = 0$, conforme Figura 13.4(ii)). A orientação está indicada pelas setas ao longo de C. À medida que t aumenta no intervalo $(-\infty, 0]$, $P(x, y)$ percorre a curva para baixo em direção ao ponto $(-2, 1)$. Quando t aumenta em $[0, \infty)$, $P(x, y)$ percorre a curva para cima a partir de $(-2, 1)$.

Se uma curva C é descrita por uma equação $y = f(x)$, para uma função contínua f, é fácil obter uma representação paramétrica de C, a saber:

$$x = t, y = f(t)$$

onde t está no domínio de f. Por exemplo, se $y = x^3$, as equações paramétricas são

$$x = t, y = t^3; t \text{ em } \mathbb{R}$$

Podemos usar diferentes substituições para x desde que, quando t varia em algum intervalo, x tome todos os valores no domínio de f. Assim, o gráfico de $y = x^3$ é dado também por

$$x = t^{1/3}, y = t; t \text{ em } \mathbb{R}$$

Note, entretanto, que as equações paramétricas

$$x = \operatorname{sen} t, y = \operatorname{sen}^3 t; t \text{ em } \mathbb{R}$$

dão apenas a parte do gráfico $y = x^3$ compreendida entre os pontos $(-1, -1)$ e $(1, 1)$.

EXEMPLO 4

Ache três parametrizações para a reta de coeficiente angular m e que passa pelo ponto (x_1, y_1).

SOLUÇÃO

De acordo com a forma ponto-coeficiente angular, a equação da reta é

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Fazendo $x = t$, então $y - y_1 = m(t - x_1)$ e obtemos a parametrização

$$x = t, y = y_1 + m(t - x_1); t \text{ em } \mathbb{R}$$

Outra representação paramétrica da reta se obtém fazendo $x - x_1 = t$. Neste caso, $y - y_1 = mt$ e

$$x = x_1 + t, y = y_1 + mt; t \text{ em } \mathbb{R}$$

Como terceira ilustração, fazendo $x - x_1 = \operatorname{tg} t$, então

$$x = x_1 + tg\ t, \quad y = y_1 + m\ tg\ t; \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

Há, é claro, muitas outras representações paramétricas para a reta.

Na teoria da eletricidade ocorrem equações paramétricas da forma

$$x = a \operatorname{sen} \omega_1 t, y = b \cos \omega_2 t; t \geq 0$$

onde a, b, ω_1 e ω_2 são constantes. As variáveis x e y em geral representam voltagens ou correntes no instante t. A curva resultante costuma ser difícil de traçar; todavia, utilizando um osciloscópio e impondo voltagens ou correntes aos terminais de entrada, podemos representar o gráfico – uma **figura de Lissajous** – na tela de um osciloscópio. Os computadores são de grande utilidade no traçado desses complicados gráficos.

EXEMPLO 5

A Figura 13.5 exibe um gráfico, gerado por computador, da figura de Lissajous

$$x = \operatorname{sen} 2t, y = \cos t; 0 \leq t \leq 2\pi$$

com as setas indicando a orientação. Verifique a orientação e ache uma equação em x e y para a curva.

SOLUÇÃO

Referindo-nos às equações paramétricas, vemos que, quando t aumenta de 0 a $\pi/2$, o ponto $P(x, y)$ parte de $(0, 1)$ e traça a parte da curva no quadrante I (em uma direção horária, em geral). Quando t cresce de $\pi/2$ a π, $P(x, y)$ traça a parte do quadrante III (em direção anti-horária). Para $\pi \leq t \leq 3\pi/2$, obtemos a parte do quadrante IV; e $3\pi/2 \leq t \leq 2\pi$ nos dá a parte do quadrante II.

$x = \operatorname{sen} t, y = \cos t; 0 \leq t \leq 2\pi$

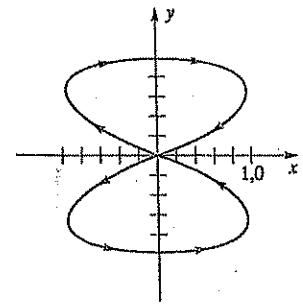


Figura 13.5

Podemos achar uma equação em x e y para a curva por meio de identidades trigonométricas e manipulações algébricas. Fazendo $x = 2 \operatorname{sen} t \cos t$ e elevando ao quadrado, temos

$$x^2 = 4 \operatorname{sen}^2 t \cos^2 t$$

ou $$x^2 = 4(1 - \cos^2 t)\cos^2 t$$

Utilizando $y = \cos t$, obtemos

$$x^2 = 4(1 - y^2)y^2$$

Para expressar y em termos de x, escrevemos a última equação como

$$4y^4 - 4y^2 + x^2 = 0$$

e apliquemos a fórmula quadrática para resolver em relação a y^2, como a seguir:

$$y^2 = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16x^2}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - x^2}}{2}$$

Extraindo a raiz quadrada, obtemos

$$y = \pm\sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{1 - x^2}}{2}}$$

Estas complicadas equações indicam claramente a vantagem do emprego de equações paramétricas para representar uma curva.

Uma curva C é **suave** se admite uma parametrização $x = f(t)$, $y = g(t)$ em um intervalo I tal que as derivadas f' e g' sejam contínuas e não simultaneamente nulas, exceto possivelmente nos pontos extremos de I. Uma curva C é **parcialmente suave** se o intervalo I pode ser subdividido em intervalos fechados, C sendo suave em cada subintervalo. O gráfico de uma curva suave não tem bicos nem pontos de reversão. As curvas dos Exemplos 1.5 são suaves. A curva do próximo exemplo é parcialmente suave.

EXEMPLO 6

A ciclóide é uma curva descrita por um ponto fixo P da circunferência de um círculo, quando este rola, sem deslizar, sobre uma reta de um plano. Ache as equações paramétricas da ciclóide e determine os intervalos em que é suave.

SOLUÇÃO

Suponha que o círculo tenha raio a e que role, sem deslizar, sobre o eixo-x (e acima dele), na direção positiva. Se uma posição do ponto P é a origem, então a Figura 13.6 exibe parte da curva e uma posição genérica do círculo.

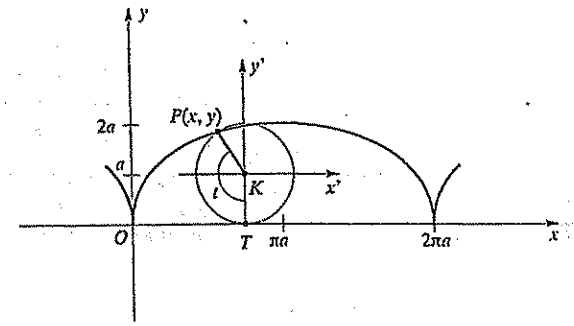


Figura 13.6

Denotemos por K o centro do círculo e por T o ponto de tangência com o eixo-x. Introduzamos, como parâmetro t, a medida em radianos do ângulo TKP. A distância percorrida pelo círculo é $d(0, T) = at$. Conseqüentemente, as coordenadas de K são (at, a). Considerando um sistema coordenado $x'y'$ com origem em $K(at, a)$, e denotando por $P(x', y')$ o ponto P em relação a este sistema, então, pelas fórmulas de translação de eixos com $h = at$ e $k = a$,

$$x = at + x', \qquad y = a + y'$$

Se, conforme Figura 13.7, θ denota um ângulo em posição padrão no plano-$x'y'$, então $\theta = (3\pi/2) - t$. Logo,

$$x' = a\cos\theta = a\cos\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = a\,\text{sen}\,t$$

$$y' = a\,\text{sen}\,\theta = a\,\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = -a\cos t$$

e a substituição em $x = at + x'$, $y = a + y'$ nos dá as equações paramétricas da ciclóide:

$$x = a(t - \text{sen}\,t),\ y = a(1 - \cos t);\ t \text{ em } \mathbb{R}.$$

Diferenciando as equações paramétricas da ciclóide, obtemos

$$\frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t), \quad \frac{dy}{dt} = a\,\text{sen}\,t$$

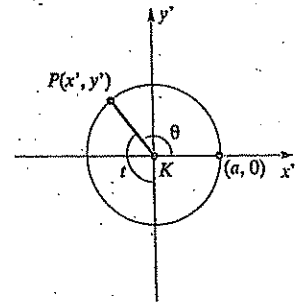


Figura 13.7

Estas derivadas são contínuas para todo t, mas são simultaneamente 0 em $t = 2\pi n$ para todo inteiro n. Os pontos correspondentes a $t = 2\pi n$ são os interceptos-x do gráfico, e a ciclóide tem um ponto de reversão em cada um desses pontos (ver Figura 13.6). O gráfico é parcialmente suave, pois é suave em cada intervalo-t $[2\pi n, 2\pi(n+1)]$ para todo inteiro n.

Figura 13.8

Se $a < 0$, o gráfico de $x = a(t - \text{sen } t)$, $y = a(1 - \cos t)$ é a ciclóide invertida obtida quando o círculo do Exemplo 6 rola sobre o eixo-x, *abaixo* dele. Esta curva tem várias propriedades físicas importantes. A título de ilustração, suponhamos que um fio de arame passe por dois pontos fixos A e B, conforme Figura 13.8, e que a forma do fio possa ser modificada, vergando-a de maneira arbitrária. Suponha ainda que uma pequena bola perfurada deslize livremente ao longo do fio e que a única força que atua sobre ela seja a gravidade. Pergunta-se: que trajetória – ou, o que é o mesmo, que forma do arame permitirá à bola deslizar de A a B no menor tempo. À primeira vista pode-se supor que o segmento de reta de A a B seja o caminho procurado; mas tal não é a resposta correta. O percurso que exige menor tempo coincide com o gráfico de uma ciclóide invertida com A na origem. Como a velocidade da bola aumenta na ciclóide mais rapidamente do que em qualquer outra curva ligando A a B, a bola chega a B mais rapidamente, embora a distância seja maior.

Há outra propriedade interessante desta **curva de descida mais rápida**. Suponhamos que A seja a origem e B seja o ponto de coordenada-x $\pi|a|$ isto é, o ponto mais baixo na ciclóide no primeiro arco à direita de A. Liberada a bola em *qualquer* ponto entre A e B, pode-se mostrar que o tempo para ela chegar a B é sempre o mesmo.

Em aplicações surgem variações da ciclóide. Por exemplo, se uma motocicleta roda em uma estrada reta, então a curva traçada por um ponto fixo do raio de uma das rodas é uma curva em forma de ciclóide. Neste caso, a curva não tem quinas nem pontos de reversão, nem intercepta a estrada (o eixo-x) como aconteceria com o gráfico de uma ciclóide. Se a roda de um vagão gira sobre um trilho, então a curva traçada por um ponto fixo na circunferência exterior da roda (que se prolonga *abaixo* do trilho) apresenta laços a intervalos regulares. Definem-se outras ciclóides nos Exercícios 33 e 34.

EXERCÍCIOS 13.1

Exercs. 1-24: (a) Ache a equação em x e y cujo gráfico contém os pontos da curva C. (b) Esboce o gráfico de C e indique a orientação.

1 $x = t - 2, y = 2t + 3; 0 \le t \le 5$

2 $x = 1 - 2t, y = 1 + t; -1 \le t \le 4$

3 $x = t^2 + 1, y = t^2 - 1; -2 \le t \le 2$

4 $x = t^3 + 1, y = t^3 - 1; -2 \le t \le 2$

5 $x = 4t^2 - 5, y = 2t + 3$; t em $\mathbb{R}$

6 $x = t^3, y = t^2$; t em $\mathbb{R}$

7 $x = e^t, y = e^{-2t}$; t em $\mathbb{R}$

8 $x = \sqrt{t}, y = 3t + 4; t \ge 0$

9 $x = 2 \text{ sen } t, y = 3 \cos t; 0 \le t \le 2\pi$

10 $x = \cos t - 2, y = \text{sen } t + 3; 0 \le t \le 2\pi$

11 $x = \sec t, y = \text{tg } t; -\pi/2 < t < \pi/2$

12 $x = \cos 2t, y = \text{sen } t; -\pi < t \le \pi$

13 $x = t^2, y = 2 \ln t; t > 0$

14 $x = \cos^3 t, y = \text{sen}^3 t; 0 \le t \le 2\pi$

15 $x = \text{sen } t, y = \text{csc } t; 0 < t \le \pi/2$

16 $x = e^t, y = e^{-t}$; t em $\mathbb{R}$

17 $x = \cosh t, y = \text{senh } t$; t em $\mathbb{R}$

18 $x = 3 \cosh t, y = 2 \text{ senh } t$; t em $\mathbb{R}$

19 $x = t, y = \sqrt{t^2 - 1}; |t| \ge 1$

20 $x = -2\sqrt{1 - t^2}, y = t; |t| \le 1$

21 $x = t, y = \sqrt{t^2 - 2t + 1}; 0 \le t \le 4$

22 $x = 2t, y = 8t^3; -1 \le t \le 1$

23 $x = (t + 1)^3, y = (t + 2)^2; 0 \le t \le 2$

24 $x = \text{tg } t, y = 1; -\pi < t < \pi/2$

Exercs. 25-26: Dão-se as curvas C_1, C_2, C_3 e C_4, para t em $\mathbb{R}$. Trace os gráficos e indique as orientações.

25 $C_1: x = t^2, \quad y = t$

$C_2: x = t^4, \quad y = t^2$

$C_3: x = \text{sen}^2 t, \quad y = \text{sen } t$

$C_4: x = e^{2t}, \quad y = -e^t$

26 $C_1: x = t, \quad y = 1 - t$

$C_2: x = 1 - t^2, \quad y = t^2$

$C_3: x = \cos^2 t, \quad y = \text{sen}^2 t$

$C_4: x = \ln t - t, \quad y = 1 + t - \ln t; t > 0$

Exercs. 27-28: As equações paramétricas especificam a posição de um ponto móvel $P(x, y)$ no instante t. Trace o gráfico e indique o movimento de P quando t aumenta.

27 (a) $x = \cos t, y = \text{sen } t; 0 \le t \le \pi$

(b) $x = \text{sen } t, y = \cos t; 0 \le t \le \pi$

(c) $x = t, y = \sqrt{1 - t^2}; -1 \le t \le 1$

28 (a) $x = t^2, y = 1 - t^2; 0 \le t \le 1$

(b) $x = 1 - \ln t, y = \ln t; 1 \le t \le e$

(c) $x = \cos^2 t, y = \text{sen}^2 t; 0 \le t \le 2\pi$

29 Mostre que

$$x = a \cos t + h, y = b \text{ sen } t + k; 0 \le t \le 2\pi$$

são equações paramétricas de uma elipse de centro (h, k) e eixos de comprimento $2a$ e $2b$.

30 Mostre que

$$x = a \sec t + h, \quad y = b \text{ tg } t + k;$$
$$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2} \quad \text{e} \quad t \ne \frac{\pi}{2}$$

são equações paramétricas de uma hipérbole de centro (h, k), eixo transverso de comprimento $2a$ e eixo conjugado de comprimento $2b$. Determine os valores de t para cada ramo.

31 Se $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ são pontos distintos, mostre que

$$x = (x_2 - x_1)t + x_1, y = (y_2 - y_1)t + y_1; t \text{ em } \mathbb{R}$$

são equações paramétricas da reta l por P_1 e P_2.

32 Indique a diferença entre o gráfico da hipérbole $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ e o gráfico de

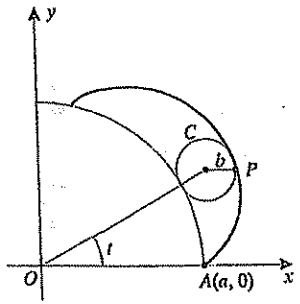
$$x = a \cosh t, y = b \text{ senh } t; t \text{ em } \mathbb{R}$$

(*Sugestão*: Use o Teorema (8.11).)

33 Um círculo C de raio b gira sobre a parte externa da circunferência do círculo $x^2 + y^2 = a^2$ e $b < a$. Seja P um ponto fixo de C, e seja $A(a, 0)$ a posição inicial de P, conforme figura. Se o parâmetro t é o ângulo entre o eixo-x positivo e o segmento de O ao centro de C, mostre que as equações paramétricas da curva traçada por P (uma epiciclóide) são

$$x = (a + b)\cos t - b\cos\left(\frac{a+b}{b}t\right)$$

$$y = (a+b)\operatorname{sen} t - b\operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{b}t\right);\ 0 \le t \le 2\pi$$



34 Generalize a ciclóide do Exemplo 6 ao caso em que P é um ponto arbitrário em uma reta fixa pelo centro C do círculo. Se $b = d(C, P)$, mostre que

$$x = at - b\operatorname{sen} t,\ y = a - b\cos t$$

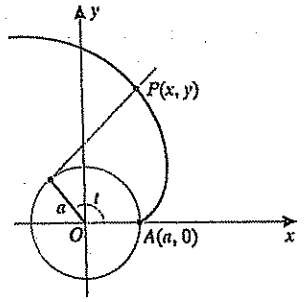
Trace um gráfico típico se $b < a$ (ciclóide *encurtada*) e se $b > a$ (ciclóide *alongada*). Por vezes designam-se essas curvas como *trocóides*.

35 Se $b = \frac{1}{3}a$ no Exercício 33, determine equações paramétricas da epiciclóide e trace o gráfico.

36 O raio do círculo B é um terço do raio do círculo A. Quantas voltas o círculo B deve dar em torno do círculo A até atingir o ponto de partida? (*Sugestão*: Use o Exercício 35.)

37 Desenrolando-se uma corda em torno de um círculo de raio a e mantendo-se a corda sempre tensa, um ponto fixo P da corda descreverá uma curva chamada envolvente (ou *involuta*) do círculo. Escolhamos o círculo como o da figura. Se o parâmetro t é a medida do ângulo indicado e se a posição inicial de P é $A(a, 0)$, mostre que as equações paramétricas da evolvente são

$$x = a(\cos t + t\operatorname{sen} t),\ y = a(\operatorname{sen} t - t\cos t)$$



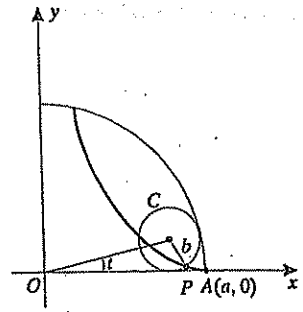
38 Se o círculo C do Exercício 33 gira sobre o interior do segundo círculo (ver figura a seguir), então a curva traçada por P é uma *hipociclóide*.

(a) Mostre que as equações paramétricas desta curva são

$$x = (a - b)\cos t + b\cos\left(\frac{a-b}{b}t\right),$$

$$y = (a - b)\operatorname{sen} t - b\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{b}t\right);\ 0 \le t \le 2\pi.$$

(b) Se $b = \frac{1}{4}a$, mostre que $x = a\cos^3 t$, $y = a\operatorname{sen} 3t$ e trace o gráfico.



39 Ref. Exemplo 5

(a) Descreva a figura de Lissajous dada por $f(t) = a\operatorname{sen}\omega t$ e $g(t) = b\cos\omega t$ para $t \ge 0$ e $a \ne b$.

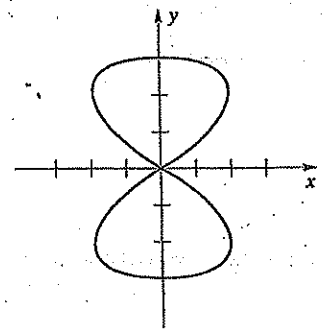
(b) Suponha $f(t) = a\operatorname{sen}\omega_1 t$ e $g(t) = b\operatorname{sen}\omega_2 t$, onde ω_1 e ω_2 são números racionais positivos, e escreva ω_1/ω_2 como m/n, para inteiros positivos m e n. Mostre que se $p = 2\pi n/\omega_1$, então $f(t + p) = f(t)$ e $g(t + p) = g(t)$. Conclua que a curva traça a si mesma novamente a cada p unidades de tempo.

40 Ilustramos abaixo uma figura de Lissajous dada por

$$x = 2\operatorname{sen} 3t,\ y = 3\operatorname{sen} 1{,}5t;\ t \ge 0.$$

(a) Ache o período da figura — isto é, o comprimento do menor intervalo-t que traça a curva.

(b) Ache a maior distância da origem a um ponto do gráfico.



Exercs. 41-44: Grafe a curva.

41 $x = 3\operatorname{sen}^5 t,\ y = 3\cos^5 t;\ 0 \le t \le 2\pi$

42 $x = 8\cos t - 2\cos 4t,\ y = 8\operatorname{sen} t - 2\operatorname{sen} 4t;$ $0 \le t \le 2\pi$

43 $x = 3t - 2\operatorname{sen} t,\ y = 3 - 2\cos t;\ -8 \le t \le 8$

44 $x = 2t - 3\operatorname{sen} t,\ y = 2 - 3\cos t;\ -8 \le t \le 8$

Exercs. 45-48: Grafe as curvas no mesmo sistema de eixos e descreva a forma da figura resultante.

45 C_1: $x = 2\operatorname{sen} 3t,\ y = 3\cos 2t;$ $-\pi/2 \le t \le \pi/2$

C_2: $x = \frac{1}{4}\cos t + \frac{3}{4},\ y = \frac{1}{4}\operatorname{sen} t + \frac{3}{2};$ $0 \le t \le 2\pi$

C_3: $x = \frac{1}{4}\cos t - \frac{3}{4},\ y = \frac{1}{4}\operatorname{sen} t + \frac{3}{2};$ $0 \le t \le 2\pi$

C_4: $x = \frac{3}{4}\cos t,\ y = \frac{1}{4}\operatorname{sen} t;\ 0 \le t \le 2\pi$

C_5: $x = \frac{1}{4}\cos t,\ y = \frac{1}{8}\operatorname{sen} t + \frac{3}{4};$ $\pi \le t \le 2\pi$

46 C_1: $x = \frac{3}{2}\cos t + 1,\ y = \operatorname{sen} t - 1;$ $-\pi/2 \le t \le \pi/2$

C_2: $x = \frac{3}{2}\cos t + 1,\ y = \operatorname{sen} t + 1;$ $-\pi/2 \le t \le \pi/2$

C_3: $x = 1,\ y = 2\operatorname{tg} t;\ -\pi/4 \le t \le \pi/4$

47 C_1: $x = \operatorname{tg} t,\ y = 3\operatorname{tg} t;\ 0 \le t \le \pi/4$

C_2: $x = 1 + \operatorname{tg} t,\ y = 3 - 3\operatorname{tg} t;\ 0 \le t \le \pi/4$

C_3: $x = \frac{1}{2} + \operatorname{tg} t,\ y = \frac{3}{2};\ 0 \le t \le \pi/4$

48 C_1: $x = 1 + \cos t,\ y = 1 + \operatorname{sen} t;\ \pi/3 \le t \le 2\pi$

C_2: $x = 1 + \operatorname{tg} t,\ y = 1;\ 0 \le t \le \pi/4$

13.2 TANGENTES E COMPRIMENTOS DE ARCO

A curva C dada parametricamente por

$$x = 2t,\ y = t^2 - 1;\ -1 \le t \le 2$$

pode também ser representada por uma equação da forma $y = k(x)$, onde k é uma função definida em um intervalo conveniente. No Exemplo 1 da seção precedente, eliminamos o parâmetro t, obtendo

$$y = k(x) = \tfrac{1}{4}x^2 - 1 \quad \text{para } -2 \le x \le 4$$

O coeficiente angular da tangente em um ponto $P(x, y)$ de C é

$$k'(x) = \tfrac{1}{2}x, \quad \text{ou} \quad k'(x) = \tfrac{1}{2}(2t) = t$$

Como em geral é difícil eliminar um parâmetro, vamos deduzir uma fórmula para achar o coeficiente angular diretamente a partir das equações paramétricas.

Teorema (13.3) Se uma curva suave C é dada parametricamente por $x = f(t)$, $y = g(t)$, então o coeficiente angular dy/dx da tangente a C em $P(x, y)$ é

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \quad \text{desde que} \quad \frac{dx}{dt} \neq 0$$

DEMONSTRAÇÃO

Se $dx/dt \neq 0$ em $x = c$, então, como f é contínua em c, $dx/dt > 0$ ou $dx/dt < 0$ em todo um intervalo $[a, b]$, com $a < c < b$ (ver Teorema 2.27). Aplicando o Teorema (7.6) ou o resultado análogo para funções decrescentes, sabemos que f admite uma inversa f^{-1}, e podemos considerar $t = f^{-1}(x)$ para x em $[f(a), f(b)]$. Aplicando a regra da cadeia a $y = g(t)$ e $t = f^{-1}(x)$, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

onde a última igualdade decorre do Corolário (7.8).

EXEMPLO 1

Seja C a curva com parametrização

$$x = 2t,\ y = t^2 - 1;\ -1 \le t \le 2$$

Determine os coeficientes angulares da tangente e da normal a C em $P(x, y)$.

SOLUÇÃO

A curva C já foi estudada no Exemplo 1 da secção precedente (ver Figura 13.2). Aplicando o Teorema (13.3) com $x = 2t$ e $y = t^2 - 1$, vemos que o coeficiente angular da tangente em $P(x, y)$ é

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2t}{2} = t$$

Este resultado está de acordo com o do estudo no início desta seção, onde utilizamos a forma $y = k(x)$ para mostrar que $m = \frac{1}{2}x = t$.

O coeficiente angular da normal é o inverso negativo $-1/t$, desde que $t \neq 0$.

EXEMPLO 2

Seja C a curva com parametrização

$$x = t^3 - 3t,\ y = t^2 - 5t - 1;\ t \text{ em } \mathbb{R}$$

(a) Ache a equação da tangente a C no ponto correspondente a $t = 2$.

(b) Para que valores de t a tangente é horizontal? vertical?

SOLUÇÃO

(a) A Figura 13.9 é o esboço de uma parte do gráfico de C, onde também marcamos diversos pontos e indicamos a orientação. Utilizando as equações paramétricas de C, vemos que o ponto correspondente a $t = 2$ é $(2, -7)$. Pelo Teorema (13.3),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2t - 5}{3t^2 - 3}$$

O coeficiente angular m da tangente em $(2, -7)$ é

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right]_{t=2} = \frac{2(2) - 5}{3(2^2) - 3} = -\frac{1}{9}$$

Aplicando a forma ponto-coeficiente angular, obtemos a equação da tangente

$$y + 7 = -\tfrac{1}{9}(x - 2), \quad \text{ou} \quad x + 9y = -61$$

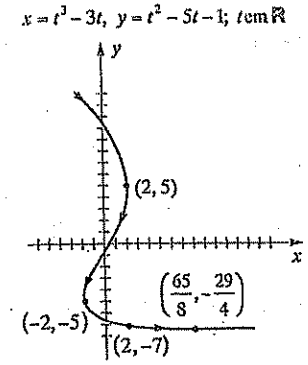


Figura 13.9

(b) A tangente é horizontal se $dy/dx = 0$ – isto é, se $2t - 5 = 0$, ou $t = \frac{5}{2}$. O ponto correspondente de C é $(\frac{65}{8}, -\frac{29}{4})$, conforme figura 13.9

A tangente é vertical se $3t^2 - 3 = 0$. Há, pois, tangentes verticais nos pontos correspondentes a $t = 1$ e $t = -1$ – isto é, em $(-2, 5)$ e $(2, 5)$.

Se uma curva C é parametrizada por $x = f(t)$, $y = g(t)$, e se y' é uma função diferenciável de t, podemos achar d^2y/dx^2 aplicando o Teorema (13.3) a y', como a seguir.

Derivada segunda em forma paramétrica (13.4)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(y') = \frac{dy'/dt}{dx/dt}$$

É importante observar que

$$\frac{d^2y}{dx^2} \neq \frac{d^2y/dt^2}{d^2x/dt^2}$$

EXEMPLO 3

Seja C a curva com parametrização

$$x = e^{-t},\ y = e^{2t};\ t \text{ em } \mathbb{R}$$

(a) Trace o gráfico de C e indique a orientação.

(b) Use (13.3) e (13.4) para achar dy/dx e d^2y/dx^2.

(c) Ache uma função k que tenha o mesmo gráfico de C, e use $k'(x)$ e $k''(x)$ para verificar as respostas de (b).

(d) Discuta a concavidade de C.

$x = e^{-t}, y = e^{2t}; t$ em $\mathbb{R}$

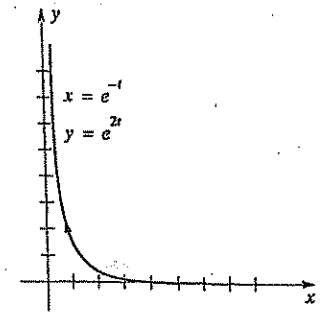


Figura 13.10

SOLUÇÃO

(a) Para auxiliar no esboço do gráfico, eliminemos primeiro o parâmetro. Como $x = e^{-t} = 1/e^t$, vemos que $e^t = 1/x$. Substituindo em $y = e^{2t} = (e^t)^2$, obtemos

$$y = \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2}$$

Lembrando que $x = e^{-t} > 0$, somos conduzidos ao gráfico da Figura 13.10. Note que o ponto $(1, 1)$ corresponde a $t = 0$. Se t cresce em $(-\infty, 0]$, o ponto $P(x, y)$ se aproxima de $(1, 1)$ pela direita, conforme indicado pelas setas. Se t cresce em $[0, \infty)$, $P(x, y)$ percorre a curva para cima, aproximando-se do eixo-y.

(b) Por (13.3) e (13.4),

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2e^{2t}}{-e^{-t}} = -2e^{3t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{-6e^{3t}}{-e^{-t}} = 6e^{4t}$$

(c) Pela parte (a), uma função k que tenha o mesmo gráfico de C é dada por

$$k(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \quad \text{para} \quad x > 0$$

Diferenciando duas vezes, obtemos

$$k'(x) = -2x^{-3} = -2(e^{-t})^{-3} = -2e^{3t}$$

$$k''(x) = 6x^{-4} = 6(e^{-t})^{-4} = 6e^{4t}$$

o que está de acordo com a parte (b).

(d) Como $d^2y/dx^2 = 6e^{4t} > 0$ para todo t, a curva C é côncava para cima em todos os pontos.

Se uma curva C é o gráfico de $y = f(x)$ e a função f é suave em $[a, b]$, então o comprimento de C é dado por $\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$ (ver Definição (6.14)). Obteremos a seguir uma fórmula para determinar o comprimento de curvas dadas parametricamente.

Seja C uma curva suave dada parametricamente por

$$x = f(t),\ y = g(t);\ a \le t \le b$$

Suponhamos, além disso, que C não intercepte a si própria – isto é, que valores diferentes de t entre a e b determinem diferentes pontos de C. Consideremos uma partição P de $[a, b]$ dada por $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$. Seja $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ e $P_k = (f(t_k), g(t_k))$ o ponto de C que corresponde a t. Se $d(P_{k-1}, P_k)$ é o comprimento do segmento $P_{k-1}P_k$, então o comprimento L_P da linha quebrada da Figura 13.11 é

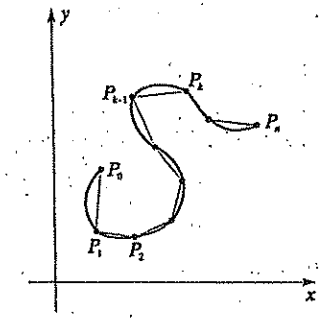


Figura 13.11

$$L_P = \sum_{k=1}^{n} d(P_{k-1}, P_k)$$

Tal como na Seção 6.5, definimos

$$L = \lim_{\|P\| \to 0} L_P$$

e chamamos L o comprimento de C de P_0 a P_n se, para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $|L_P - L| < \epsilon$ para toda partição P com $\|P\| < \delta$

Pela fórmula da distância,

$$d(P_{k-1}, P_k) = \sqrt{[f(t_k) - f(t_{k-1})]^2 + [g(t_k) - g(t_{k-1})]^2}$$

De acordo com o teorema do valor médio (4.12), existem números w_k e z_k no intervalo aberto (t_{k-1}, t_k) tais que

$$f(t_k) - f(t_{k-1}) = f'(w_k)\,\Delta t_k$$

$$g(t_k) - g(t_{k-1}) = g'(z_k)\,\Delta t_k$$

Substituindo esses valores na fórmula de $d(P_{k-1}, P_k)$ e removendo o fator comum $(\Delta t_k)^2$ do radicando, obtemos

$$d(P_{k-1}, P_k) = \sqrt{[f'(w_k)]^2 + [g'(z_k)]^2}\ \Delta t_k$$

Conseqüentemente

$$L = \lim_{\|P\| \to 0} L_P = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{[f'(w_k)]^2 + [g'(z_k)]^2}\ \Delta t_k$$

desde que o limite exista. Se $w_k = z_k$ para todo k, então as somas são somas de Riemann para a função definida por $\sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}$. O limite de tais somas é

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\ dt$$

O limite existe mesmo que $w_k \neq z_k$; todavia, a demonstração exige métodos avançados e é, assim, omitida. O próximo teorema resume o assunto.

Teorema (13.5) Se uma curva suave C é dada parametricamente por $x = f(t)$, $y = g(t)$, com $a \le t \le b$, e se C não intercepta a si própria, exceto possivelmente em $t = a$ e $t = b$, então o comprimento L de C é

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\ dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\ dt$$

A fórmula integral do Teorema (13.5) não é necessariamente verdadeira se C intercepta a si mesma. Por exemplo, se C é dada por $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$; $0 \le t \le 4\pi$, então o gráfico é um círculo unitário com centro na origem. Se t varia de 0 a 4π, o círculo é traçado duas vezes e, assim, intercepta a si próprio um número infinito de vezes. Se aplicarmos o Teorema (13.5) com $a = 0$ e $b = 4\pi$, obteremos o valor incorreto 4π para o comprimento de C. Obtém-se o valor correto 2π utilizando-se o intervalo-t $[0, 2\pi]$. Note que, neste caso, a curva se intercepta somente nos pontos correspondentes a $t = 0$ e $t = 2\pi$, o que não contradiz o teorema.

Se uma curva C é dada por $y = k(x)$, com k' contínua em $[a, b]$, então as equações paramétricas de C são

$$x = t,\ y = k(t);\ a \le t \le b$$

Neste caso

$$\frac{dx}{dt} = 1,\quad \frac{dy}{dt} = k'(t) = k'(x),\quad dt = dx$$

e, pelo Teorema (13.5),

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [k'(x)]^2}\ dx$$

o que está de acordo com a fórmula do comprimento de arco dada na Definição (6.14).

EXEMPLO 4

Ache o comprimento de um arco da ciclóide de equações

$$x = t - \operatorname{sen} t,\ y = 1 - \cos t;\ t \text{ em } \mathbb{R}$$

SOLUÇÃO

O gráfico tem a forma ilustrada na Figura 13.6. O raio a do círculo é 1. Obtém-se um arco fazendo-se t variar de 0 a 2π. Aplicando o Teorema (13.5), obtemos

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + (\operatorname{sen} t)^2}\ dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}\ dt$$

Como $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$, o integrando se reduz a

$$\sqrt{2 - 2\cos t} = \sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t}$$

Assim, $$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t}\, dt$$

Pela fórmula do ângulo metade, $\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}t = \frac{1}{2}(1 - \cos t)$ ou, equivalentemente, $1 - \cos t = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}t$.

Logo $\sqrt{1 - \cos t} = \sqrt{2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}t} = \sqrt{2}\,|\operatorname{sen} \frac{1}{2}t|$.

Pode-se omitir o sinal de valor absoluto, pois, se $0 \le t \le 2\pi$, então, $0 \le \frac{1}{2}t \le \pi$ e, então $\operatorname{sen} \frac{1}{2}t \ge 0$. Conseqüentemente,

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\sqrt{2} \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}t\, dt = 2\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}t\, dt$$

$$= -4\left[\cos \tfrac{1}{2}t\right]_0^{2\pi} = -4(-1 - 1) = 8$$

Relembrando o Teorema (13.5), se ds é a diferencial do comprimento de arco, então, pelo Teorema (6.17),

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

Supondo ds e dt positivos, temos o seguinte.

Diferencial do comprimento de arco (13.6)

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Utilizando (13.6), podemos escrever a fórmula do comprimento de arco no Teorema (13.5) como

$$L = \int_{t=a}^{t=b} ds$$

Os limites de integração evidenciam que a variável independente é t, e não s.

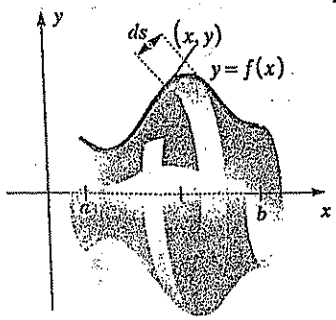


Figura 13.12

Se uma função f é suave e não-negativa para $a \le x \le b$, então, pela Definição (6.19), a área S da superfície gerada pela revolução do gráfico de $y = f(x)$ em torno do eixo-x (ver Figura 13.12), é dada por

$$S = \int_{x=a}^{x=b} 2\pi y\, ds$$

onde $ds = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$. Podemos encarar $2\pi y\, ds$ como a área da superfície de um tronco de cone de altura inclinada ds e raio médio y (ver (6.18)).

Se uma curva C é dada parametricamente por $x = f(t)$, $y = g(t)$; $a \le t \le b$ e se $g(t) \ge 0$ em todo $[a, b]$, podemos utilizar argumento análogo ao da Seção 6.5 para mostrar que a área da superfície gerada pela revolução de C em torno do eixo-y é $S = \int_{t=a}^{t=b} 2\pi x\, ds$, onde ds é a diferencial do comprimento de arco (13.6). Enunciemos a seguir este fato.

Teorema (13.7)

Seja C uma curva suave dada por $x = f(t)$, $y = g(t)$; $a \le t \le b$, e suponhamos que C não intercepte a si mesma, exceto possivelmente nos pontos correspondentes a $t = a$ e $t = b$. Se $g(t) \ge 0$ em todo $[a, b]$, então a área S da superfície de revolução oblida revolvendo-se C em torno do eixo-x é

$$S = \int_{t=a}^{t=b} 2\pi y\, ds = \int_a^b 2\pi g(t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

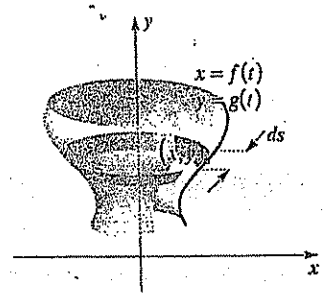


Figura 13.13

A fórmula de S no Teorema (13.7) pode ser estendida ao caso em que $y = g(t)$ é negativa para algum t em [a, b], substituindo-se por $|y|$ a variável y que precede ds.

Se a curva C do Teorema (13.7) gira em torno do eixo-y e se $x = f(t) \ge 0$ para $a \le t \le b$ (ver Figura 13.13), então

$$S = \int_{t=a}^{t=b} 2\pi y\, ds = \int_a^b 2\pi f(t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Neste caso podemos encarar $2\pi x\, ds$ como a área da superfície de um tronco de cone de altura inclinada ds e raio médio x.

EXEMPLO 5

Verifique que a área da superfície de uma esfera de raio a é $4\pi a^2$.

SOLUÇÃO

Se C é o semicírculo superior $x^2 + y^2 = a^2$, então a superfície esférica pode ser obtida fazendo-se C revolver em torno do eixo-x. As equações paramétricas de C são

$$x = a\cos t,\ y = a \operatorname{sen} t;\ 0 \le t \le \pi$$

Aplicando o Teorema (13.7) e utilizando a identidade temos

$$S = \int_0^{\pi} 2\pi a \operatorname{sen} t \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 t + a^2 \cos^2 t}\, dt$$
$$= 2\pi a^2 \int_0^{\pi} \operatorname{sen} t\, dt = -2\pi a^2 \left[\cos t\right]_0^{\pi}$$
$$= -2\pi a^2 [-1 - 1] = 4\pi a^2$$

EXERCÍCIOS 13.2

Exercs. 1-8: Ache os coeficientes angulares da tangente e da normal no ponto da curva correspondente a $t = 1$.

1 $x = t^2 + 1, y = t^2 - 1; -2 \le t \le 2$

2 $x = t^3 + 1, y = t^3 - 1; -2 \le t \le 2$

3 $x = 4t^2 - 5, y = 2t + 3$; t em $\mathbb{R}$

4 $x = t^3, y = t^2$; t em $\mathbb{R}$

5 $x = e^t, y = e^{-2t}$; t em $\mathbb{R}$

6 $x = \sqrt{t}, y = 3t + 4; t \ge 0$

7 $x = 2 \operatorname{sen} t, y = 3 \cos t; 0 \le t \le 2\pi$

8 $x = \cos t - 2, y = \operatorname{sen} t + 3; 0 \le t \le 2\pi$

Exercs. 9-10: Seja C a curva com a parametrização dada, para t em $\mathbb{R}$. Ache os pontos de C em que o coeficiente angular da tangente é m.

9 $x = -t^3, y = -6t^2 - 18t; m = 2$

10 $x = t^2 + t, y = 5t^2 - 3; m = 4$

Exercs. 11-18: (a) Ache os pontos da curva C em que a tangente é horizontal ou vertical. (b) Ache d^2y/dx^2. (c) Trace o gráfico de C.

11 $x = 4t^2, y = t^3 - 12t$; t em $\mathbb{R}$

12 $x = t^3 - 4t, y = t^2 - 4$; t em $\mathbb{R}$

13 $x = t^3 + 1, y = t^2 - 2t$; t em $\mathbb{R}$

14 $x = 12t - t^3, y = t^2 - 5t$; t em $\mathbb{R}$

15 $x = 3t^2 - 6t, \quad y = \sqrt{t}; \quad t \ge 0$

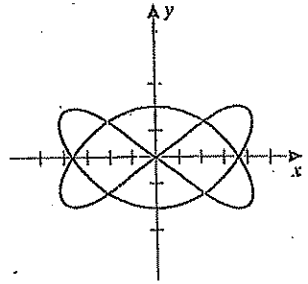
16 $x = \sqrt[3]{t}, \quad y = \sqrt[3]{t} - t; \quad t$ em $\mathbb{R}$

17 $x = \cos^3 t, y = \operatorname{sen}^3 t; 0 \le t \le 2\pi$

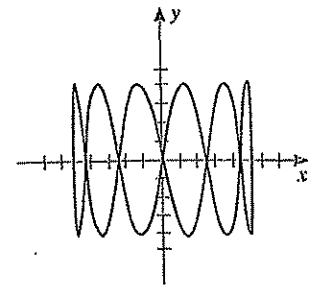
18 $x = \cosh t, y = \operatorname{senh} t$; t em $\mathbb{R}$

Exercs. 19-20: Tem-se a seguir as figuras de Lissajous (ver Exemplo 5, Seção 13.1). Determine onde a tangente é horizontal ou vertical.

19 $x = 4 \operatorname{sen} 2t, y = 2 \cos 3t$



20 $x = 5 \operatorname{sen} \frac{1}{3}t, \quad y = 4 \operatorname{sen} 2t$



Exercs. 21-26: Ache o comprimento da curva.

21 $x = 5t^2, y = 2t^3; 0 \le t \le 1$

22 $x = 3t, y = 2t^{3/2}; 0 \le t \le 4$

23 $x = e^t \cos t, y = e^t \operatorname{sen} t; 0 \le t \le \pi/2$

24 $x = \cos 2t, y = \operatorname{sen}^2 t; 0 \le t \le \pi$

25 $x = t \cos t - \operatorname{sen} t, y = t \operatorname{sen} t + \cos t; 0 \le t \le \pi/2$

26 $x = \cos^3 t, y = \operatorname{sen}^3 t; 0 \le t \le \pi/2$

Exercs. 27-28: Use a regra de Simpson, com $n = 6$, para obter uma aproximação do comprimento da curva.

27 $x = 2 \cos t, y = 3 \operatorname{sen} t; 0 \le t \le 2\pi$

28 $x = 4t^3 - t, y = 2t^2; 0 \le t \le 1$

Exercs. 29-34: Ache a área da superfície gerada pela revolução da curva em torno do eixo-x.

29 $x = t^2, y = 2t; 0 \le t \le 4$

30 $x = 4t, y = t^3; 1 \le t \le 2$

31 $x = t^2, \quad y = t - \frac{1}{3}t^3; \quad 0 \le t \le 1$

32 $x = 4t^2 + 1, y = 3 - 2t; -2 \le t \le 0$

33 $x = t - \operatorname{sen} t, y = 1 - \cos t; 0 \le t \le 2\pi$

34 $x = t, \quad y = \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{4}t^{-1}; \quad 1 \le t \le 2$

Exercs. 35-38: Ache a área da superfície gerada pela revolução da curva em torno do eixo-y.

35 $x = 4t^{1/2}, \quad y = \frac{1}{2}t^2 + t^{-1}; \quad 1 \le t \le 4$

36 $x = 3t, y = t + 1; 0 \le t \le 5$

37 $x = e^t \operatorname{sen} t, y = e^t \cos t; 0 \le t \le \pi/2$

38 $x = 3t^2, y = 2t^3; 0 \le t \le 1$

Exercs. 39-40: Use a regra de Simpson com $n = 4$ para obter uma aproximação da área da superfície gerada pela revolução da curva em torno do eixo indicado.

39 $x = \cos(t^2), y = \operatorname{sen}^2 t; 0 \le t \le 1$; eixo-$x$

40 $x = t^2 + 2t, y = t^4; 0 \le t \le 1$; eixo-$y$

13.3 COORDENADAS POLARES

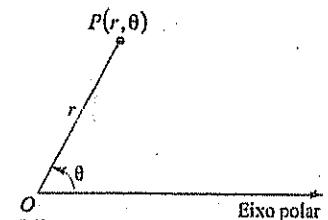


Figura 13.14

Em um sistema de coordenadas, o par ordenado (a, b) denota o ponto cujas distâncias orientadas a partir dos eixos x e y são b e a, respectivamente. Outro método de representação de pontos consiste na utilização de *coordenadas polares*. Começamos com um ponto fixo O (a **origem**, ou **pólo**) e uma semi-reta orientada (o **eixo polar**) com extremidade O. Em seguida, consideramos um ponto arbitrário P do plano, diferente de O. Se, conforme Figura 13.14, $r = d(O, P)$ e θ denota a medida de um ângulo arbitrário determinado pelo eixo polar e OP, então r e θ são as **coordenadas polares** de P; denotamos P por (r, θ) ou $P(r, \theta)$. Como de costume, θ é considerado positivo se o ângulo é gerado por uma rotação anti-horária do eixo polar, e negativo se a rotação se faz no sentido horário. Usam-se para θ tanto medidas em radianos como em graus.

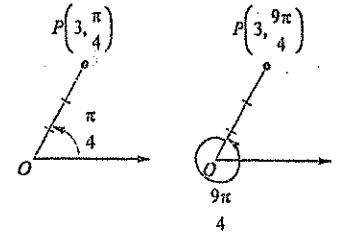


Figura 13.15

As coordenadas polares de um ponto não são únicas. Assim é que, por exemplo, $(3, \pi/4)$, $(3, 9\pi/4)$ e $(3, -7\pi/4)$ representam o mesmo ponto (ver Figura 13.15). Admitimos também a possibilidade de r ser negativo. Neste caso, em lugar de medir $|r|$ unidades ao longo do lado terminal do ângulo θ, medimos ao longo da semi-reta com extremidade O que tem sentido *oposto* ao do lado terminal. Os pontos correspondentes

aos pares $(-3, 5\pi/4)$ e $(-3, -3\pi/4)$ estão grafadas na Figura 13.15.

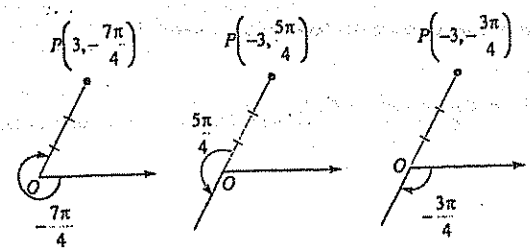


Figura 13.15

Convencionamos atribuir ao pólo O as coordenadas $(0, \theta)$, para θ arbitrário. A associação de pares ordenados da forma (r, θ) aos pontos de um plano constitui um **sistema coordenado polar**, e o plano é um **plano-$r\theta$**.

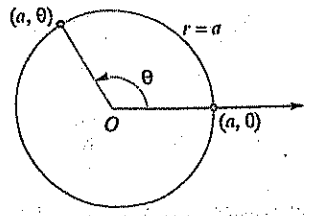


Figura 13.16

Uma **equação polar** é uma equação em r e θ. Uma solução de uma equação polar é um par ordenado (a, b) que conduz a uma igualdade se r é substituído por a e θ por b. O gráfico de uma equação polar é o conjunto de todos os pontos (em um plano-$r\theta$) que correspondem às soluções.

As equações polares mais simples são $r = a$ e $\theta = a$, onde a é um número real não-negativo. Como as soluções da equação polar $r = a$ são da forma (a, θ) para *qualquer* ângulo θ, segue-se que o gráfico é um círculo de raio $|a|$ e centro no pólo. A Figura 13.16 ilustra o caso para $a > 0$. Obtém-se o mesmo gráfico se $r = -a$.

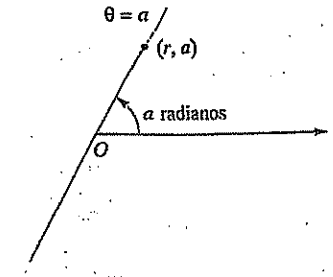


Figura 13.17

As soluções da equação polar $\theta = a$ são da forma (r, a) para *qualquer* real r. Como a coordenada (ângulo) a é constante, o gráfico é uma reta pela origem, conforme ilustrado na Figura 13.17 para o caso $0 < a < \pi/2$.

Nos exemplos a seguir obtemos os gráficos de equações polares marcando pontos. Ao prosseguir o estudo desta seção, o leitor deve procurar reconhecer formas de equações polares, de modo a ser capaz de traçar gráficos marcando apenas alguns pontos.

EXEMPLO 1

Trace o gráfico da equação polar $r = 4 \operatorname{sen} \theta$.

SOLUÇÃO

A tabela abaixo dá algumas soluções da equação. Incluímos uma terceira linha na tabela, contendo aproximações de r com uma casa decimal.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r	0	2	$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}$	4	$2\sqrt{3}$	$2\sqrt{2}$	2	0
r (aprox.)	0	2	2,8	3,4	4	3,4	2,8	2	0

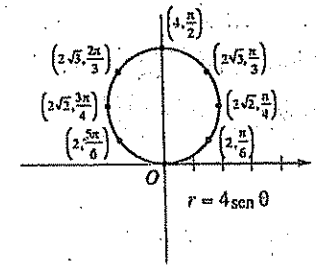


Figura 13.18

Os pontos de um plano-$r\theta$ que correspondem aos pares da tabela parecem estar sobre um círculo de raio 2; tracemos, pois, o seu gráfico (ver Figura 13.18). Para auxiliar na marcação dos pontos, prolongamos o eixo polar na direção negativa e introduzimos uma reta vertical passando pelo pólo.

A demonstração de que o gráfico de $r = 4 \operatorname{sen} \theta$ é um círculo é dada no Exemplo 6. Outros pontos obtidos fazendo-se θ variar de π a 2π estão sobre o mesmo círculo. Por exemplo, a solução $(-2, 7\pi/6)$ nos dá o mesmo ponto que $(2, \pi/6)$; o ponto correspondente a $(-2\sqrt{2}, 5\pi/4)$ é o mesmo que o ponto correspondente a $(2\sqrt{2}, \pi/4)$ etc. Se fazemos θ aumentar, percorrendo todos os números reais, obtemos os mesmos pontos repetidamente, em virtude da periodicidade da função seno.

EXEMPLO 2

Trace o gráfico da equação polar $r = 2 + 2 \cos \theta$.

SOLUÇÃO

Como a função cosseno decresce de 1 a -1 quando θ varia de 0 a π, segue-se que r decresce de 4 a 0 neste intervalo-θ.

A tabela abaixo dá algumas soluções de $r = 2 + 2 \cos \theta$, juntamente com aproximações de r com uma casa decimal.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r	4	$2+\sqrt{3}$	$2+\sqrt{2}$	3	2	1	$2-\sqrt{2}$	$2-\sqrt{3}$	0
r (aprox.)	4	3,7	3,4	3	2	1	0,6	0,3	0

$r = 2+2\cos\theta$

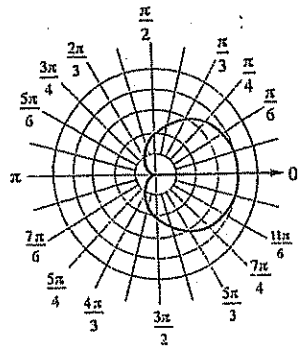


Figura 13.19

Marcando pontos em um plano-$r\theta$ obtemos a metade superior do gráfico esboçado na Figura 13.19. (Usamos papel de gráfico em coordenadas polares, com retas por O em diversos ângulos e círculos concêntricos com centros no pólo.)

Se θ aumenta de π a 2π, então $\cos\theta$ aumenta de -1 a 1 e, conseqüentemente, r aumenta de 0 a 4. Marcando pontos para $\pi \le \theta \le 2\pi$, obtemos a metade inferior do gráfico.

Pode-se obter o mesmo gráfico tomando-se outros intervalos de comprimento 2π para θ.

A curva em forma de coração do Exemplo 2 é uma **cardióide**. Em geral, o gráfico de qualquer uma das equações polares seguintes, com $a \neq 0$, é uma cardióide:

$$r = a(1+\cos\theta) \qquad r = a(1+\operatorname{sen}\theta)$$

$$r = a(1-\cos\theta) \qquad r = a(1-\operatorname{sen}\theta)$$

Se a e b não são nulos, então os gráficos das equações polares seguintes são **caracóis**:

$$r = a + b\cos\theta \qquad r = a + b\operatorname{sen}\theta$$

Note que os casos especiais de caracóis, em que $|a| = |b|$, são cardióides. Alguns caracóis contêm um laço, como se vê no próximo exemplo.

EXEMPLO 3

Trace o gráfico da equação polar $r = 2 + 4\cos\theta$.

SOLUÇÃO

Na tabela a seguir constam as coordenadas de alguns pontos de um plano-$r\theta$ correspondentes a $0 \le \theta \le \pi$.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r	6	$2+2\sqrt{3}$	$2+2\sqrt{2}$	4	2	0	$2-2\sqrt{2}$	$2-2\sqrt{3}$	-2
r (aprox.)	6	5,4	4,8	4	2	0	$-0,8$	$-1,4$	-2

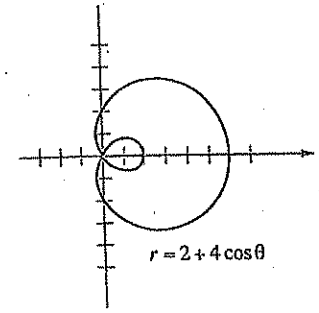


Figura 13.20

Note que $r = 0$ em $\theta = 2\pi/3$. Os valores de r são negativos se $2\pi/3 < \theta \le \pi$, e isto conduz à metade inferior do laço pequeno da Figura 13.20. Fazendo θ variar de π a 2π, obtém-se a metade superior do laço pequeno e a metade inferior do laço grande.

EXEMPLO 4

Trace o gráfico da equação polar $r = a \operatorname{sen} 2\theta$ para $a > 0$.

SOLUÇÃO

Em vez de tabelar soluções, raciocinemos da seguinte forma. Se θ aumenta a partir de 0 ou $\pi/4$, então 2θ varia de 0 a $\pi/2$ e, então, $\operatorname{sen} 2\theta$ aumenta de 0 a 1. Segue-se que r cresce de 0 a a no intervalo-θ $[0, \pi/4]$. Se, em seguida, fazemos θ aumentar de $\pi/4$ a $\pi/2$, então 2θ varia de $\pi/2$ a π e, assim, $\operatorname{sen} 2\theta$ decresce de 1 a 0. Logo, r decresce de a a 0 no intervalo-θ $[\pi/4, \pi/2]$. Os pontos correspondentes no gráfico constituem o laço no primeiro quadrante ilustrado na Figura 13.21. Note que o ponto $P(r, \theta)$ descreve o laço no sentido *anti-horário* (indicado pelas setas), à medida que θ aumenta de 0 a $\pi/2$.

Se $\pi/2 \le \theta \le \pi$, então $\pi \le 2\theta \le 2\pi$ e, portanto $r = a\operatorname{sen} 2\theta \le 0$. Assim, se $\pi/2 < \theta < \pi$, então r é negativo e os pontos $P(r, \theta)$ estão no quarto quadrante. Se θ aumenta de $\pi/2$ a π, então é possível mostrar, marcando pontos, que $P(r, \theta)$ descreve (em sentido anti-horário) o laço exibido no quarto quadrante.

Analogamente, para $\pi \le \theta \le 3\pi/2$ obtemos o laço no terceiro quadrante, e para $3\pi/2 \le \theta \le 2\pi$ temos o laço do segundo quadrante. Ambos os laços são traçados em sentido anti-horário, à medida que θ aumenta. O leitor deve verificar estes fatos marcando alguns pontos com, digamos, $a = 1$. Na Figura 13.21 marcamos apenas os pontos que, no gráfico, correspondem aos maiores valores numéricos de r.

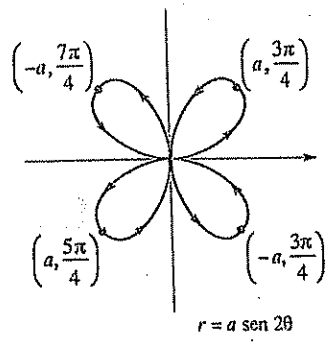


Figura 13.21

O gráfico do Exemplo 4 é uma **rosácea de quatro folhas**. Em geral, uma equação polar da forma

$$r = a\operatorname{sen} n\theta \qquad \text{ou} \qquad r = a\cos n\theta$$

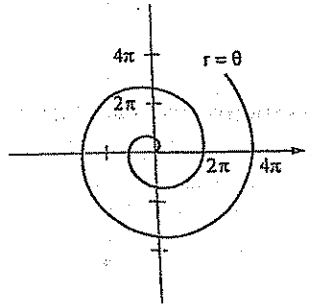


Figura 13.22

para qualquer inteiro positivo n maior do que 1 e qualquer real não-nulo a, tem um gráfico que consiste em um certo número de laços pela origem. Se n é par, há $2n$ laços, e se n é ímpar, há n laços (ver Exercícios 15-18).

O gráfico da equação polar $r = a\theta$ para qualquer real a não-nulo é uma **espiral de Arquimedes**. No próximo exemplo tratamos do caso $a = 1$.

EXEMPLO 5

Trace o gráfico da equação $r = \theta$ para $\theta \geq 0$.

SOLUÇÃO

O gráfico consiste em todos os pontos que têm coordenadas polares da forma (c, c) para todo real $c \geq 0$. Assim, o gráfico contém os pontos $(0, 0)$, $(\pi/2, \pi/2)$, (π, π) etc. À medida que θ cresce, r aumenta na mesma proporção, e a espiral se desenvolve em torno da origem em sentido anti-horário, interceptando o eixo polar em $0, 2\pi, 4\pi, \ldots$, conforme Figura 13.22.

Admitindo θ negativo, então, à medida que θ decresce por valores negativos, a espiral resultante se desenvolve em torno da origem e é simétrica, em relação ao eixo vertical, à curva traçada na Figura 13.22.

Suponhamos agora um plano-xy superposto a um plano-$r\theta$, de modo que o eixo-x positivo coincida com o eixo polar. Qualquer ponto P do plano terá então coordenadas retangulares (x, y) ou coordenadas polares (r, θ). Se $r > 0$, temos situação análoga à da Figura 13.23(i). Se $r < 0$, temos a situação de (ii) da Figura, onde, para fins posteriores, grafamos também o ponto P' de coordenadas polares $(|r|, \theta)$ e coordenadas retangulares $(-x, -y)$.

(i) $r > 0$ (ii) $r < 0$

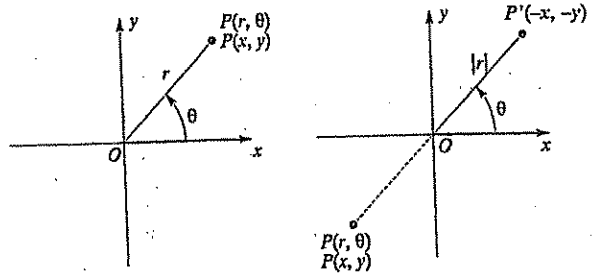


Figura 13.23

O resultado a seguir indica as relações entre (x, y) e (r, θ); supõe-se que o eixo-x positivo coincida com o eixo polar.

Relações entre coordenadas retangulares e polares (13.8)

As coordenadas retangulares (x, y) e as coordenadas polares (r, θ) de um ponto P estão relacionadas da seguinte forma:

(i) $x = r\cos\theta, \quad y = r\operatorname{sen}\theta$

(ii) $r^2 = x^2 + y^2, \quad \operatorname{tg}\theta = \dfrac{y}{x}$ se $x \neq 0$

DEMONSTRAÇÃO

Conquanto tenhamos ilustrado θ como um ângulo agudo na Figura 13.23, o que segue vale para todos os ângulos. Se $r > 0$ como na Figura 13.23(i), então $\cos\theta = x/r$, $\operatorname{sen}\theta = y/r$, e assim

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\operatorname{sen}\theta$$

Se $r < 0$, então $|r| = -r$ e, pela Figura 13.23(ii), vemos que

$$\cos\theta = \frac{-x}{|r|} = \frac{-x}{-r} = \frac{x}{r}, \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{-y}{|r|} = \frac{-y}{-r} = \frac{y}{r}$$

A multiplicação por r nos dá as relações (i) e, assim, estas fórmulas são válidas quer r seja positivo quer negativo. Se $r = 0$, então o ponto é o pólo e novamente vemos que as fórmulas em (i) são verdadeiras.

As fórmulas (ii) decorrem imediatamente da Figura 13.23.

O resultado precedente permite passar de um sistema de coordenadas para outro. Uma aplicação mais importante consiste em transformar uma equação polar em uma equação em x e y, e vice-versa. Os três próximos exemplos ilustram o fato.

EXEMPLO 6

Ache uma equação em x e y que tenha o mesmo gráfico da equação polar $r = a\operatorname{sen}\theta$, com $a \neq 0$. Trace o gráfico.

SOLUÇÃO

Por (13.8)(i), $y = r\operatorname{sen}\theta$ é uma relação entre $\operatorname{sen}\theta$ e y. Para introduzir esta expressão na equação $r = a\operatorname{sen}\theta$, multiplicamos ambos os membros por r, obtendo

$$r^2 = ar\operatorname{sen}\theta$$

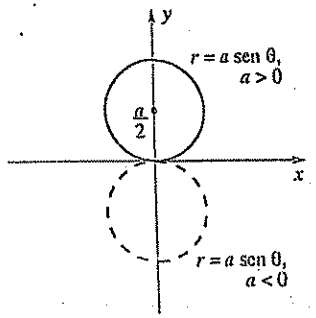


Figura 13.24

Em seguida, como $r^2 = x^2 + y^2$ e $y = r \operatorname{sen} \theta$, temos

$$x^2 + y^2 = ay$$

ou

$$x^2 + y^2 - ay = 0$$

Completando os quadros em y, obtemos

$$x^2 + y^2 - ay + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

ou

$$x^2 + \left(y + \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

No plano-xy, o gráfico da última equação é um círculo com centro em $(0, a/2)$ e raio $|a|/2$, conforme ilustrado na Figura 13.24 para o caso $a > 0$ (o círculo sólido) e $a < 0$ (o círculo tracejado).

Utilizando o mesmo método do exemplo precedente, podemos mostrar que o gráfico de $r = a \cos \theta$, com $a \neq 0$, é um círculo de raio $a/2$ do tipo ilustrado na Figura 13.25.

EXEMPLO 7

Ache a equação polar da hipérbole $x^2 - y^2 = 16$.

SOLUÇÃO

Com as fórmulas $x = r \cos \theta$ e $y = r \operatorname{sen} \theta$, obtemos as seguintes equações polares:

$$(r \cos \theta)^2 - (r \operatorname{sen} \theta)^2 = 16$$
$$r^2 \cos^2 \theta - r^2 \operatorname{sen}^2 \theta = 16$$
$$r^2 (\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) = 16$$
$$r^2 \cos 2\theta = 16$$
$$r^2 = \frac{16}{\cos 2\theta}$$
$$r^2 = 16 \sec 2\theta$$

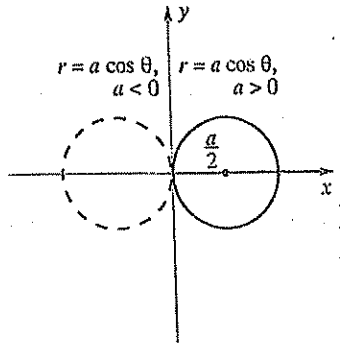


Figura 13.25

A divisão por $\cos 2\theta$ é lícita porque $\cos 2\theta \neq 0$. (Se $\cos 2\theta = 0$, então $r^2 \cos 2\theta \neq 16$.

EXEMPLO 8

Ache a equação polar de uma reta.

SOLUÇÃO

Toda reta em um plano coordenado xy é o gráfico de uma equação linear $ax + by = c$. Com as fórmulas $x = r \cos \theta$ e $y = r \operatorname{sen} \theta$ obtemos as seguintes equações polares equivalentes:

$$ar \cos \theta + br \operatorname{sen} \theta = c$$
$$r(a \cos \theta + b \operatorname{sen} \theta) = c$$
$$r = \frac{c}{a \cos \theta + b \operatorname{sen} \theta}$$

Superpondo-se um plano-xy a um plano-$r\theta$, o gráfico de uma equação polar pode ser simétrico em relação ao eixo-x (o eixo polar), ao eixo-y (a reta $\theta = \pi/2$) ou à origem (o pólo). A Figura 13.26 ilustra algumas simetrias típicas. Isto conduz ao próximo resultado.

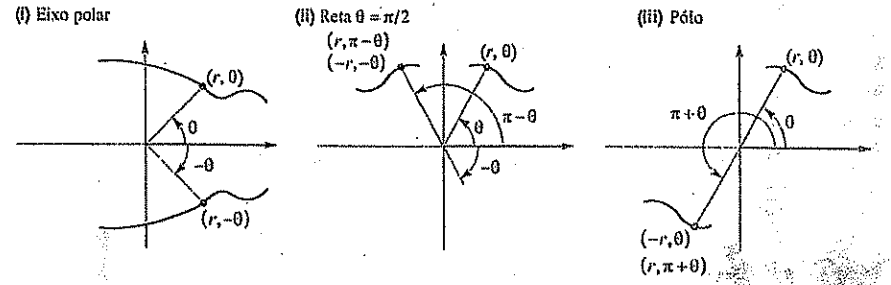


Figura 13.26 Simetrias de gráficos de equações polares.

Testes de simetria (13.9)

(i) O gráfico de $r = f(\theta)$ é simétrico em relação ao eixo polar se a substituição de θ por $-\theta$ conduz a uma equação equivalente.

(ii) O gráfico de $r = f(\theta)$ é simétrico em relação à reta vertical $\theta = \pi/2$ se a substituição de (a) θ por $\pi - \theta$ ou (b) de r por $-r$ e θ por $-\theta$ conduz a uma equação equivalente.

(iii) O gráfico de $r = f(\theta)$ é simétrico em relação ao pólo se a substituição de (a) r por $-r$ ou (b) θ por $\pi + \theta$ conduz a uma equação equivalente.

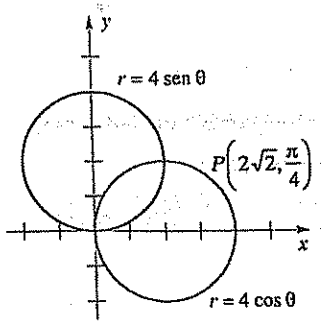


Figura 13.27

Para ilustrar: Como cos (–θ) = cos θ, o gráfico da equação polar $r = 2 + 4 \cos \theta$ do Exemplo 3 é simétrico em relação ao eixo polar, pelo teste (i). Como sen $(\pi - \theta)$ = sen θ, o gráfico do Exemplo 1 é simétrico em relação à reta $\theta = \pi/2$ pelo teste (ii). O gráfico do Exemplo 4 é simétrico em relação ao eixo polar, à reta $\theta = \pi/2$ e ao pólo. Há outros testes de simetria, entretanto, os que mencionamos são os de mais fácil aplicação.

Ao contrário do gráfico de uma equação em x e y, o gráfico de uma equação polar $r = f(\theta)$ pode ser simétrico, em relação ao eixo polar, à reta $\theta = \pi/2$ ou ao pólo *sem* satisfazer um dos testes de simetria precedentes. Isto decorre das várias maneiras distintas de representar um ponto em coordenadas polares.

Outra diferença entre os sistemas de coordenadas retangulares e polares é que os pontos de intersecção de dois gráficos nem sempre podem ser obtidos resolvendo-se simultaneamente as equações polares. Assim é que, pelo Exemplo 1, o gráfico de $r = 4$ sen θ é um círculo de diâmetro 4 com centro em $(2, \pi/2)$ (ver Figura 13.27). Da mesma forma, o gráfico de $r = 4 \cos \theta$ é um círculo de diâmetro 4 e centro em (2, 0) sobre o eixo polar. Referindo-nos à Figura 13.27, vemos que as coordenadas do ponto de intersecção $P(2\sqrt{2}, \pi/4)$ no quadrante I satisfazem ambas as equações; todavia, não se pode achar a origem O, que pertence a cada um dos círculos, resolvendo-se simultaneamente as equações. Assim, na pesquisa de pontos de intersecção de gráficos polares, às vezes é necessário apelar para os próprios gráficos, além de resolver as duas equações simultaneamente. Um método alternativo consiste em utilizar equações diferentes (equivalentes) para os gráficos.

As tangentes a gráficos de equações polares podem ser determinadas de acordo com o próximo teorema.

Teorema (13.10) O coeficiente angular m da tangente ao gráfico de $r = f(\theta)$ no ponto $P(r, \theta)$ é

$$m = \frac{\frac{dr}{d\theta} \operatorname{sen} \theta + r \cos \theta}{\frac{dr}{d\theta} \cos \theta - r \operatorname{sen} \theta}$$

DEMONSTRAÇÃO

Se (x, y) são as coordenadas retangulares de $P(r, \theta)$, então, pelo Teorema (13.8),

$$x = r \cos \theta = f(\theta) \cos \theta$$
$$y = r \operatorname{sen} \theta = f(\theta) \operatorname{sen} \theta$$

Estas equações podem ser consideradas como equações paramétricas do gráfico com parâmetro θ. Aplicando o Teorema (13.3), vemos que o coeficiente angular da tangente em (x, y) é

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{f(\theta) \cos \theta + f'(\theta) \operatorname{sen} \theta}{f(\theta)(-\operatorname{sen} \theta) + f'(\theta) \cos \theta}$$

$$= \frac{f'(\theta) \operatorname{sen} \theta + f(\theta) \cos \theta}{f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \operatorname{sen} \theta}$$

o que é equivalente à fórmula do enunciado do teorema.

As tangentes horizontais correspondem ao caso em que o numerador na fórmula de m é 0, enquanto o denominador é diferente de 0. As tangentes verticais correspondem ao caso em que o denominador é 0 mas o numerador é diferente de 0. O caso 0/0 exige investigação mais detalhada.

Para achar os coeficientes angulares de tangentes no pólo, devemos determinar os valores de θ para os quais $r = f(\theta) = 0$. Para tais valores (e com $r = 0$ e $dr/d\theta \neq 0$), a fórmula do Teorema (13.10) se reduz a $m = \operatorname{tg} \theta$. O próximo exemplo ilustra estas observações.

EXEMPLO 9

Para a cardióide $r = 2 + 2 \cos \theta$ com $0 \leq \theta < 2\pi$, ache

(a) o coeficiente angular da tangente em $\theta = \pi/6$.

(b) os pontos em que a tangente é horizontal.

(c) os pontos em que a tangente é vertical.

SOLUÇÃO

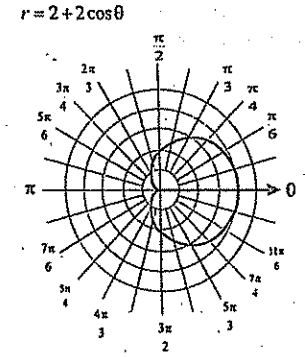


Figura 13.28

(a) O gráfico de $r = 2 + 2 \cos \theta$ já foi estudado no Exemplo 2 e está traçado novamente na Figura 13.28. Aplicando o Teorema (13.10), vemos que o coeficiente angular m da tangente é

$$m = \frac{(-2 \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} \theta + (2 + 2 \cos \theta) \cos \theta}{(-2 \operatorname{sen} \theta) \cos \theta - (2 + 2 \cos \theta) \operatorname{sen} \theta}$$

$$= \frac{2(\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) + 2 \cos \theta}{-2(2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta) - 2 \operatorname{sen} \theta}$$

$$= -\frac{\cos 2\theta + \cos \theta}{\operatorname{sen} 2\theta + \operatorname{sen} \theta}$$

Em $\theta = \pi/6$ (isto é, no ponto $(2 + \sqrt{3}, \pi/6)$),

$$m = \frac{\cos(\pi/3) + \cos(\pi/6)}{\operatorname{sen}(\pi/3) + \operatorname{sen}(\pi/6)} = \frac{(1/2) + \sqrt{3}/2)}{(\sqrt{3}/2) + (1/2)} = -1$$

(b) Para achar as tangentes horizontais, fazemos

$$\cos 2\theta + \cos\theta = 0$$

Esta equação pode ser escrita como

$$2\cos^2\theta - 1 + \cos\theta = 0$$

ou $$(2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1) = 0$$

De $\cos\theta = \frac{1}{2}$ obtemos $\theta = \pi/3$ e $\theta = 5\pi/3$. Os pontos correspondentes são $(3, \pi/3)$ e $(3, 5\pi/3)$.

$\cos\theta = -1$ nos dá $\theta = \pi$. O denominador da fórmula de m é 0 em $\theta = \pi$, tornando-se necessária uma investigação adicional. Se $\theta = \pi$ então $r = 0$ e a fórmula de m em (13.10) se reduz a $m = \operatorname{tg}\theta$. Assim, o coeficiente angular em $(0, \pi)$ é $m = \operatorname{tg}\pi = 0$ e, portanto, a tangente é horizontal no pólo.

(c) Para achar tangentes verticais, fazemos

$$\operatorname{sen} 2\theta + \operatorname{sen}\theta = 0$$

Equações equivalentes:

$$2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \operatorname{sen}\theta = 0$$

e $$\operatorname{sen}\theta(2\cos\theta + 1) = 0$$

Fazendo $\operatorname{sen}\theta = 0$ e $\cos\theta = -\frac{1}{2}$, somos levados aos seguintes valores de θ: $0, \pi, 2\pi/3$ e $4\pi/3$. Já vimos, na parte (b), que π nos dá uma tangente horizontal. Os valores restantes resultam nos pontos $(4, 0)$, $(1, 2\pi/3)$ e $(1, 4\pi/3)$, onde o gráfico tem tangentes verticais.

EXERCÍCIOS 13.3

Exercs. 1-26: Trace o gráfico da equação polar.

1 $r = 5$

2 $r = -2$

3 $\theta = -\pi/6$

4 $\theta = \pi/4$

5 $r = 3\cos\theta$

6 $r = -2\operatorname{sen}\theta$

7 $r = 4 - 4\operatorname{sen}\theta$

8 $r = -6(1 + \cos\theta)$

9 $r = 2 + 4\operatorname{sen}\theta$

10 $r = 1 + 2\cos\theta$

11 $r = 2 - \cos\theta$

12 $r = 5 + 3\operatorname{sen}\theta$

13 $r = 4\csc\theta$

14 $r = -3\sec\theta$

15 $r = 8\cos 3\theta$

16 $r = 2\operatorname{sen} 4\theta$

17 $r = 3\operatorname{sen} 2\theta$

18 $r = 8\cos 5\theta$

19 $r^2 = 4\cos 2\theta$ (lemniscata)

20 $r^2 = -16\operatorname{sen} 2\theta$

21 $r = e^\theta$, $\theta \geq 0$ (espiral logarítmica)

22 $r = 6\sin^2(\theta/2)$

23 $r = 2\theta$, $\theta \geq 0$

24 $r\theta = 1$, $\theta > 0$ (espiral)

25 $r = 2 + 2\sec\theta$ (concóide)

26 $r = 1 - \csc\theta$

Exercs. 27-36: Ache uma equação polar que tenha o mesmo gráfico da equação em x e y.

27 $x = -3$

28 $y = 2$

29 $x^2 + y^2 = 16$

30 $x^2 = 8y$

31 $2y = -x$

32 $y = 6x$

33 $y^2 - x^2 = 4$

34 $xy = 8$

35 $(x^2 + y^2)\operatorname{arc\,tg}(y/x) = ay$, $a > 0$ (cochleoide)

36 $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (Folium de Descartes)

Exercs. 37-50: Ache uma equação em x e y que tenha o mesmo gráfico da equação polar e use-a para auxiliar o traçado no plano-$r\theta$.

37 $r\cos\theta = 5$

38 $r\operatorname{sen}\theta = -2$

39 $r = -3\csc\theta$

40 $r = 4\sec\theta$

41 $r^2\cos 2\theta = 1$

42 $r^2\operatorname{sen} 2\theta = 4$

43 $r(\operatorname{sen}\theta - 2\cos\theta) = 6$

44 $r(3\cos\theta - 4\operatorname{sen}\theta) = 12$

45 $r(\operatorname{sen}\theta + r\cos^2\theta) = 1$

46 $r(r\operatorname{sen}^2\theta - \cos\theta) = 3$

47 $r = 8\operatorname{sen}\theta - 2\cos\theta$

48 $r = 2\cos\theta - 4\operatorname{sen}\theta$

49 $r = \operatorname{tg}\theta$

50 $r = 6\cot\theta$

Exercs. 51-60: Ache o coeficiente angular da tangente ao gráfico da equação polar no ponto correspondente ao valor dado de θ.

51 $r = 2\cos\theta$; $\theta = \pi/3$

52 $r = -2\operatorname{sen}\theta$; $\theta = \pi/6$

53 $r = 4(1 - \operatorname{sen}\theta)$; $\theta = 0$

54 $r = 1 + 2\cos\theta$; $\theta = \pi/2$

55 $r = 8\cos 3\theta$; $\theta = \pi/4$

56 $r = 2\operatorname{sen} 4\theta$; $\theta = \pi/4$

57 $r^2 = 4\cos 2\theta$; $\theta = \pi/6$

58 $r^2 = -2\operatorname{sen} 2\theta$; $\theta = 3\pi/4$

59 $r = 2^\theta$; $\theta = \pi$

60 $r\theta = 1$; $\theta = 2\pi$

61 Se $P_1(r_1, \theta_1)$ e $P_2(r_2, \theta_2)$ são pontos de um plano-$r\theta$, use a lei dos cossenos para provar que

$$[d(P_1, P_2)]^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)$$

62 Se a e b são reais não-nulos, prove que o gráfico de $r = a\operatorname{sen}\theta + b\cos\theta$ é um círculo, e ache o centro e o raio.

63 Se os gráficos das equações polares $r = f(\theta)$ e $r = g(\theta)$ se interceptam em $P(r, \theta)$, prove que as tangentes em P são perpendiculares se e somente se

$$f'(\theta)\,g'(\theta) + f(\theta)\,g(\theta) = 0$$

(Os gráficos se dizem *ortogonais* em P.)

64 Use o exercício 63 para provar que os gráficos de cada par de equações são ortogonais no seu ponto de intersecção:

(a) $r = a\operatorname{sen}\theta$, $r = a\cos\theta$ (b) $r = a\theta$, $r\theta = a$

65 Se $\cos\theta \neq 0$, mostre que o coeficiente angular da tangente ao gráfico de $r = f(\theta)$ é

$$m = \frac{(dr/d\theta)\operatorname{tg}\theta + r}{(dr/d\theta) - r\operatorname{tg}\theta}$$

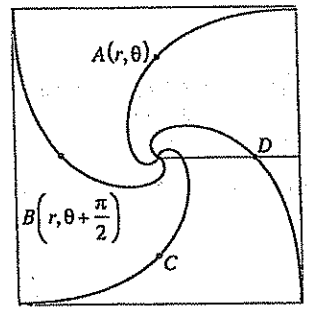
66 Uma espiral logarítmica tem equação polar $r = ae^{b\theta}$ para constantes a e b não-nulas (ver Exercício 21). Esta curva é ilustrada no famoso *problema dos quatro insetos*. Quatro insetos A, B, C, D estão nos quatro vértices de um quadrado, cujo centro corresponde ao pólo. Os insetos começam a caminhar simultaneamente, à mesma velocidade, cada um em direção ao próximo, conforme figura mostrada a seguir. Admita que os insetos nunca se encontrem (são infinitamente pequenos!). Em qualquer instante as posições dos insetos são os vértices de um quadrado que diminui e gira em torno do centro do quadro original, à medida que os insetos continuam a caminhar. Se a posição do inseto A tem coordenadas polares (r, θ), então a posição de B tem coordenadas $(r, \theta + \pi/2)$.

(a) Mostre que a reta por A e B tem coeficiente angular

$$\frac{\operatorname{sen}\theta - \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta}$$

(b) A reta por A e B é tangente à trajetória do inseto A. Use a fórmula do Exercício 65 para concluir que $dr/d\theta = -r$.

(c) Prove que a trajetória do inseto A é uma espiral logarítmica. (*Sugestão*: Resolva a equação diferencial em (b) separando as variáveis). 66



Exercs. 67-68: Grafe a equação para os valores dados de θ e use o gráfico para determinar simetrias.

67 $r = 2\,\text{sen}^2\,\theta\,\text{tg}^2\,\theta;\ -\pi/3 \le \theta \le \pi/3$

68 $r = \dfrac{4}{1 + \text{sen}^2\,\theta};\ 0 \le \theta \le 2\pi$

Exercs. 69-70: Grafe as equações polares no mesmo plano coordenado e estime os pontos de intersecção dos gráficos.

69 $r = 8\cos 3\theta,\ r = 4 - 2{,}5\cos\theta$

70 $r = 2\,\text{sen}^2\,\theta,\quad r = \dfrac{3}{4}(\theta + \cos^2\theta)$

13.4 INTEGRAIS EM COORDENADAS POLARES

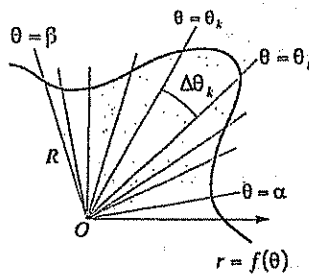


Figura 13.29

Pode-se achar a área de certas regiões delimitadas por gráficos de equações polares utilizando-se limites de somas de áreas de setores circulares. Denominaremos região R_θ (para integração em relação a θ) uma região R do plano $r\theta$ delimitada por retas $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$ para $0 \le \alpha < \beta \le 2\pi$ e pelo gráfico de uma equação polar $r = f(\theta)$, onde f é contínua e $f(\theta) \ge 0$ em $[\alpha, \beta]$. A Figura 13.29 ilustra uma região R_θ.

Seja P uma partição de $[\alpha, \beta]$ determinada por

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_n = \beta$$

e seja $\Delta\theta_k = \theta_k - \theta_{k-1}$ para $k = 1, 2, \ldots, n$. As retas $\theta = \theta_k$ dividem R em sub-regiões em forma de cunhas. Se $f(u_k)$ é o valor mínimo e $f(v_k)$ é o valor máximo de f em $[\theta_{k-1}, \theta_k]$, então, de acordo com a Figura 13.30, a área ΔA_k da k^{ma} sub-região está entre as áreas dos setores circulares inscrito e circunscrito e com ângulo central $\Delta\theta_k$ e raios $f(u_k)$ e $f(v_k)$, respectivamente. Então, pelo Teorema (1.15),

$$\tfrac{1}{2}[f(u_k)]^2\,\Delta\theta_k \le A_k \le \tfrac{1}{2}[f(v_k)]^2\,\Delta\theta_k$$

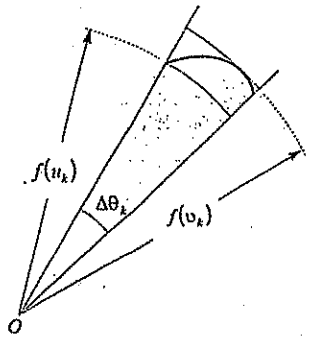


Figura 13.30

Somando de $k = 1$ a $k = n$ e notando que a soma dos ΔAk é a área A de R, obtemos

$$\sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{2}[f(u_k)]^2\,\Delta\theta_k \le A \le \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{2}[f(v_k)]^2\,\Delta\theta_k$$

Os limites das somas, quando a norma $\|P\|$ da subdivisão tende para 0, são ambos iguais à integral $\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}[f(\theta)]^2\,d\theta$. Isto nos dá o resultado seguinte.

Teorema (13.11)

Se f é contínua e $f(\theta) \ge 0$ em $[\alpha, \beta]$, onde $0 \le \alpha < \beta \le 2\pi$, então a área A da região delimitada pelos gráficos de $r = f(\theta)$, $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$ é

$$A = \int_\alpha^\beta \tfrac{1}{2}[f(\theta)]^2\,d\theta = \int_\alpha^\beta \tfrac{1}{2}r^2\,d\theta$$

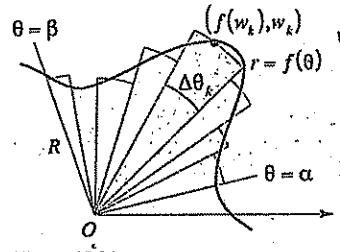


Figura 13.31

A integral no Teorema (13.11) pode ser interpretada como um limite de somas escrevendo-se

$$A = \int_\alpha^\beta \tfrac{1}{2}[f(\theta)]^2\,d\theta = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{2}[f(w_k)]^2\,\Delta\theta_k$$

para qualquer número w_k no subintervalo $[\theta_{k-1}, \theta_k]$ de $[\alpha, \beta]$. A Figura 13.31 ilustra geometricamente uma soma de Riemann típica.

As seguintes diretrizes são úteis para relembrar esta fórmula de limite de somas (ver Figura 13.32).

Diretrizes para achar a área de uma região (13.12)

1 Esboce a região, traçando o gráfico de $r = f(\theta)$. Ache o menor valor $\theta = \alpha$ e o maior valor $\theta = \beta$ para pontos (r, θ) na região.

2 Esboce um setor circular típico e indique seu ângulo central $d\theta$.

3 Expresse a área do setor da diretriz 2 como $\frac{1}{2}r^2\,d\theta$.

4 Aplique à expressão da diretriz 3 o operador limite de somas $\int_\alpha^\beta$ e calcule a integral.

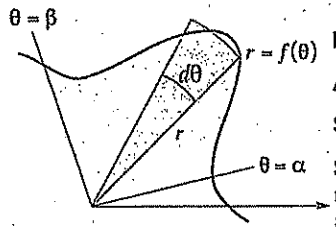


Figura 13.32

EXEMPLO 1

Ache a área da região delimitada pela cardióide $r = 2 + 2\cos\theta$.

SOLUÇÃO

Seguindo a diretriz 1, começamos por esboçar a região, como na Figura 13.33. Obtém-se a cardióide fazendo-se θ variar de 0 a 2π; entretanto, em virtude da simetria, podemos achar a área da metade superior e multiplicar o resultado por 2. Assim,

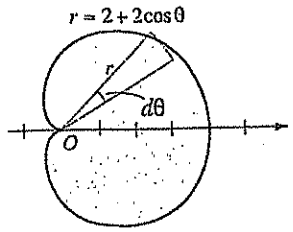


Figura 13.33

usamos $\alpha = 0$ e $\beta = \pi$ como o menor e o maior valor de θ. De acordo com a diretriz 2, traçamos um setor circular típico e determinamos seu ângulo central $d\theta$. Para aplicar a diretriz 3, apelamos para a figura, obtendo o seguinte:

raio do setor circular: $r = 2 + 2 \cos \theta$

área do setor: $\frac{1}{2} r^2 \, d\theta = \frac{1}{2}(2 + 2 \cos \theta)^2 \, d\theta$

Utilizamos em seguida a diretriz 4 com $\alpha = 0$ e $\beta = \pi$, lembrando que a aplicação de $\int_0^{\pi}$ à expressão $\frac{1}{2}(2 + 2 \cos \theta)^2 \, d\theta$ equivale a tomar um limite de somas de áreas de setores circulares, varrendo toda a região ao variar θ de 0 a π. Assim,

$$A = 2 \int_0^{\pi} \tfrac{1}{2}(2 + 2 \cos \theta)^2 \, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} (4 + 8 \cos \theta + 4 \cos^2 \theta) \, d\theta$$

Como $\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$, obtemos

$$A = \int_0^{\pi} (6 + 8 \cos \theta + 2 \cos 2\theta) \, d\theta$$

$$= \left[6\theta + 8 \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} 2\theta\right]_0^{\pi} = 6\pi$$

Poderíamos também ter achado a área tomando $\alpha = 0$ e $\beta = 2\pi$.

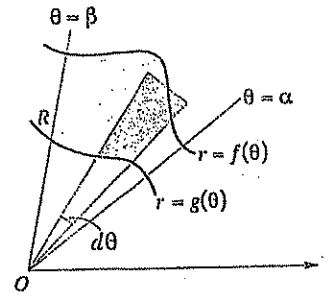


Figura 13.34

A Figura 13.34 ilustra uma região R entre os gráficos de duas equações polares $r = f(\theta)$ e $r = g(\theta)$ e as retas $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$. Podemos achar a área A de R subtraindo a área da região *interior* delimitada por $r = g(\theta)$, da área da região *exterior* delimitada por $r = f(\theta)$, como a seguir:

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \tfrac{1}{2}[f(\theta)]^2 \, d\theta - \int_{\alpha}^{\beta} \tfrac{1}{2}[g(\theta)]^2 \, d\theta$$

Utilizamos esta técnica no próximo exemplo.

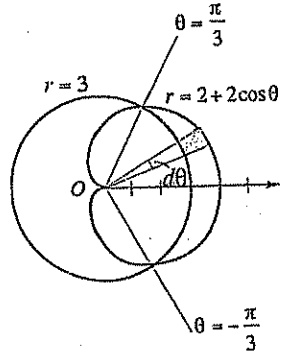


Figura 13.35

EXEMPLO 2

Ache a área A da região R interior à cardióide $r = 2 + 2 \cos \theta$ e exterior ao círculo $r = 3$.

SOLUÇÃO

A Figura 13.35 exibe a região R e setores circulares que se prolongam do pólo aos gráficos das duas equações polares. Os pontos de intersecção $(3, -\pi/3)$ e $(3, \pi/3)$ se obtêm resolvendo-se as equações simultaneamente. Como os ângulos α e β nas diretrizes 13.12 são não-negativos, acharemos a área da metade superior de R (usando $\alpha = 0$ e $\beta = \pi/3$) e duplicaremos o resultado. Subtraindo a área da região interior (delimitada por $r = 3$) da área da região exterior (delimitada por $r = 2 + 2 \cos \theta$), obtemos

$$A = 2\left[\int_0^{\pi/3} \tfrac{1}{2}(2 + 2 \cos \theta)^2 \, d\theta - \int_0^{\pi/3} \tfrac{1}{2}(3)^2 \, d\theta\right]$$

$$= \int_0^{\pi/3} (4 \cos^2 \theta + 8 \cos \theta - 5) \, d\theta$$

Como no Exemplo 1, pode-se calcular a integral mediante a substituição $\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$. Pode-se mostrar que

$$A = \tfrac{9}{2}\sqrt{3} - \pi \approx 4{,}65$$

Se uma curva C é o gráfico de uma equação polar $r = f(\theta)$ de $\theta = \alpha$ a $\theta = \beta$, podemos achar seu comprimento L utilizando equações paramétricas. Assim, tal como na prova do Teorema (13.10), temos como parametrização de C,

$$x = f(\theta) \cos \theta, \; y = f(\theta) \operatorname{sen} \theta; \alpha \le \theta \le \beta$$

Diferenciando em relação a θ, obtemos

$$\frac{dx}{d\theta} = -f(\theta) \operatorname{sen} \theta + f'(\theta) \cos \theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = f(\theta) \cos \theta + f'(\theta) \operatorname{sen} \theta$$

Em vista da identidade trigonométrica $\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, pode-se mostrar que

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = [f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2$$

A substituição no Teorema (13.35) com $t = \theta$, $a = \alpha$ e $b = \beta$ dá

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2} \, d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} \, d\theta$$

Para rememorar esta fórmula, podemos utilizar a diferencial do comprimento de arco $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ em (13.6), obtendo:

Diferencial do comprimento de arco (13.13)

$$ds = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

Podemos agora escrever a fórmula de L como

$$L = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} ds$$

Os limites de integração indicam que a variável independente é θ, e não s.

EXEMPLO 3

Ache o comprimento da cardióide $r = 1 + \cos\theta$.

SOLUÇÃO

A Figura 13.36 ilustra a cardióide. Lançando mão da simetria, determinaremos o comprimento da metade superior e duplicaremos o resultado. Aplicando (13.13), temos

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(1+\cos\theta)^2 + (-\operatorname{sen}\theta)^2}\, d\theta \\ &= \sqrt{1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta \\ &= \sqrt{2 + 2\cos\theta}\, d\theta \\ &= \sqrt{2}\sqrt{1+\cos\theta}\, d\theta \end{aligned}$$

Logo

$$L = 2\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} ds = 2\int_0^{\pi} \sqrt{2}\sqrt{1+\cos\theta}\, d\theta$$

A última integral pode ser calculada empregando a identidade trigonométrica $\cos^2\frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}(1+\cos\theta)$, equivalentemente, $1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{1}{2}\theta$. Assim,

$$\begin{aligned} L &= 2\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{2\cos^2\tfrac{1}{2}\theta}\, d\theta \\ &= 4\int_0^{\pi} \cos\tfrac{1}{2}\theta\, d\theta \\ &= 8\left[\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\theta\right]_0^{\pi} = 8 \end{aligned}$$

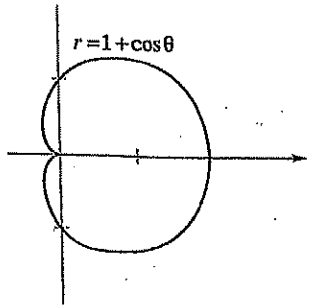


Figura 13.36

Na solução do Exemplo 3, era legítima a substituição de $\sqrt{\cos^2\frac{1}{2}\theta}$ por $\cos\frac{1}{2}\theta$, porque, se $0 \le \theta \le \pi$, então $0 \le \frac{1}{2}\theta \le \frac{\pi}{2}$,

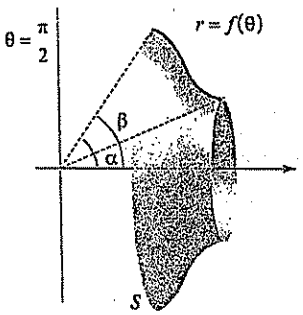


Figura 13.37

e, daí, $\cos\frac{1}{2}\theta$ é positivo em $[0, \pi]$. Se não tivéssemos utilizado a simetria, escrevendo simplesmente L como $\int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + (dr/d\theta)^2}\, d\theta$, esta simplificação não seria válida. De modo geral, ao determinar áreas ou comprimentos de arcos que envolvem coordenadas polares, é conveniente utilizar quaisquer simetrias acaso existentes.

Seja C o gráfico de uma equação polar $r = f(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$. Vamos obter uma fórmula para a área S da superfície gerada pela revolução de C em torno do eixo polar (ver Figura 13.37). Como as equações paramétricas de C são

$$x = f(\theta)\cos\theta,\ y = f(\theta)\operatorname{sen}\theta;\ \alpha \le \theta \le \beta$$

podemos achar S aplicando o Teorema (13.7) com $\theta = t$. Isto nos dá o seguinte resultado, onde a diferencial do comprimento de arco ds é dada por (13.13).

Superfícies de revolução em coordenadas polares (13.14)

Em torno do eixo polar:

$$S = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} 2\pi y\, ds = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} 2\pi r \operatorname{sen}\theta\, ds$$

Em torno da reta $\theta = \pi/2$:

$$S = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} 2\pi x\, ds = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} 2\pi r\cos\theta\, ds$$

Ao aplicar (13.14), *devemos escolher α e β de modo que a superfície não trace a si própria novamente quando C gira*, como seria o caso se o círculo $r = \cos\theta$, com $0 \le \theta \le \pi$, girasse em torno do eixo polar.

EXEMPLO 4

A parte da espiral $r = e^{\theta/4}$ de $\theta = 0$ a $\theta = \pi$ gira em torno do eixo polar. Ache a área da superfície resultante.

SOLUÇÃO

A Figura 13.38 ilustra a superfície. De acordo com (13.13), a diferencial do comprimento de arco em coordenadas polares é

$$ds = \sqrt{(e^{\theta/2})^2 + (\tfrac{1}{2}e^{\theta/2})^2}\, d\theta$$

$$= \sqrt{\frac{5}{4}e^{\theta}}\, d\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}e^{\theta/2}\, d\theta$$

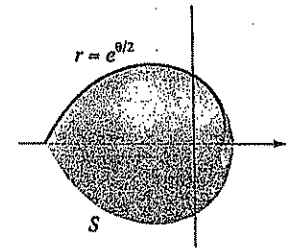


Figura 13.38

Logo, por (13.14),

$$S = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} 2\pi y \, ds = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} 2\pi r \operatorname{sen}\theta \, ds$$
$$= \int_0^{\pi} 2\pi e^{\theta/2} \operatorname{sen}\theta \left(\frac{\sqrt{5}}{2} e^{\theta/2}\right) d\theta$$
$$= \sqrt{5}\,\pi \int_0^{\pi} e^{\theta} \operatorname{sen}\theta \, d\theta$$

Por integração por partes, ou aplicando a Fórmula 98 da tábua de integrais (ver Apêndice IV), temos

$$S = \frac{\sqrt{5}\,\pi}{2}\left[e^{\theta}(\operatorname{sen}\theta - \cos\theta)\right]_0^{\pi} = \frac{\sqrt{5}\,\pi}{2}(e^{\pi}+1) \approx 84{,}8.$$

EXERCÍCIOS 13.4

Exercs. 1-6: Determine a área da região delimitada pelo gráfico da equação polar.

1 $r = 2\cos\theta$ 2 $r = 5\operatorname{sen}\theta$

3 $r = 1 - \cos\theta$ 4 $r = 6 - 6\operatorname{sen}\theta$

5 $r = \operatorname{sen} 2\theta$ 6 $r^2 = 9\cos 2\theta$

Exercs. 7-8: Ache a área da região R.

7 $R = \{(r,\theta): 0 \le \theta \le \pi/2, 0 \le r \le e^{\theta}\}$

8 $R = \{(r,\theta): 0 \le \theta \le \pi, 0 \le r \le 2\theta\}$

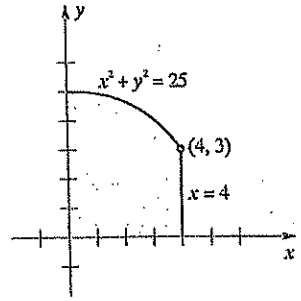
Exercs. 9-12: Ache a área da região delimitada por um laço do gráfico da equação polar.

9 $r^2 = 4\cos 2\theta$ 10 $r = 2\cos 3\theta$

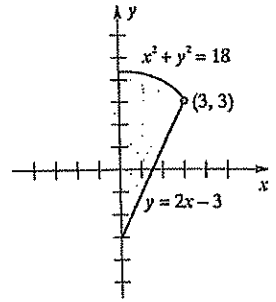
11 $r = 3\cos 5\theta$ 12 $r = \operatorname{sen} 6\theta$

Exercs. 13-16: Estabeleça integrais em coordenadas polares para achar a área da região exibida na figura.

13

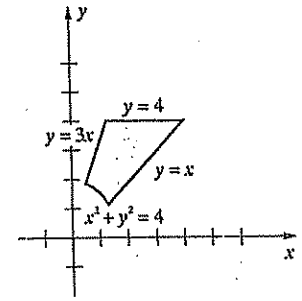


14

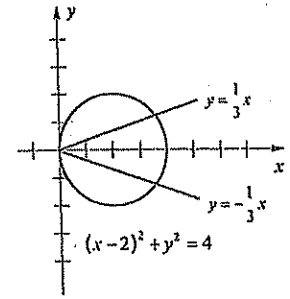


UFPB/BIBLIOTECA/PRAI

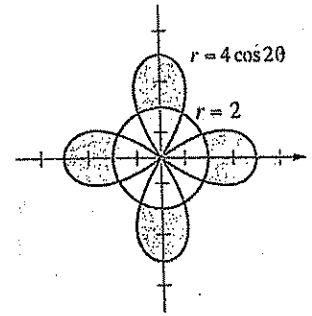
15

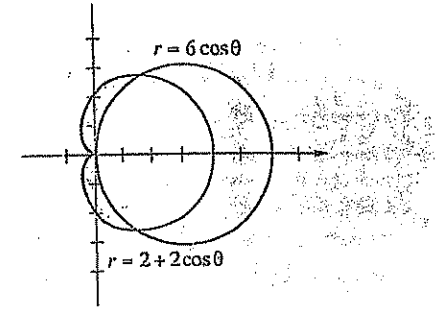


16



Exercs. 17-18: Estabeleça integrais em coordenadas polares para calcular a área (a) da região mais escura e (b) da região mais clara.





Exercs. 19-22: Ache a área da região exterior ao gráfico da primeira equação e interior ao gráfico da segunda equação.

19 $r = 2 + 2\cos\theta$, $r = 3$

20 $r = 2$, $r = 4\cos\theta$

21 $r = 2$, $r^2 = 8\operatorname{sen} 2\theta$

22 $r = 1 - \operatorname{sen}\theta$, $r = 3\operatorname{sen}\theta$

Exercs. 23-26: Ache a área da região interior ao gráfico de *ambas* as equações.

23 $r = \operatorname{sen}\theta$, $r = \sqrt{3}\cos\theta$

24 $r = 2(1 + \operatorname{sen}\theta)$, $r = 1$

25 $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$, $r = 5\operatorname{sen}\theta$

26 $r^2 = 4\cos 2\theta$, $r = 1$

Exercs. 27-32: Ache o comprimento da curva.

27 $r = e^{-\theta}$ de $\theta = 0$ a $\theta = 2\pi$

28 $r = \theta$ de $\theta = 0$ a $\theta = 4\pi$

29 $r = \cos^2 \frac{1}{2}\theta$ de $\theta = 0$ a $\theta = \pi$

30 $r = 2^{\theta}$ de $\theta = 0$ a $\theta = \pi$

31 $r = \operatorname{sen}^3 \frac{1}{3}\theta$

32 $r = 2 - 2\cos\theta$

Exercs. 33-34: Use a regra de Simpson com $n = 4$ para obter uma aproximação do comprimento da curva.

33 $r = \theta + \cos\theta$ de $\theta = 0$ a $\theta = \pi/2$

34 $r = \operatorname{sen}\theta + \cos^2\theta$ de $\theta = 0$ a $\theta = \pi$

Exercs. 35-38: Ache a área da superfície gerada pela revolução do gráfico da equação em torno do eixo polar.

35 $r = 2 + 2\cos\theta$ 36 $r^2 = 4\cos 2\theta$

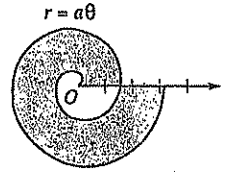
37 $r = 2a \operatorname{sen}\theta$ 38 $r = 2a\cos\theta$

Exercs. 39-40: Use a regra do trapézio com $n = 4$ para obter uma aproximação da área da superfície gerada pela revolução do gráfico da equação polar em torno da reta $\theta = \pi/2$. (Use a simetria ao estabelecer a integral.)

39 $r = \operatorname{sen}^2\theta$ 40 $r = \cos^2\theta$

41 Um *toro* é a superfície gerada pela revolução de um círculo em torno de uma reta do plano que não intercepta o círculo. Use coordenadas polares para achar a área da superfície do toro gerado pela revolução do círculo $x^2 + y^2 = a^2$ em torno da reta $x = b$, com $0 < a < b$.

42 Seja OP o raio do pólo ao ponto $P(r, \theta)$ da espiral $r = a\theta$, $a > 0$. Se o raio faz duas revoluções (partindo de $\theta = 0$), ache a área da região varrida na segunda revolução e que não foi varrida na primeira revolução (ver figura).



43 A parte da espiral $r = e^{-\theta}$ de $\theta = 0$ a $\theta = \pi/2$ revolve em torno da reta $\theta = \pi/2$. Ache a área da superfície resultante.

13.5 EQUAÇÃO POLAR DAS CÔNICAS

O teorema seguinte associa as definições de parábola, elipse e hipérbole em uma descrição unificada das seções cônicas. A constante e no enunciado do teorema é a **excentricidade** da cônica. O ponto F é um foco da cônica, e a reta l é a diretriz. A Figura 13.39 ilustra posições possíveis de F e l.

Teorema (13.15) Sejam F um ponto fixo e l uma reta fixa de um plano. O conjunto de todos os pontos P do plano tais que a razão $d(P, F)/d(P, Q)$ é uma constante positiva e, com $d(P, Q)$ sendo a distância de P a l, é uma seção cônica. A cônica é uma parábola se $e = 1$, uma elipse se $0 < e < 1$ e uma hipérbole se $e > 1$.

DEMONSTRAÇÃO

Se $e = 1$, então $d(P, F)/d(P, Q)$ e, por definição, a cônica resultante é uma parábola com foco F e diretriz l.

Suponhamos em seguida $0 < e < 1$. Convém introduzir um sistema coordenado polar no plano com F como pólo e l perpendicular ao eixo polar no ponto $D(d, 0)$, com $d > 0$, conforme ilustrado na Figura 13.40. Se $P(r, \theta)$ é um ponto do plano tal que

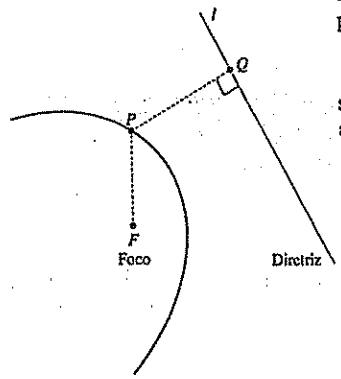


Figura 13.39

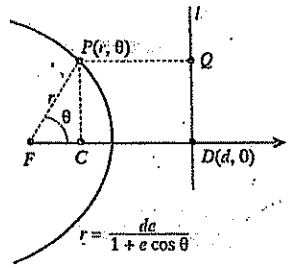


Figura 13.40

$d(P, F)/d(P, Q) = e < 1$, então P está à esquerda de l. Seja C a projeção de P sobre o eixo polar. Como

$$d(P, F) = r \qquad \text{e} \qquad d(P, Q) = d - \cos\theta$$

segue-se que P satisfaz a condição do teorema se e somente se as equações seguintes são verdadeiras:

$$\frac{r}{d - r\cos\theta} = e$$
$$r = de - er\cos\theta$$
$$r(1 + e\cos\theta) = de$$
$$r = \frac{de}{1 + e\cos\theta}$$

Obtém-se as mesmas equações se $e = 1$; entretanto, não há ponto (r, θ) no gráfico se $1 + \cos\theta = 0$.

Uma equação em x e y correspondente a $r = de - er\cos\theta$ é

$$\sqrt{x^2 + y^2} = de - ex$$

Elevando ambos os membros ao quadrado e reagrupando termos, obtemos

$$(1 - e^2)x^2 + 2de^2x + y^2 = d^2e^2$$

Completando o quadrado e simplificando, temos

$$\left(x + \frac{de^2}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{d^2e^2}{(1 - e^2)^2}$$

Finalmente, dividindo ambos os termos por $d^2e^2/(1 - e^2)^2$ chegamos a uma equação da forma

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

com $h = -de^2/(1 - e^2)$. Conseqüentemente, o gráfico é uma elipse com centro no ponto $(h, 0)$ sobre o eixo-x e com

$$a^2 = \frac{d^2e^2}{(1 - e^2)^2}, \quad b^2 = \frac{d^2e^2}{1 - e^2}$$

Como $$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{d^2e^4}{(1 - e^2)^2}$$

obtemos $c = de^2/(1 - e^2)$ e, então, $|h| = c$. Isto prova que F é um foco da elipse. Segue-se também que $e = c/a$. Demonstração análoga vale para o caso $e > 1$.

Mostra-se também que toda cônica não degenerada pode ser descrita por meio do enunciado no Teorema (13.15). Tem-se,

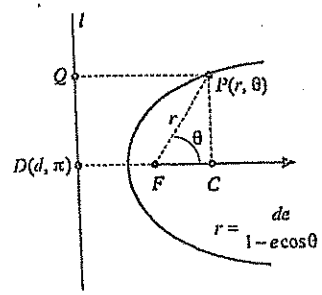


Figura 13.41

assim, uma formulação das seções cônicas equivalente à dada previamente. Como o teorema inclui todos os três tipos de cônica, esta formulação é às vezes encarada como uma definição das seções cônicas.

Se tivéssemos escolhido o foco F à *direita* da diretriz, conforme Figura 13.41 (com $d > 0$), então teríamos chegado à equação $r = de/(1 - e \cos \theta)$. (Note o sinal menos em lugar do sinal mais.) Considerando d negativo, ocorrem outras mudanças de sinal.

Se tivéssemos tomado l *paralela* ao eixo polar e passando por um dos pontos $(d, \pi/2)$ ou $(d, 3\pi/2)$, conforme Figura 13.42, então as equações correspondentes conteriam sen θ em vez de cos θ.

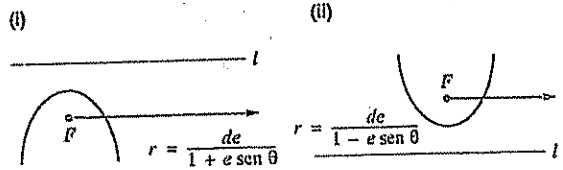


Figura 13.42

O próximo teorema resume o que expusemos.

Teorema (13.16) Uma equação polar que tem uma das quatro formas

$$r = \frac{de}{1 \pm e \cos \theta}, \quad r = \frac{de}{1 \pm e \operatorname{sen} \theta}$$

representa uma seção cônica. A cônica é uma parábola se $e = 1$, uma elipse se $0 < e < 1$ ou uma hipérbole se $e > 1$.

EXEMPLO 1

Descreva a equação polar $r = \dfrac{10}{3 + 2 \cos \theta}$ e trace o seu gráfico.

SOLUÇÃO

Dividimos primeiro o numerador e o denominador da fração por 3:

$$r = \frac{\frac{10}{3}}{1 + \frac{2}{3} \cos \theta}$$

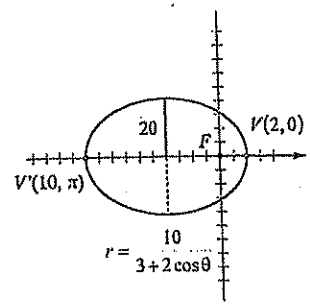


Figura 13.43

Esta equação tem uma das formas do Teorema (13.16) com $e = \frac{2}{3}$. Assim, o gráfico é uma elipse com foco F no pólo e eixo maior ao longo do eixo polar. Determinamos as extremidades do eixo maior fazendo $\theta = 0$ e $\theta = \pi$. Obtemos $V(2, 0)$ e $V'(10, \pi)$. Então $2a = d(V', V) = 12$ ou $a = 6$.

O centro da elipse é o ponto médio $(4, \pi)$ do segmento $V'V$. Como $e = c/a$, temos

$$c = ae = 6(\tfrac{2}{3}) = 4$$

Logo, $$b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 16 = 20$$

Assim, $b = \sqrt{20}$. O gráfico está esboçado na Figura 13.43. Para referência, sobrepusemos um sistema de coordenadas xy ao sistema polar.

EXEMPLO 2

Descreva a equação polar $r = \dfrac{10}{2 + 3 \operatorname{sen} \theta}$ e trace seu gráfico.

SOLUÇÃO

Para dar uma forma adequada à equação, dividimos o numerador e o denominador da fração por 2:

$$r = \frac{5}{1 + \frac{3}{2} \operatorname{sen} \theta}$$

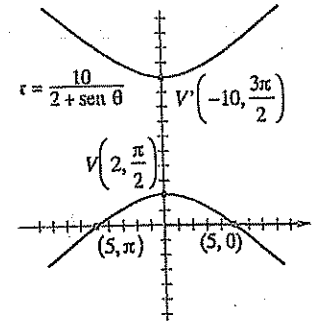


Figura 13.44

Assim, $e = \frac{3}{2}$, e, pelo Teorema (13.16), o gráfico é uma hipérbole com um foco no pólo. A expressão sen θ indica que o eixo transverso da hipérbole é perpendicular ao eixo polar. Para achar os vértices, fazemos $\theta = \pi/2$ e $\theta = 3\pi/2$ na equação dada, o que nos dá os pontos

$$2a = d(V, V') = 8 \quad \text{ou} \quad a = 4$$

Podemos usar os pontos $(5, 0)$ e $(5, \pi)$ do gráfico para traçar o ramo inferior da hipérbole. Obtém-se o ramo superior por simetria, conforme ilustrado na Figura 13.44. Se quisermos maior precisão ou informação adicional, calcularemos

$$c = ae = 4(\tfrac{3}{2}) = 5$$

e $$b^2 = c^2 - a^2 = 36 - 16 = 20$$

Podemos então construir as assíntotas na forma usual.

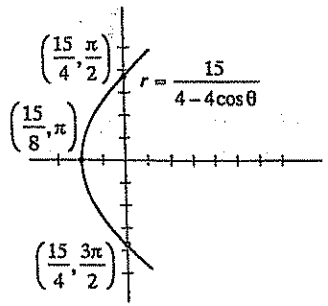


Figura 13.45

EXEMPLO 3

Trace o gráfico da equação polar $r = \dfrac{15}{4 - 4\cos\theta}$

SOLUÇÃO

Para chegarmos à forma adequada, dividimos numerador e denominador por 4:

$$r = \frac{\frac{15}{4}}{1 - \cos\theta}$$

Conseqüentemente, $e = 1$ e, pelo Teorema (13.16), o gráfico é uma parábola com foco no pólo. Podemos obter um esboço da curva marcando os pontos que correspondem aos interceptos-x e y, que estão indicados no quadro a seguir:

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
r	indefinido	$\frac{15}{4}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{15}{4}$

Note que o gráfico não tem ponto correspondente a $\theta = 0$, pois o denominador $1 - \cos\theta$ é 0 para aquele valor. Marcando os três pontos e notando que o gráfico é uma parábola com foco no pólo, obtemos a Figura 13.45.

Se quisermos apenas um esboço aproximado de uma cônica, recomendamos a técnica utilizada no Exemplo 3. Para utilizar este método, marcamos (se possível) pontos correspondentes a $\theta = 0$, $\pi/2$, π e $3\pi/2$. Esses pontos, juntamente com o tipo de cônica (obtido a partir do valor de e), conduzem facilmente ao traçado.

EXEMPLO 4

Ache uma equação em x e y que tenha o mesmo gráfico que a equação polar.

$$r = \frac{15}{4 - 4\,\text{sen}\,\theta}$$

SOLUÇÃO

Multiplicamos ambos os membros da equação polar por $4 - 4\,\text{sen}\,\theta$ e aplicamos então relações entre as coordenadas retangulares e polares, a saber:

$$r(4 - 4\,\text{sen}\,\theta) = 15$$
$$4r = 15 + 4r\,\text{sen}\,\theta$$
$$4(\pm\sqrt{x^2 + y^2}) = 15 + 4y$$

Elevando ambos os membros ao quadrado e simplificando, obtemos

$$16(x^2 + y^2) = 225 + 120y + 16y^2$$
$$16x^2 = 120y + 225$$

EXEMPLO 5

Ache a equação polar da cônica com foco no pólo, excentricidade $e = \frac{1}{2}$, e diretriz $r = -3\sec\theta$.

SOLUÇÃO

Podemos escrever a equação $r = -3\sec\theta$ da diretriz como $r\cos\theta = -3$, que equivale a $x = -3$ em um sistema de coordenadas retangulares. Isto nos dá a situação ilustrada na Figura 13.41, com $d = 3$. Logo, a equação polar tem a forma

$$r = \frac{de}{1 - e\cos\theta}$$

Substituímos então $d = 3$ e $= \frac{1}{2}$:

$$r = \frac{3(\frac{1}{2})}{1 - \frac{1}{2}\cos\theta}$$

$$r = \frac{3}{2 - \cos\theta}$$

EXERCÍCIOS 13.5

Exercs. 1-10: (a) Ache a excentricidade e classifique a cônica. (b) Trace o gráfico e marque os vértices.

1 $r = \dfrac{12}{6 + 2\,\text{sen}\,\theta}$

2 $r = \dfrac{12}{6 - 2\,\text{sen}\,\theta}$

3 $r = \dfrac{12}{2 - 6\cos\theta}$

4 $r = \dfrac{12}{2 + 6\cos\theta}$

5 $r = \dfrac{3}{2 + 2\cos\theta}$

6 $r = \dfrac{3}{2 - 2\,\text{sen}\,\theta}$

7 $r = \dfrac{4}{\cos\theta - 2}$

8 $r = \dfrac{4\sec\theta}{2\sec\theta - 1}$

9 $r = \dfrac{6\csc\theta}{2\csc\theta + 3}$

10 $r = \csc\theta(\csc\theta - \cot\theta)$

Exercs. 11-20: Obtenha equações em x e y para as equações polares dos Exercícios 1-10.

Exercs. 21-26: Ache a equação polar da cônica com foco no polo, excentricidade e equação da diretriz dadas.

21 $e = \frac{1}{3}$; $r = 2\sec\theta$

22 $e = \frac{3}{5}$; $r = 4 \csc \theta$

23 $e = 4$; $r = -3 \csc \theta$

24 $e = 3$; $r = -4 \sec \theta$

25 $e = 1$; $r \cos \theta = 5$

26 $e = 1$; $\operatorname{sen} \theta = -2$

27 Ache a equação polar da parábola com foco no pólo e vértice $V(4, \pi/2)$.

28 Uma elipse tem foco no pólo, centro $C(3, \pi/2)$ e vértice $V(1, 3\pi/2)$.

(a) Ache a excentricidade

(b) Escreva a equação polar da elipse.

Exercs. 29-32: Ache o coeficiente angular da tangente à cônica no ponto correspondente ao valor indicado de θ.

29 $r = \dfrac{12}{6 + 2\ sen\ \theta}$; $\theta = \dfrac{\pi}{6}$

30 $r = \dfrac{12}{6 - 2\ sen\ \theta}$; $\theta = 0$

31 $r = \dfrac{12}{2 - 6\ \cos\ \theta}$; $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

32 $r = \dfrac{12}{2 + 6\ \cos\ \theta}$; $\theta = 6\dfrac{\pi}{3}$

Exercs. 33-36: Estabeleça uma integral em coordenadas polares para achar a área da região delimitada pelos gráficos das equações.

33 $r = 2 \sec \theta$; $\theta = \pi/6$, $\theta = \pi/3$

34 $r = \csc \theta \cot \theta$; $\theta = \pi/6$, $\theta = \pi/4$

35 $r(1 - \cos \theta) = 4$; $\theta = \pi/4$

36 $r(1 + \operatorname{sen} \theta) = 2$; $\theta = \pi/3$

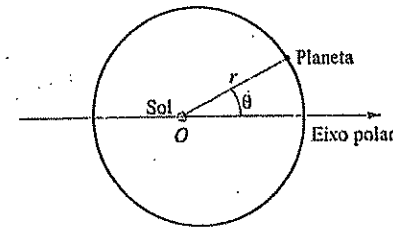
37 A primeira lei de Kepler afirma que os planetas percorrem órbitas elípticas com o Sol como um dos focos. Para achar a equação de uma órbita, coloque o pólo O no centro do Sol e o eixo polar ao longo do eixo maior da elipse (ver figura).

(a) Mostre que a equação da órbita é

$$r = \frac{(1 - e^2)a}{1 - e \cos \theta}$$

onde e é a excentricidade e $2a$ é o comprimento do eixo maior.

(b) Definem-se como *periélio* e *afélio*, respectivamente, a menor e a maior distância de um planeta ao Sol. Mostre que $r_{per} = a(1 - e)$ e $r_{af} = a(1 + e)$.



38 Ref. Exercício 37. O planeta Plutão percorre uma órbita elíptica de excentricidade 0,249. Se o periélio é 29,62 UA, ache a equação polar da órbita e estime a distância no afélio.

39 (a) Use o Teorema (9.6) para mostrar que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1 - e \cos \theta}\, d\theta = 2\frac{\pi}{\sqrt{1 - e^2}}$$

(b) Use a Definição (5.29) para achar a distância média de um planeta ao Sol.

40 Ref. Exercícios 37 e 39. Eros, com uma distância média de 1,46 UA do Sol, é um asteróide do sistema solar. Se Eros tem órbita elíptica com excentricidade 0,223, ache uma equação polar aproximada da órbita, e estime a menor distância de Eros ao Sol.

13.6 EXERCÍCIOS DE REVISÃO

Exercs. 1-4: (a) Ache a equação em x e y cujo gráfico contenha os pontos da curva C. (b) Trace o gráfico de C e indique a orientação.

1 $x = \dfrac{1}{t} + 1$, $y = \dfrac{2}{t} - t$; $0 < t \leq 4$

2 $x = \cos^2 t - 2$, $y = \operatorname{sen} t + 1$; $0 \leq t \leq 2\pi$

3 $x = \sqrt{t}$, $y = 2^{-t}$; $t \geq 0$

4 $x = 3 \cos t + 2$, $y = -3 \operatorname{sen} t - 1$; $0 \leq t \leq 2\pi$

Exercs. 5-6: Trace os gráficos de C_1, C_2, C_3 e C_4 e indique suas orientações.

5 C_1: $x = t$, $y = \sqrt{16 - t^2}$; $-4 \leq t \leq 4$

C_2: $x = -\sqrt{16 - t}$, $y = -\sqrt{t}$; $0 \leq t \leq 16$

C_3: $x = 4 \cos t$, $y = 4 \operatorname{sen} t$; $0 \leq t \leq 2\pi$

C_4: $x = e^t$, $y = -\sqrt{16 - e^{2t}}$; $t \leq \ln 4$

6 C_1: $x = t^2$, $y = t^3$; t em $\mathbb{R}$

C_2: $x = t^4$, $y = t^6$; t em $\mathbb{R}$

C_3: $x = e^{2t}$ $y = e^{3t}$; t em $\mathbb{R}$

C_4: $x = 1 - \operatorname{sen}^2 t$, $y = \cos^3 t$; t em $\mathbb{R}$

Exercs. 7-8: Seja C a curva parametrizada dada. (a) Expresse dy/dx em termos de t. (b) Ache os valores de t que correspondam às tangentes horizontais ou verticais ao gráfico de C. (c) Expresse d^2y/dx^2 em termos de t.

7 $x = t^2$, $y = 2t^3 + 4t - 1$; t em $\mathbb{R}$

8 $x = t - 2 \operatorname{sen} t$, $y = 1 - 2 \cos t$; t em $\mathbb{R}$

Exercs. 9-26: Trace o gráfico da equação polar.

9 $r = -4 \operatorname{sen} \theta$

10 $r = 10 \cos \theta$

11 $r = 6 - 3 \cos \theta$

12 $r = 3 + 2 \cos \theta$

13 $r^2 = 9 \operatorname{sen} 2\theta$

14 $r^2 = -4 \operatorname{sen} 2\theta$

15 $r = 3 \operatorname{sen} 5\theta$

16 $r = 2 \operatorname{sen} 3\theta$

17 $2r = \theta$

18 $r = e^{-\theta}$, $\theta \geq 0$

19 $r = 8 \sec \theta$

20 $r(3 \cos \theta - 2 \operatorname{sen} \theta) = 6$

21 $r = 4 - 4 \cos \theta$

22 $r = 4 \cos^2 \frac{1}{2}\theta$

23 $r = 6 - r \cos \theta$

24 $r = 6 \cos 2\theta$

25 $r = \dfrac{8}{3 + \cos \theta}$

26 $r = \dfrac{8}{1 - 3\ \operatorname{sen}\ \theta}$

Exercs. 27-32: Ache a equação polar que tenha o mesmo gráfico da equação dada.

27 $y^2 = 4x$

28 $x^2 + y^2 - 3x + 4y = 0$

29 $2x - 3y = 8$

30 $x^2 + y^2 = 2xy$

31 $y^2 = x^2 - 2x$

32 $x^2 = y^2 + 3y$

Exercs. 33-38: Ache a equação em x e y que tenha o mesmo gráfico da equação polar.

33 $r^2 = \operatorname{tg} \theta$

34 $r = 2 \cos \theta + 3 \operatorname{sen} \theta$

35 $r^2 = 4 \operatorname{sen} 2\theta$

36 $r^2 = \sec 2\theta$

37 $\theta = \sqrt{3}$

38 $r = -6$

Exercs. 39-40: Ache o coeficiente angular da tangente ao gráfico da equação polar no ponto correspondente ao valor indicado de θ.

39 $r = \dfrac{3}{2 + 2\ \cos\ \theta}$; $\theta = \pi/2$

40 $r = e^{3\theta}$; $\theta = \pi/4$

41 Ache a área da região delimitada por um laço de $r^2 = 4 \operatorname{sen} 2\theta$.

42 Ache a área da região interior ao gráfico de $r = 3 + 2 \operatorname{sen} \theta$ e exterior ao gráfico de $r = 4$.

43 A posição (x, y) de um ponto móvel, no instante t, é dada por $x = 2 \operatorname{sen} t$, $y = \operatorname{sen}^2 t$. Ache a distância percorrida pelo ponto de $t = 0$ a $t = \pi/2$.

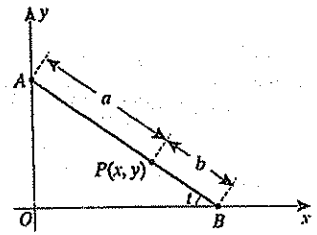
44 Ache o comprimento da espiral $r = 1/\theta$ de $\theta = 1$ a $\theta = 2$.

45 A curva com parametrização $x = 2t^2 + 1$, $y = 4t - 3$; $0 \leq t \leq 1$, revolve em torno do eixo-y. Ache a área da superfície resultante.

46 O arco da espiral $r = e^{\theta}$ de $\theta = 0$ a $\theta = 1$ gira em torno da reta $\theta = \pi/2$. Ache a área da superfície resultante.

47 Ache a área da superfície gerada pela revolução da lemniscata $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ em torno do eixo polar.

48 Um segmento retilíneo de comprimento fixo tem suas extremidades A e B sobre os eixos y e x, respectivamente. Um ponto fixo P sobre AB é tal que $d(A, P) = a$ e $d(B, P) = b$ (ver figura). Se A e B deslizam livremente sobre seus respectivos eixos, o ponto P descreve uma curva C. Se t é a medida em radianos do ângulo ABO, estabeleça equações paramétricas para C com t como parâmetro; descreva C.

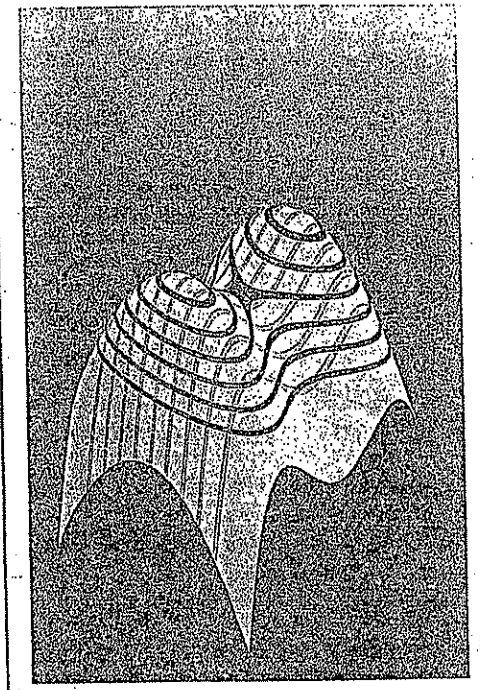


MAKRON Books

Capítulo 14

VETORES E SUPERFÍCIES

INTRODUÇÃO



Um vetor tem duas naturezas diferentes, uma, geométrica e outra, algébrica. De modo geral, a geometria ajuda a entender intuitivamente o conceito de vetor; mas quando se trata de provas rigorosas, tornam-se necessárias técnicas algébricas.

Há diferentes maneiras de introduzir vetores, de modo que eles possam ser aplicados em duas ou três dimensões. Em um enfoque, definimos os vetores em três dimensões e os *particularizamos* para o caso de vetores em um plano coordenado. Outro processo consiste em definir os vetores em um plano coordenado, *generalizando-os* então para três dimensões. Adotaremos o primeiro método, começando com o plano-xy familiar da Seção 14.1, passando então a um sistema de coordenadas xyz na Seção 14.2. Uma vantagem deste enfoque é que podemos grafar (e visualizar) os pontos iniciais e terminais de vetores mais facilmente no plano do que em três dimensões. Além disso, as demonstrações de propriedades da adição de vetores e multiplicação por escalar são mais breves, porque há menos uma componente do vetor a considerar. Como as demonstrações correspondentes em três dimensões seguem exatamente o mesmo padrão, torna-se desnecessário repeti-las na Seção 14.2.

Nas Seções 14.5 e 14.6 estudamos tópicos de geometria analítica sólida que incluem retas, planos e superfícies. Nosso principal instrumento para esboçar o gráfico de uma superfície é o seu traço no plano. Um bom conhecimento da determinação de traços em muito auxiliará na análise de gráficos de superfícies gerados por computador, estudados no Capítulo 16.

14.1 VETORES EM DUAS DIMENSÕES

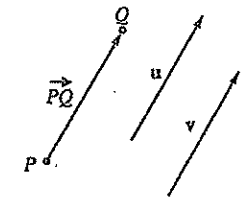


Figura 14.1

Quantidades como área, volume, comprimento de arco, temperatura e tempo têm apenas a magnitude, ou grandeza, para caracterizá-las, e podem ficar definidas completamente por um único número real (com uma unidade adequada de medida tal como cm^2, m^3, cm, g ou s). Uma quantidade deste tipo é uma **grandeza escalar**, e o número correspondente é um escalar. Já um conceito como velocidade e força exigem, para caracterizá-lo, não só a magnitude, ou *módulo*, como também uma direção (sentido) e é representada em geral por um **segmento orientado** – isto é, um segmento dotado de uma direção (ou sentido) de percurso. Outro nome para um segmento de reta orientado: **vetor**.

Conforme Figura 14.1, escrevemos $\overrightarrow{PQ}$ para denotar o vetor com **ponto inicial** P e **ponto terminal** Q, e indicamos a orientação do vetor colocando uma seta em Q. O **módulo**, ou **magnitude** de $\overrightarrow{PQ}$, é o comprimento do segmento PQ, e se denota por $\|\overrightarrow{PQ}\|$. De acordo com a figura, utilizamos minúsculas em negrito tais como **u** e **v** para denotar vetores cujos pontos terminais não são especificados. Em manuscrito, costuma-se escrever $\vec{u}$ ou $\vec{v}$.

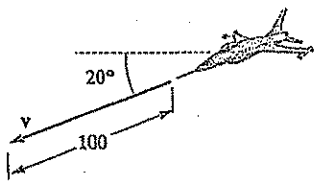


Figura 14.2

Dizem-se **equivalentes** vetores que têm o mesmo módulo e a mesma direção (sentido). No cálculo, caracteriza-se um vetor apenas por seu módulo e direção (sentido), e não por sua localização. Consideramos, pois, equivalentes vetores como os da Figura 14.1, e escrevemos

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ} \quad , \quad \mathbf{v} = \overrightarrow{PQ} \quad , \text{ e } \mathbf{u} = \mathbf{v}$$

Assim, *um vetor pode ser transladado de uma posição para outra, desde que não se alterem módulo nem sentido.*

Podemos representar muitos conceitos físicos por vetores. A título de ilustração, suponha que um avião esteja descendo à velocidade constante de 160 km/h e que a linha de vôo faça um ângulo de 20° com a horizontal. Ambos esses fatos são representados pelo vetor **v** de módulo 100 na Figura 14.2. O vetor **v** é um **vetor velocidade**.

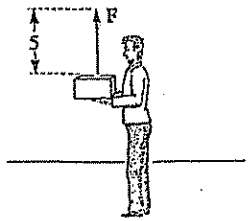


Figura 14.3

Um vetor que represente uma atração ou repulsão de algum tipo é um **vetor força**. A força exercida quando uma pessoa segura um peso de 5 quilos é ilustrada pelo vetor **F** de módulo 5 na Figura 14.3. Esta força tem o mesmo módulo que a força exercida pela gravidade sobre o peso, mas atua em sentido contrário. Como resultado, não há movimento nem para cima nem para baixo.

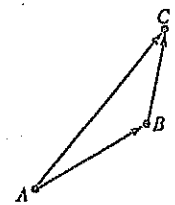


Figura 14.4 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

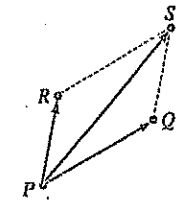


Figura 14.5 $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR}$

Às vezes, utilizamos $\overrightarrow{AB}$ para representar a trajetória de um ponto (ou partícula) que se move ao longo do segmento retilíneo de A a B. Referimo-nos então a $\overrightarrow{AB}$ como um deslocamento do ponto (ou partícula). Conforme Figura 14.4, um deslocamento $\overrightarrow{AB}$ seguido de um deslocamento $\overrightarrow{BC}$ leva ao mesmo ponto que o deslocamento único $\overrightarrow{AC}$. Por definição, o vetor $\overrightarrow{AC}$ é a **soma** de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$; escrevemos

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

Como os vetores podem ser transladados de um lugar para outro, dois vetores *quaisquer* podem sempre ser somados, fazendo-se o ponto inicial do segundo vetor coincidir com o ponto terminal do primeiro, e traçando-se o segmento do ponto inicial do primeiro ao ponto terminal do segundo vetor (ver Figura 14.4).

Outra maneira de achar a soma consiste em escolher vetores $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$ iguais a $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$, respectivamente, e que tenham o mesmo ponto inicial P, conforme exibido na Figura 14.5. Construindo-se um paralelogramo $RPQS$, então, como $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS}$, segue-se que $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR}$. Se $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$ são duas forças que atuam sobre P, então $\overrightarrow{PS}$ é a **força resultante** – isto é, a força única que produz o mesmo efeito que as duas forças combinadas.

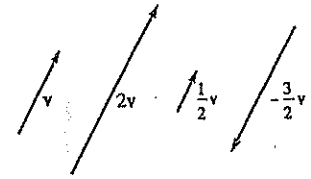


Figura 14.6

Se c é um escalar e **v** um vetor, então $c\mathbf{v}$ se define como um vetor cujo módulo é $|c|$ vezes o módulo $\|\mathbf{v}\|$ de **v** e cujo sentido é o mesmo de **v**, se $c > 0$, ou sentido contrário, se $c < 0$. A Figura 14.6 ilustra os fatos. Referimo-nos a $c\mathbf{v}$ como um **múltiplo escalar** de **v**.

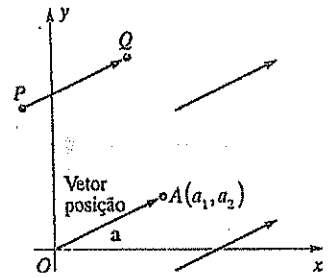


Figura 14.7

Em todo o restante desta Seção, restringiremos nosso estudo ao caso especial em que todos os vetores jazem em um plano-xy. Se $\overrightarrow{PQ}$ é um desses vetores, então, conforme indicado na Figura 14.7, há muitos vetores equivalentes a $\overrightarrow{PQ}$; todavia, há precisamente *um* vetor equivalente a $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ com ponto inicial na origem. Este vetor $\overrightarrow{OA}$ é chamado **vetor posição** de $\overrightarrow{PQ}$. Assim, *cada vetor determina um único par ordenado de números reais*, as coordenadas (a_1, a_2) do ponto terminal do seu vetor posição. Reciprocamente, todo par ordenado (a_1, a_2) define o vetor $\overrightarrow{OA}$, onde A tem coordenadas (a_1, a_2). *Há, assim, uma correspondência biunívoca entre os vetores em um plano xy e pares ordenados de números reais.* Esta correspondência permite-nos interpretar um vetor seja como um segmento orientado, seja como um par ordenado. Para evitar confusão com a notação de intervalos abertos, utilizaremos o símbolo $\langle a_1, a_2 \rangle$ para um par ordenado que represente um vetor, que denotamos por uma letra minúscula em negrito. Assim, $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$. Os números a_1 e a_2 são os **componentes** do vetor $\langle a_1, a_2 \rangle$. Dois

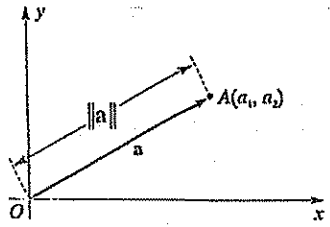


Figura 14.8

vetores $\langle a_1, a_2\rangle$ e $\langle b_1, b_2\rangle$ são iguais se e somente se $a_1 = b_1$ e $a_2 = b_2$. Se A é o ponto (a_1, a_2), como na Figura 14.7, designamos $\overrightarrow{OA}$ como o **vetor posição** de $\langle a_1, a_2\rangle$, ou do *ponto* A.

Do que precede, vê-se que os vetores têm duas naturezas diferentes – uma geométrica e outra algébrica. Nem sempre fazemos distinção entre as duas. Deve ficar claro, pelo contexto, se estamos nos referindo a pares ordenados ou a segmentos orientados. Empregaremos o símbolo V_2 para o conjunto de todos os vetores $\langle x, y\rangle$, onde x e y são reais.

O **módulo** $\|\mathbf{a}\|$ do vetor $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle$ é, por definição, o comprimento do seu vetor posição $\overrightarrow{OA}$, conforme Figura 14.8. Isto pode ser enunciado de outra maneira, como na próxima definição.

Definição (14.1)

> O **módulo** $\|\mathbf{a}\|$ do vetor $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle$ é
>
> $$\|\mathbf{a}\| = \|\langle a_1, a_2\rangle\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

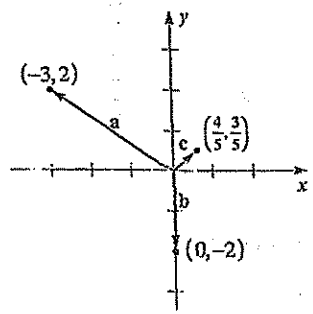


Figura 14.9

EXEMPLO 1

Esboce os vetores posição de

$$\mathbf{a} = \langle -3, 2\rangle, \quad \mathbf{b} = \langle 0, -2\rangle, \quad \mathbf{c} = \langle \tfrac{4}{5}, \tfrac{3}{5}\rangle$$

e ache o módulo de cada vetor.

SOLUÇÃO

A Figura 14.9 ilustra os vetores posição. Pela Definição (14.1).

$$\|\mathbf{a}\| = \|\langle -3, 2\rangle\| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

$$\|\mathbf{b}\| = \|\langle 0, -2\rangle\| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\|\mathbf{c}\| = \|\langle \tfrac{4}{5}, \tfrac{3}{5}\rangle\| = \sqrt{(\tfrac{4}{5})^2 + (\tfrac{3}{5})^2} = \sqrt{\tfrac{25}{25}} = 1$$

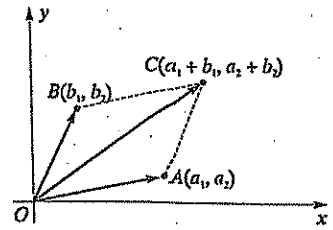


Figura 14.10

Sejam $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle$ e $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2\rangle$ vetores em V_2, e $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ seus vetores posição, conforme ilustrado na Figura 14.10. Se $\overrightarrow{OC}$ é o vetor posição de $\mathbf{c} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2\rangle$, então é possível mostrar, por meio de coeficientes angulares, que O, A, C e B são vértices de um paralelogramo, isto é,

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$$

Isto motiva a seguinte definição de adição em V_2.

Adição de vetores (14.2)

> $$\langle a_1, a_2\rangle + \langle b_1, b_2\rangle = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2\rangle$$

Note que, para somar dois vetores de V_2 somamos os componentes correspondentes.

Pode-se também mostrar que, se c é um escalar, então o par ordenado definido por $c\overrightarrow{OA}$ é (ca_1, ca_2), conforme ilustrado na Figura 14.11, para $c > 0$. Isto sugere a seguinte definição de múltiplos escalares em V_2.

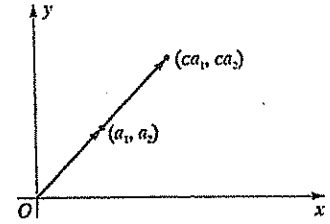


Figura 14.11

Múltiplo escalar de um vetor (14.3)

> $$c\langle a_1, a_2\rangle = \langle ca_1, ca_2\rangle$$

Assim, para achar um múltiplo escalar de um vetor em V_2, multiplicamos cada componente pelo escalar.

EXEMPLO 2

Sejam $\mathbf{a} = \langle -1, 3\rangle$ e $\mathbf{b} = \langle 4, 2\rangle$.

(a) Ache $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $-\frac{3}{2}\mathbf{b}$ e $2\mathbf{b} + 3\mathbf{b}$.

(b) Trace os vetores posição de $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ e $-\frac{3}{2}\mathbf{b}$.

SOLUÇÃO

(a) Aplicando as Definições (14.2) e (14.3), temos:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} \langle -1, 3\rangle + \langle 4, 2\rangle = \langle -1 + 4, 3 + 2\rangle = \langle 3, 5\rangle$$

$$-\tfrac{3}{2}\mathbf{b} = -\tfrac{3}{2}\langle 4, 2\rangle = \langle -\tfrac{3}{2}(4), -\tfrac{3}{2}(2)\rangle = \langle -6, -3\rangle$$

$$2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} = 2\langle -1, 3\rangle + 3\langle 4, 2\rangle = \langle -2, 6\rangle + \langle 12, 6\rangle = \langle 10, 12\rangle$$

(b) Os vetores posição de $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ e $-\frac{3}{2}\mathbf{b}$ acham-se esboçados na Figura 14.12.

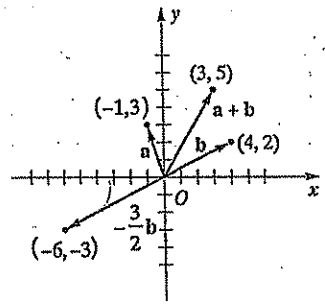


Figura 14.12

Definem-se como a seguir o vetor zero $\mathbf{0}$ e o negativo $-\mathbf{a}$ de um vetor $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$.

Definição (14.4)

$$\mathbf{0} = \langle 0, 0 \rangle \qquad -\mathbf{a} = -\langle a_1, a_2 \rangle = \langle -a_1, -a_2 \rangle$$

No próximo teorema damos algumas propriedades importantes da adição de vetores e da multiplicação de um vetor por um escalar, para vetores arbitrários $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ em V_2 e escalares c e d. Não deve ser difícil memorizar estas propriedades, que se assemelham a leis familiares dos números reais.

Teorema (14.5)

(i) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$	(v) $c(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = c\mathbf{a} + c\mathbf{b}$
(ii) $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$	(vi) $(c + d)\mathbf{a} = c\mathbf{a} + d\mathbf{a}$
(iii) $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$	(vii) $(cd)\mathbf{a} = c(d\mathbf{a}) = d(c\mathbf{a})$
(iv) $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$	(viii) $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$
	(ix) $0\mathbf{a} = \mathbf{0} = c\mathbf{0}$

DEMONSTRAÇÃO

Sejam $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ e $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$. Para provar (i), note que

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle = \langle b_1 + a_1, b_2 + a_2 \rangle = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

Segue-se a prova de (v):

$$\begin{aligned} c(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= c\langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle \\ &= \langle ca_1 + cb_1, ca_2 + cb_2 \rangle \\ &= \langle ca_1, ca_2 \rangle + \langle cb_1, cb_2 \rangle \\ &= c\mathbf{a} + c\mathbf{b} \end{aligned}$$

As demonstrações das propriedades restantes são análogas e ficam como exercício.

A operação de subtração de vetores em V_2, denotada por $-$, é definida como a seguir.

Definição (14.6) Sejam $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ e $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$. A diferença $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ é

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$$

Pelas definições (14.6), (14.4) e (14.2), vemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{a} - \mathbf{b} &= \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \langle a_1, a_2 \rangle + \langle -b_1, -b_2 \rangle \\ &= \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle \end{aligned}$$

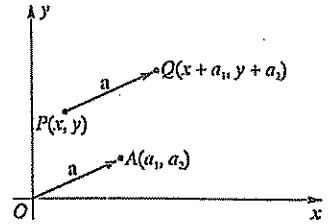


Figura 14.13

Assim, para achar $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, basta subtrair as componentes de $\mathbf{b}$ das componentes correspondentes de $\mathbf{a}$.

EXEMPLO 3

Se $\mathbf{a} = \langle 5, -4 \rangle$ e $\mathbf{b} = \langle -3, 2 \rangle$, ache $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ e $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$.

SOLUÇÃO

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle 5, -4 \rangle - \langle -3, 2 \rangle = \langle 5 - (-3), -4 - 2 \rangle = \langle 8, -6 \rangle$$

$$2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} = 2\langle 5, -4 \rangle - 3\langle -3, 2 \rangle = \langle 10, -8 \rangle - \langle -9, 6 \rangle = \langle 19, -14 \rangle$$

Costuma-se também representar um vetor não zero $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ de V_2 por um segmento orientado $\overrightarrow{PQ}$ com ponto inicial $P(x, y)$ *arbitrário* e ponto terminal $Q(x + a_1, y + a_2)$, conforme Figura 14.13.

Note que tanto $\overrightarrow{PQ}$ como a têm o mesmo vetor posição $\overrightarrow{OA}$, e que $\|\overrightarrow{PQ}\| = \|\mathbf{a}\|$. Dizemos que $\overrightarrow{PQ}$ *corresponde a* a, ou que a corresponde a $\overrightarrow{PQ}$. Estritamente falando, $\overrightarrow{PQ}$ *representa* a; entretanto, costumamos referir-nos a $\overrightarrow{PQ}$ como o *vetor* a. O vetor zero é representado por qualquer ponto do plano.

Utilizamos com freqüência o teorema seguinte.

Teorema (14.7) Se $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ são pontos arbitrários, o vetor a em V_2 que corresponde a $\overrightarrow{P_1P_2}$ é

$$\mathbf{a} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle.$$

DEMONSTRAÇÃO

A Figura 14.14 ilustra o vetor P_1P_2 e o vetor posição de $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$. Como $\overrightarrow{P_1P_2}$ corresponde a a, vemos que

$$x_2 = x_1 + a_1 \qquad \text{e} \qquad y_2 = y_1 + a_2$$

Resolvendo em relação a a_1 e a_2 obtemos $\mathbf{a} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$.

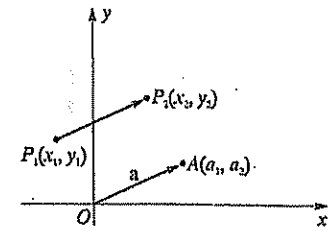


Figura 14.14

EXEMPLO 4

Dados os pontos $P(-2, 3)$ e $Q(4, 5)$,

(a) esboce $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{QP}$.

(b) ache vetores a e b em V_2 que correspondam a $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{QP}$.

(c) esboce os vetores posição a e b.

SOLUÇÃO

(a) A Figura 14.15 ilustra os vetores $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{QP}$.

(b) Pelo Teorema (14.7),

$$\mathbf{a} = \langle 4-(-2), 5-3\rangle = \langle 6, 2\rangle$$

$$\mathbf{b} = \langle -2-4, 3-5\rangle = \langle -6, -2\rangle = -\langle 6, 2\rangle$$

(c) Os vetores posição $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ de a e b são exibidos na Figura 14.15.

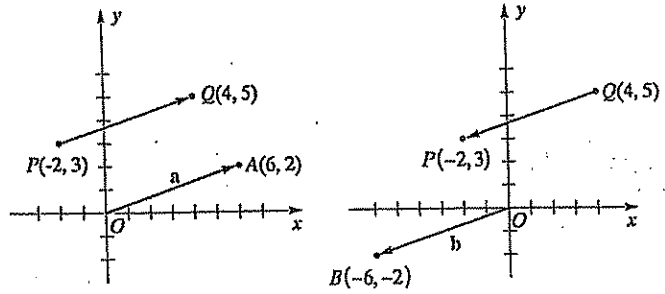


Figura 14.15

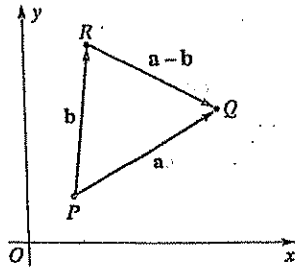


Figura 14.16

Se a e b são vetores arbitrários, então

$$\mathbf{b} + (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a}$$

isto é, a – b *é o vetor que, somado a* b, dá a. Representando a e b por vetores $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$ que tenham *o mesmo ponto inicial*, como na Figura 14.16, então $\overrightarrow{RQ}$ representa a – b.

No começo desta seção utilizamos o símbolo $c\overrightarrow{AB}$ para denotar um vetor cuja direção (sentido) é a mesma de $\overrightarrow{AB}$ se $c > 0$, ou a contrária à de $\overrightarrow{AB}$ se $c < 0$. A próxima definição representa conceito análogo para vetores em V_2.

Definição (14.8)

Dois vetores não-nulos a e b em V_2 têm

(i) **mesma direção (sentido)** se $\mathbf{b} = c\mathbf{a}$ para algum escalar $c > 0$.

(ii) **direção (sentido) oposta** se $\mathbf{b} = c\mathbf{a}$ para algum escalar $c < 0$.

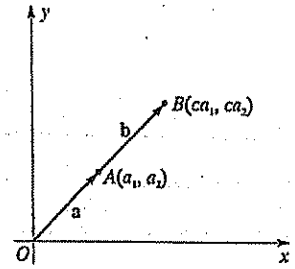


Figura 14.17

Sejam $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle$ e $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2\rangle$. Se $\mathbf{b} = c\mathbf{a}$, então $b_1 = ca_1$ e $b = ca_2$, e os vetores posição $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ para a e b jazem sobre a mesma reta pela origem, conforme ilustrado na Figura 14.17. Além disso, se $c > 0$, então A e B estão no mesmo quadrante (ou sobre o mesmo eixo coordenado positivo ou negativo). Se $c < 0$ e A não está sobre um eixo coordenado, então A e B estão em quadrantes diagonalmente opostos.

Admitiremos que o vetor zero **0** tem *todas* as direções. Não queira o leitor pensar nesta propriedade peculiar como em algo que possa ser provado. É apenas uma definição de conveniência, que auxiliará no enunciado de certos resultados sobre um vetor a, sem necessidade de acrescentar a condição $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Lembremos que **0** é também algo especial sob outro ponto de vista: é o único vetor que tem módulo zero!

Por definição, dois vetores a e b em V_2 são **paralelos** se e somente se $\mathbf{b} = c\mathbf{a}$ para algum escalar c. Assim, dois vetores não-nulos a e b são paralelos se têm a mesma direção ou direções opostas. Note que o vetor zero é paralelo a todo vetor a, pois podemos escrever $\mathbf{0} = 0\mathbf{a}$.

O próximo teorema especifica a relação entre os módulos de a e ca.

Teorema (14.9) Se a é um vetor e c um escalar, então $\|c\mathbf{a}\| = |c|\,\|\mathbf{a}\|$.

DEMONSTRAÇÃO

Se $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle$, então $c\mathbf{a} = \langle ca_1, ca_2\rangle$. Utilizando a Definição (14.1) e propriedades dos números reais, temos

$$\|c\,\mathbf{a}\| = \sqrt{(ca_1)^2 + (ca_2)^2} = \sqrt{c^2(a_1^2 + a_2^2)}$$

$$= \sqrt{c^2}\sqrt{a_1^2 + a_2^2} = |c|\,\|\mathbf{a}\|.$$

O Teorema (14.9) implica que o comprimento de um segmento orientado que representa ca é $|c|$ vezes o comprimento do segmento orientado que representa a. Isto concorda com a interpretação geométrica estudada no começo desta seção e ilustrada na Figura 14.6.

Os vetores i e j definidos a seguir serão úteis no que vem a seguir.

Definição (14.10) $\mathbf{i} = \langle 1, 0\rangle, \quad \mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle$

Tanto i como j têm módulo 1, pois, pela Definição (14.1),

$$\|\mathbf{i}\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1 \quad \text{e} \quad \|\mathbf{j}\| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$$

Com auxílio de i e j podemos obter outra maneira de denotar vetores em V_2, conforme indicado no resultado a seguir.

A forma *i*, *j* para vetores (14.11)

> Se $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$, então $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$.

DEMONSTRAÇÃO

Utilizando as Definições (14.1) e (14.2), temos

$$\langle a_1, a_2 \rangle = \langle a_1, 0 \rangle + \langle 0, a_2 \rangle = a_1\langle 1, 0 \rangle + a_2\langle 0, 1 \rangle = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$$

A fórmula $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ para o vetor $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ admite uma interpretação geométrica interessante. Na Figura 14.18(i) estão esboçados os vetores posição para i, j e a. Como i e j têm ambos magnitude (módulo) 1, vê-se do Teorema (14.9) que

$$\|a_1\mathbf{i}\| = |a_1|\,\|\mathbf{i}\| = |a_1| \quad \text{e} \quad \|a_2\mathbf{j}\| = |a_2|\,\|\mathbf{j}\| = |a_2|$$

Logo, tal como na Figura 14.18(ii), $a_1\mathbf{i}$ e $a_2\mathbf{j}$ podem ser representados por vetores horizontais e verticais de módulos $|a_1|$ e $|a_2|$,

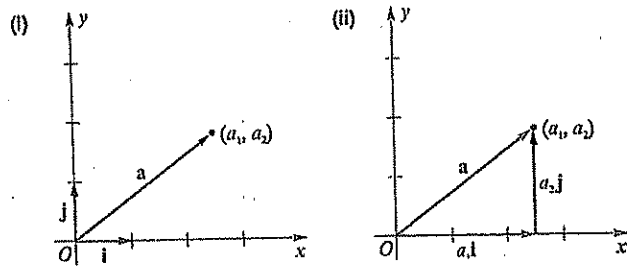


Figura 14.18

respectivamente. O vetor posição de a pode ser encarado como a soma desses vetores. Por esta razão, a_1 é chamado **componente horizontal** e a_2 **componente vertical** do vetor a.

$a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ é uma **combinação linear** de i e j. Se $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$ e c é um escalar,

$$(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) + (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}) = (a_1 + b_1)\mathbf{i} + (a_2 + b_2)\mathbf{j}$$
$$(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) - (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}) = (a_1 - b_1)\mathbf{i} + (a_2 - b_2)\mathbf{j}$$
$$c(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) = (ca_1)\mathbf{i} + (ca_2)\mathbf{j}$$

As fórmulas precedentes mostram que podemos considerar combinações lineares de i e j como somas algébricas ordinárias.

EXEMPLO 5

Se $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j}$ e $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$, expresse $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ como uma combinação linear de i e j.

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned} 3\mathbf{a} - 2\mathbf{b} &= 3(5\mathbf{i} + \mathbf{j}) - 2(4\mathbf{i} - 7\mathbf{j}) \\ &= (15\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) - (8\mathbf{i} - 14\mathbf{j}) \\ &= 7\mathbf{i} + 17\mathbf{j} \end{aligned}$$

Um **vetor unitário** é um vetor de módulo 1. Os vetores i e j são vetores unitários.

Teorema (14.12)

> Se $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, então o vetor unitário u de mesma direção que a é
>
> $$\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|}\mathbf{a}$$

DEMONSTRAÇÃO

Fazendo $c = 1/\|\mathbf{a}\|$, então $c > 0$ e, pela Definição (14.8), o vetor $\mathbf{u} = c\mathbf{a}$ tem a mesma direção que a. Além disso, pelo Teorema (14.9),

$$\|\mathbf{u}\| = \|c\mathbf{a}\| = |c|\,\|\mathbf{a}\| = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|}\|\mathbf{a}\| = 1$$

EXEMPLO 6

Ache o vetor unitário u de mesma direção que $3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$.

SOLUÇÃO

Pela Definição (14.1), $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{9 + 16} = 5$. Logo, pelo Teorema (14.12),

$$\mathbf{u} = \tfrac{1}{5}(3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}) = \tfrac{3}{5}\mathbf{i} - \tfrac{4}{5}\mathbf{j}$$

Os vetores não têm poucas aplicações em física e engenharia. Concluiremos esta seção com um exemplo no campo da aerodinâmica.

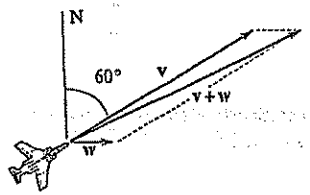


Figura 14.19

EXEMPLO 7

Na navegação aérea, as direções são dadas tomando-se as medidas a partir do norte em sentido *horário*. Suponhamos que um avião esteja voando a 200 km/h na direção 60°, e que o vento sopre diretamente do oeste a 400 km/h. De acordo com a Figura 14.19, essas velocidades podem ser representadas por vetores v e w de módulos 200 e 40, respectivamente. A direção da resultante v + w é a trajetória real do avião em relação ao solo, e o módulo $\|v + w\|$ é a velocidade no solo do avião. Aproxime a velocidade no solo a menos de um quilômetro por hora e o verdadeiro curso do avião a menos de um grau.

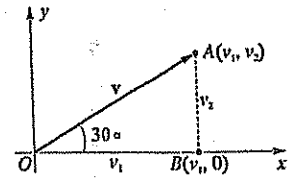


Figura 14.20

SOLUÇÃO

De acordo com a Figura 14.20, consideremos um plano-xy com o avião na origem, o eixo-y sobre a reta norte-sul, e $v = \langle v_1, v_2 \rangle$. Como $d(O, A) = \|v\| = 200$, segue-se que

$$v_1 = 200 \cos 30° = 100\sqrt{3} \quad \text{e} \quad v_2 = 200 \operatorname{sen} 30° = 100$$

Logo

$$v = \langle 100\sqrt{3}, 100 \rangle \quad \text{e} \quad w = \langle 40, 0 \rangle$$

A resultante é

$$v + w = \langle 100\sqrt{3} + 40, 100 \rangle,$$

e a velocidade no solo é

$$\|v + w\| = \sqrt{(100\sqrt{3} + 40)^2 + (100)^2} \approx 235 \text{ km/h}$$

Se θ é o ângulo entre $v + w$ e o eixo-x positivo, então

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{100}{100\sqrt{3} + 40} \approx 0{,}469 \text{ e } \theta \approx \operatorname{arctg}(0{,}469) \approx 25°$$

Logo, a trajetória real do avião é aproximadamente $90° - 25° = 65°$.

EXERCÍCIOS 14.1

Exercs. 1-6: Trace o vetor posição de a e ache $\|a\|$.

1 $a = \langle 2, 5 \rangle$

2 $a = \langle -4, -7 \rangle$

3 $a = \langle -5, 0 \rangle$

4 $a = -18j$

5 $a = -4i + 5j$

6 $a = 2i - 3j$

Exercs. 7-12: Ache a + b, a − b, 2a, −3b, e 4a − 5b.

7 $a = \langle 2, -3 \rangle$, $b = \langle 1, 4 \rangle$

8 $a = \langle -2, -5 \rangle$, $b = \langle -3, 4 \rangle$

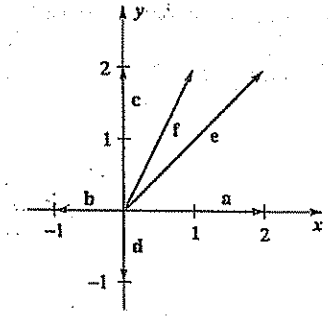
9 $a = -\langle 7, -2 \rangle$, $b = 4\langle -2, 1 \rangle$

10 $a = 2\langle 1, 5 \rangle$, $b = -3\langle -1, -4 \rangle$

11 $a = 3i + 2j$, $b = -i + 5j$

12 $a = -5i + 2j$, $b = i - 3j$

Exercs. 13-18: Use componentes para expressar a soma ou diferença como múltiplo escalar de um dos vetores a, b, c, d, e ou f da figura.



13 a + b

14 c − d

15 b + c

16 f − b

17 b + d

18 e + c

Exercs. 19-24: Ache o vetor a de V_2 que corresponda a $\overrightarrow{PQ}$. Grafe $\overrightarrow{PQ}$ e o vetor posição de a.

19 $P(1, -4)$, $Q(5, 3)$

20 $P(7, -3)$, $Q(-2, 4)$

21 $P(2, 5)$, $Q(-4, 5)$

22 $P(-4, 6)$, $Q(-4, -2)$

23 $P(-3, -1)$, $Q(6, -4)$

24 $P(2, 3)$, $Q(-6, 0)$

Exercs. 25-28: Ache um vetor unitário que tenha (a) a mesma direção de a e (b) a direção oposta à de a.

25 $a = -8i + 15j$

26 $a = 5i - 3j$

27 $a = \langle 2, -5 \rangle$

28 $a = \langle 0, 6 \rangle$

29 Ache um vetor de mesma direção que $\langle -6, 3 \rangle$ e que tenha

(a) duas vezes o módulo de $\langle -6, 3 \rangle$.

(b) metade do módulo.

30 Ache um vetor que tenha direção oposta à de $8i - 5j$ e

(a) três vezes o módulo de $8i - 5j$.

(b) um terço do módulo.

31 Ache um vetor de módulo 6 que tenha a mesma direção que $a = 4i - 7j$.

32 Ache um vetor de módulo 4 que tenha direção oposta à de $a = \langle 2, -5 \rangle$.

Exercs. 33-34: Ache todos os reais c tais que (a) $\|ca\| = 3$, (b) $\|ca\| = -3$, e (c) $\|ca\| = 0$.

33 $a = 3i - 4j$

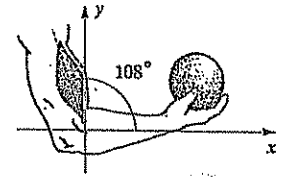
34 $a = \langle -5, 12 \rangle$

Exercs. 35-38: Aproxime as componentes horizontal e vertical do vetor indicado.

35 Um jogador lança sua bola de "*rugbby*" (futebol americano) a 25 m/seg a um ângulo de 35° com a horizontal.

36 Uma criança puxa um trenó na neve exercendo uma força de 9 quilogramas a um ângulo de 40° com a horizontal.

37 O músculo bíceps, ao suportar o antebraço e um peso seguro na mão, exerce uma força de 20 Newtons. De acordo com a figura, o músculo faz um ângulo de 108° com o antebraço.



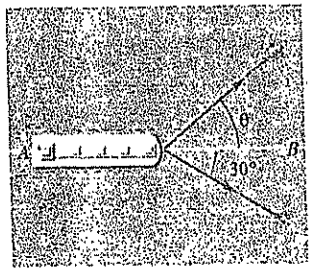
38 Um avião a jato aproxima-se da pista de pouso a um ângulo 7,5° com a horizontal e com uma velocidade de 250 km/h.

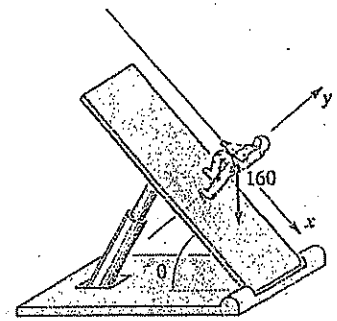
39 Um avião voa na direção 150° com uma velocidade no ar de 300 km/h, e o vento sopra a 30 km/h na direção 60°. Aproxime o trajeto real e a velocidade no solo do avião.

40 Um piloto de avião deseja manter sua rota na direção de 240° com velocidade no solo de 400 km/h quando o vento está soprando em direção norte a 50 km/h. Determine a velocidade no ar e a leitura da bússola.

41 Dois rebocadores estão rebocando um grande navio para o porto, conforme figura. O rebocador maior exerce uma força de 1.800 Newtons sobre o cabo, e o rebocador menor exerce uma força de 1.440 sobre seu cabo. Se o navio deve percorrer uma reta de A a B, determine o ângulo θ que o rebocador maior deve fazer com AB.

41





42 Se $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ e $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ são vetores não-nulos e não-paralelos e $\mathbf{c}$ é um vetor arbitrário, prove que existem escalares p e q tais que $\mathbf{c} = p\mathbf{a} + q\mathbf{b}$. Interprete este fato geometricamente.

43 Determine escalares p e q tais que

$$p\langle 3, -1 \rangle + q\langle 4, 3 \rangle = \langle -6, -11 \rangle$$

44 A figura exibe um aparelho usado para simular condições de gravidade em outros planetas. Amarra-se uma corda a um astronauta que manobra em um plano inclinado fazendo um ângulo de θ graus com a horizontal.

(a) Se o astronauta pesa 90 quilos, ache as componentes x e y desta força para baixo (ver figura para os eixos).

(b) A componente y na parte (a) é o peso do astronauta em relação ao plano inclinado. O astronauta pesaria 12 quilos na Lua e 27 quilos em Marte. Aproxime (a menos de 0,01°) cada ângulo θ de modo que o aparato do plano inclinado permita simular o indivíduo andando nessas superfícies.

45 Sob que condições $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$?

46 (a) Sejam $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ um vetor não-nulo arbitrário e $\overrightarrow{OA}$ o vetor posição de $\mathbf{a}$. Se θ é o menor ângulo não-negativo a partir do eixo-x positivo em direção a $\overrightarrow{OA}$, mostre que

$$\mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|(\cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j})$$

(b) Mostre que todo vetor unitário em V_2 pode expressar-se na forma $\cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}$ para algum θ.

47 Sejam $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0 \rangle$, $\mathbf{r} = \langle x, y \rangle$ e $c > 0$. Descreva o conjunto dos pontos $P(x, y)$ tais que $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\| = c$.

48 Sejam $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0 \rangle$, $\mathbf{r} = \langle x, y \rangle$ e $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle \neq \mathbf{0}$. Descreva o conjunto dos pontos $P(x, y)$ tais que $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ é um múltiplo escalar de $\mathbf{a}$.

Exercs. 49-56: Prove a propriedade indicada, se $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$, $\mathbf{c} = \langle c_1, c_2 \rangle$, e p e q são números reais.

49 $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$

50 $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$

51 $0\mathbf{a} = \mathbf{0} = p\mathbf{0}$

52 $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$

53 $(p + q)\mathbf{a} = p\mathbf{a} + q\mathbf{a}$

54 $p(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = p\mathbf{a} - p\mathbf{b}$

55 Se $p\mathbf{a} = \mathbf{0}$ e $p \neq 0$, então $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

56 Se $p\mathbf{a} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, então $p = 0$.

14.2 VETORES EM TRÊS DIMENSÕES

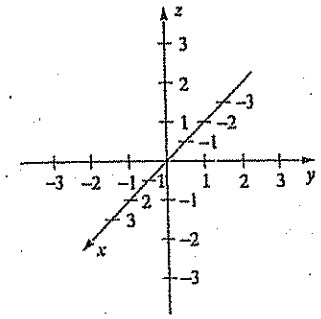


Figura 14.21

Para estudar vetores no espaço, usamos *ternos ordenados* e um *sistema de coordenadas tridimensionais*. Um terno ordenado (a, b, c) é um conjunto $\{a, b, c\}$ de três números em que a é considerado o primeiro número, b o segundo e c o terceiro. Dois ternos ordenados são iguais – o que se indica por $(a_1, a_2, a_3) = (b_1, b_2, b_3)$ – se e somente se $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ e $a_3 = b_3$. A totalidade dos ternos ordenados se denota por $\mathbb{R}^3$.

Para obter um sistema de coordenadas retangulares em três dimensões, escolhemos um ponto fixo O (a origem) e três retas coordenadas mutuamente perpendiculares (os eixos x, y e z) com origem comum O (ver Figura 14.21). Podemos considerar os eixos y e z no plano do papel e o eixo-x projetando-se para fora do papel. As três retas coordenadas determinam três planos coordenados: o **plano-xy**, o **plano-yz** e o **plano-xz** da Figura 14.22.

Os três eixos formam um sistema coordenado **direto**. (Permutando-se os eixos x e y, temos um sistema coordenado **inverso**.)

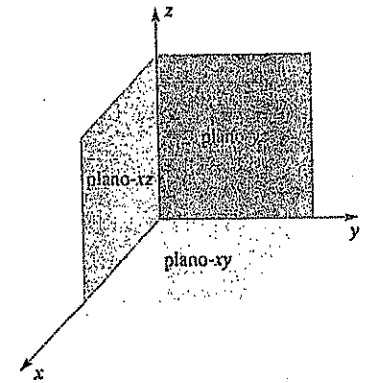


Figura 14.22 Planos coordenados.

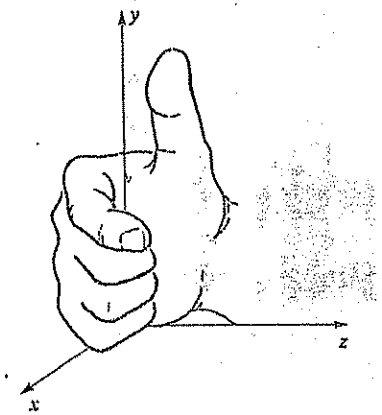


Figura 14.23 Sistema direto.

A expressão *direta* pode ser justificada como a seguir. Se, conforme Figura 14.23, dobramos os dedos da mão direita no

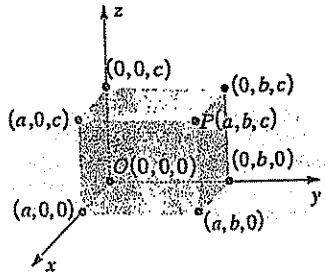


Figura 14.24

sentido de uma rotação de eixos de 90° no plano xy (de modo que o eixo-x positivo venha a coincidir com o eixo-y positivo), então o polegar distendido apontará na direção do eixo-z positivo. Neste texto emprega-se quase sempre o sistema direto de coordenadas.

Se P é um ponto, então a projeção (perpendicular) de P sobre o eixo-x tem coordenada a, que é a **coordenada-x** de P. Da mesma forma, as coordenadas b e c das projeções de P sobre os eixos y e z, respectivamente, são as **coordenadas** y e z de P. Escrevemos $P(a, b, c)$ ou (a, b, c) para denotar o ponto P com coordenadas a, b, c. Se P não está situado em um plano coordenado, então os três planos por P paralelos aos planos coordenados, juntamente com estes, determinam um paralelepípedo do tipo ilustrado na Figura 14.24.

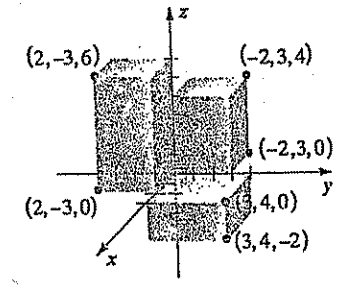


Figura 14.25

O conceito de marcação de pontos em três dimensões é análogo ao do caso de duas dimensões. Na Figura 14.25 estão grafados vários pontos. Para marcar (3, 4, – 2) localizamos primeiro (3, 4, 0) no plano-xy e então caminhamos 2 unidades *para baixo*. Para marcar (– 2, 3, 4) localizamos primeiro (– 2, 3, 0) no plano-xy e caminhamos 4 unidades *para cima*.

A correspondência biunívoca entre pontos do espaço e ternos ordenados de reais definem um **sistema de coordenadas retangulares em três dimensões**, ou um **sistema-xyz de coordenadas**. Os três planos coordenados dividem o espaço em oito partes, chamados **octantes**. A parte que consiste em todos os pontos $P(a, b, c)$ com a, b, c positivos é o **primeiro octante**. Não se costuma numerar os demais octantes.

Estabeleçamos uma fórmula para a distância $d(P_1, P_2)$ entre os pontos P_1, P_2. Se P_1 e P_2 estão sobre uma reta paralela ao eixo-z, conforme Figura 14.26 da página seguinte, e se suas projeções sobre o eixo-z são $A_1(0, 0, z_1)$ e $A_2(0, 0, z_2)$, respectivamente, então $d(P_1, P_2) = d(A_1, A_2) = |z_2 - z_1|$. Valem fórmulas análogas se a reta por P_1 e P_2 é paralela ao eixo-x ou ao eixo-y.

Para achar a distância entre dois pontos P_1 e P_2 que não estão sobre uma reta paralela a um eixo, consideremos uma situação como a ilustrada na Figura 14.27. O triângulo P_1AP_2 é retângulo e, assim, pelo teorema de Pitágoras,

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{[d(P_1, A)]^2 + [d(A, P_2)]^2}$$

Como P_1 e A estão sobre um plano paralelo ao plano-xy, a fórmula (1.4) da distância dá $[d(P_1, A)]^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$. Pelas observações precedentes, $[d(A, P_2)]^2 = (z_2 - z_1)^2$. Substituindo na fórmula precedente de $d(P_1, P_2)$, obtemos:

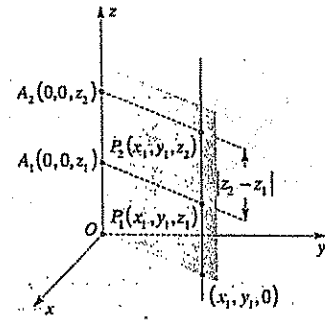


Figura 14.26

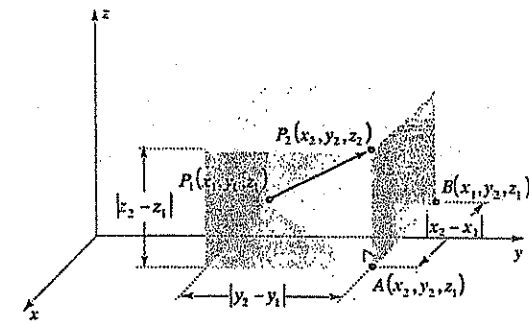


Figura 14.27

Fórmula da distância (14.13)

A distância entre $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$ é

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Se P_1 e P_2 estão no plano-xy, de modo que $z_1 = z_2 = 0$, então (14.13) se reduz à fórmula (1.4) da distância bidimensional.

EXEMPLO 1

Ache a distância entre $A(-1, -3, 1)$ e $B(3, 4, -2)$.

SOLUÇÃO

Aplicando a fórmula (14.13) da distância, temos

$$d(A, B) = \sqrt{(3 + 1)^2 + (4 + 3)^2 + (-2 - 1)^2}$$
$$= \sqrt{16 + 49 + 9} = \sqrt{74}$$

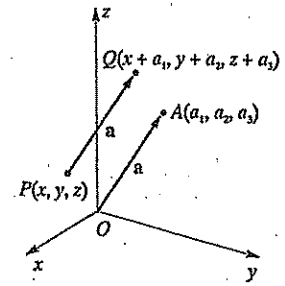


Figura 14.28

Para estudar vetores em três dimensões, incluímos um terceiro componente e utilizamos símbolos da forma

$$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle, \quad \mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle.$$

Denota-se por V_3 o conjunto de todos esses vetores. Estendem-se facilmente a V_3 os conceitos estudados na seção precedente para V_2. Por exemplo, se A é o ponto (a_1, a_2, a_3), temos o vetor posição $\overrightarrow{OA}$ para a, ilustrado na Figura 14.28, que exibe também outro vetor $\overrightarrow{PQ}$ que corresponde a a. Tal como na Seção 14.1, raramente fazemos distinção entre a natureza geométrica e a natureza algébrica de um vetor. Definem-se módulo de um

vetor, adição de vetores e múltiplos escalares de vetores simplesmente acrescentando um componente, como mostrado a seguir:

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ a_3 + b_3 \rangle$$

$$c\,\mathbf{a} = \langle ca_1,\ ca_2,\ ca_3 \rangle$$

O vetor zero em V_3 é $\mathbf{0} = \langle 0, 0, 0 \rangle$, e o negativo de $\mathbf{a}$ é $-\mathbf{a} = \langle -a_1, -a_2, -a_3 \rangle$. Estendem-se a V_3 os teoremas e definições enunciados em (14.5)-(14.9); a única modificação é a inclusão de um terceiro componente para cada vetor. Os exemplos seguintes constituem ilustrações específicas.

EXEMPLO 2

Se $\mathbf{a} = \langle 2, 5, -3 \rangle$ e $\mathbf{b} = \langle -4, 1, 7 \rangle$, ache $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$ e $\|\mathbf{a}\|$.

SOLUÇÃO

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle 2, 5, -3 \rangle + \langle -4, 1, 7 \rangle = \langle -2, 6, 4 \rangle$$

$$2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} = 2\langle 2, 5, -3 \rangle - 3\langle -4, 1, 7 \rangle = \langle 4, 10, -6 \rangle - \langle -12, 3, 21 \rangle = \langle 16, 7, -27 \rangle$$

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{(2)^2 + (5)^2 + (-3)^2} = \sqrt{38}$$

EXEMPLO 3

Se $\mathbf{a} = \langle 15, -6, 24 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 5, -2, 8 \rangle$ e $\mathbf{c} = \langle -\frac{15}{2}, 3, -12 \rangle$, mostre que $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ têm a mesma direção e que $\mathbf{a}$ e $\mathbf{c}$ têm direções opostas.

SOLUÇÃO

Vê-se, por simples inspecção, que

$$\mathbf{a} = 3\mathbf{b}, \quad \text{ou} \quad \mathbf{b} = \tfrac{1}{3}\mathbf{a}$$

Como o escalar 3 (ou $\frac{1}{3}$) é positivo, $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ têm a mesma direção.

Novamente, por inspecção,

$$\mathbf{a} = -2\mathbf{c} \quad \text{ou} \quad \mathbf{c} = -\tfrac{1}{2}\mathbf{a}$$

Como o escalar -2 (ou $-\frac{1}{2}$) é negativo, $\mathbf{a}$ e $\mathbf{c}$ têm direções opostas.

EXEMPLO 4

Dados os pontos $P_1(5, 6, -2)$ e $P_2(-3, 8, 7)$, ache o vetor $\mathbf{a}$ em V_3 que corresponda a $\overrightarrow{P_1P_2}$.

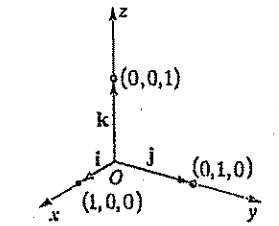


Figura 14.29

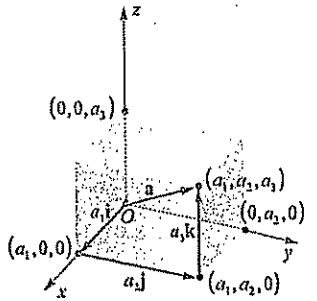


Figura 14.30

SOLUÇÃO

Pelo análogo do Teorema (14.7), para V_3

$$\mathbf{a} = \langle -3 - 5, 8 - 6, 7 + 2 \rangle = \langle -8, 2, 9 \rangle$$

Um vetor $\mathbf{a}$ de V_3 é um **vetor unitário** se $\|\mathbf{a}\| = 1$. Os vetores unitários especiais

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle,\ \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle,\ \mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$$

são importantes porque qualquer vetor $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ pode expressar-se como combinação linear de $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$. Especificamente,

$$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$$

A Figura 14.29 exibe os vetores posição de $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$. A Figura 14.30 ilustra como o vetor posição de $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ pode ser encarado como a soma de três vetores correspondentes a $a_1\mathbf{i}$, $a_2\mathbf{j}$ e $a_3\mathbf{k}$. Em geral, convém considerar V_2 como um subconjunto de V_3 identificando o vetor $\langle a_1, a_2 \rangle$ com o vetor $\langle a_1, a_2, 0 \rangle$. Assim, os vetores unitários $\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$ e $\mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$ são essencialmente os mesmos que $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$ e $\mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle$.

EXEMPLO 5

Expresse $\mathbf{a} = \langle 3, -4, 2 \rangle$ em termos de $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ e ache o vetor unitário $\mathbf{u}$ que tenha a mesma direção que $\mathbf{a}$.

SOLUÇÃO

Podemos escrever

$$\mathbf{a} = \langle 3, -4, 2 \rangle = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

O módulo de $\mathbf{a}$ é

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{29}$$

Como no Teorema (14.12), um vetor unitário $\mathbf{u}$ com a mesma direção de $\mathbf{a}$ é

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|}\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{29}}(3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = \frac{3}{\sqrt{29}}\mathbf{i} - \frac{4}{\sqrt{29}}\mathbf{j} + \frac{2}{\sqrt{29}}\mathbf{k}$$

Concluiremos esta seção utilizando vetores para estabelecer várias fórmulas úteis. A primeira pode enunciar-se como a seguir.

Fórmula do ponto médio (14.14)

O ponto médio do segmento de $P_1(x_1, y_1, z_1)$ a $P_2(x_2, y_2, z_2)$ é

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

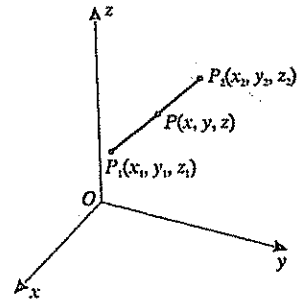


Figura 14.31

DEMONSTRAÇÃO

Seja $P(x, y, z)$ o ponto médio do segmento P_1P_2 (ver Figura 14.31). O fato de P estar a meio caminho entre P_1 e P_2 pode expressar-se em forma vetorial como

$$\overrightarrow{P_1P} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{P_1P_2}$$

ou $$\langle x - x_1, y - y_1, z - z_1\rangle = \tfrac{1}{2}\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\rangle$$

Igualando componentes, temos

$$x - x_1 = \tfrac{1}{2}(x_2 - x_1),\ y - y_1 = \tfrac{1}{2}(y_2 - y_1),\ z - z_1 = \tfrac{1}{2}(z_2 - z_1)$$

Resolvendo estas três equações em relação a x, y, z obtemos as coordenadas do ponto médio de P:

$$x = \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2),\quad y = \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2),\quad z = \tfrac{1}{2}(z_1 + z_2)$$

EXEMPLO 6

Ache o ponto médio do segmento definido por $(2, -3, 6)$ e $(3, 4, -2)$.

SOLUÇÃO

Os pontos estão marcados na Figura 14.25. Pelo Teorema (14.14) o ponto médio é

$$\left(\frac{2 + 3}{2}, \frac{-3 + 4}{2}, \frac{6 + (-2)}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 2\right)$$

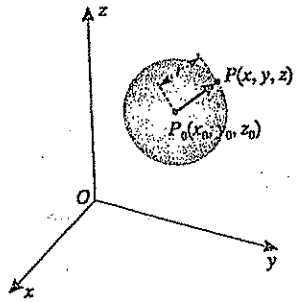


Figura 14.32

O gráfico de uma equação em três variáveis x, y e z é o conjunto de todos os pontos $P(a, b, c)$ em um sistema coordenado retangular tal que o terno ordenado (a, b, c) é solução da equação, isto é, obtém-se uma igualdade quando se substituem x, y e z por a, b e c, respectivamente. O gráfico de uma tal equação é uma **superfície**. Podemos deduzir facilmente a equação de uma esfera de raio r e centro em $P_0(x_0, y_0, z_0)$. De acordo com a Figura 14.32, um ponto $P(x, y, z)$ pertence à esfera se e somente se $\|\overrightarrow{P_0P}\| = r$. Afirmação equivalente é

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = r$$

Elevando ambos os membros ao quadrado obtemos o seguinte teorema.

Teorema (14.15)

A equação da esfera de raio r e centro $P_0(x_0, y_0, z_0)$ é

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

Desenvolvendo os quadrados em (14.15) e simplificando, podemos escrever a equação de uma esfera na forma

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

onde a, b, c e d são números reais. Reciprocamente, partindo de uma equação desta forma, e se o gráfico existe, então, completando quadrados, chegamos a uma equação da forma (14.15); o gráfico é, pois, uma esfera ou um ponto.

EXEMPLO 7

Discuta o gráfico da equação

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8y + 4z + 4 = 0$$

SOLUÇÃO

Completemos os quadrados como segue:

$$(x^2 - 6x) + (y^2 + 8y) + (z^2 + 4z) = -4$$
$$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 8y + 16) + (z^2 + 4z + 4) = -4 + 9 + 16 + 4$$
$$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 + (z + 2)^2 = 25$$

Comparando a última equação com (14.15), vemos que o gráfico é uma esfera de raio 5 e centro $(3, -4, -2)$.

EXERCÍCIOS 14.2

Exercs. 1-6: Marque A e B e ache (a) $d(A, B)$, (b) o ponto médio de AB e (c) o vetor de V_3 que corresponda a $\overrightarrow{AB}$.

1 $A(2, 4, -5)$, $B(4, -2, 3)$
2 $A(1, -2, 7)$, $B(2, 4, -1)$
3 $A(-4, 0, 1)$, $B(3, -2, 1)$
4 $A(0, 5, -4)$, $B(1, 1, 0)$
5 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 1)$
6 $A(0, 0, 0)$, $B(-8, -1, 4)$

Exercs. 7-12: Ache (a) a + b, (b) a − b, (c) 5a − 4b, (d) $\|\mathbf{a}\|$, e (e) $\|-3\mathbf{a}\|$.

7 $\mathbf{a} = \langle -2, 6, 1\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 3, -3, -1\rangle$
8 $\mathbf{a} = \langle 1, 2, -3\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -4, 0, 1\rangle$
9 $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$
10 $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$
11 $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{j} + \mathbf{k}$
12 $\mathbf{a} = 2\mathbf{i}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{k}$

Exercs. 13-14: Esboce os vetores posição de a, b, 2a, -3b, a + b, e a $-$ b.

13 $\mathbf{a} = \langle 2, 3, 4\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 1, -2, 2\rangle$

14 $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

Exercs. 15-16: Ache o vetor unitário que tem mesma direção que a.

15 $\mathbf{a} = 2\langle -2, 5, -1\rangle$ 16 $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

Exercs. 17-18: Ache o vetor que tem (a) a mesma direção de a e duas vezes o módulo de a, (b) direção oposta à de a e um terço do módulo de a, e (c) mesma direção de a e módulo 2.

17 $\mathbf{a} = 14\mathbf{i} - 15\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ 18 $\mathbf{a} = \langle -6, -3, 6\rangle$

Exercs. 19-22: Ache a equação da esfera de centro C e raio r.

19 $C(3, -1, 2)$; $r = 3$

20 $C(4, -5, 1)$; $r = 5$

21 $C(-5, 0, 1)$; $r = \frac{1}{2}$

22 $C(0, -3, -6)$; $r = \sqrt{3}$

Exercs. 23-24: Ache a equação da esfera de centro C e tangente (a) ao plano-xy, (b) ao plano-xz e (c) ao plano-yz.

23 $C(-2, 4, -6)$ 24 $C(3, -1, 2)$

Exercs. 25-26: Ache a equação da esfera cujo diâmetro tem extremidades A e B.

25 $A(1, 4, -2)$, $B(-7, 1, 2)$

26 $A(4, -3, 4)$, $B(0, 3, -10)$

27 Ache a equação da esfera de raio 1, centro no primeiro octante e tangente a cada plano coordenado.

28 Ache a equação da esfera de centro $(2, 3, -1)$ e que contém o ponto $(1, 7, -9)$.

Exercs. 29-34: Ache o centro e o raio da esfera.

29 $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 2z + 2 = 0$

30 $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 10y + 6z + 34 = 0$

31 $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 8z + 16 = 0$

32 $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4x + 8y - 3 = 0$

33 $x^2 + y^2 + z^2 + 4y = 0$

34 $x^2 + y^2 + z^2 - z = 0$

Exercs. 35-42: Descreva a região R em um sistema coordenado tridimensional.

35 $R = \{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$

36 $R = \{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 > 1\}$

37 $R = \{(x, y, z): |x| \le 1, |y| \le 2, |z| \le 3\}$

38 $R = \{(x, y, z): |x| \ge 1, |y| \ge 2, |z| \ge 3\}$

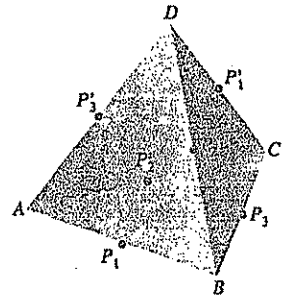
39 $R = \{(x, y, z): x^2 + y^2 \le 25, |z| \le 3\}$

40 $R = \{(x, y, z): (x^2/4) + (y^2/9) \ge 1\}$

41 $R = \{(x, y, z): xyz \ne 0\}$

42 $R = \{(x, y, z): 4 < x^2 + y^2 + z^2 < 9\}$

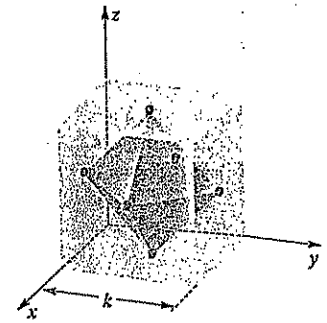
43 Mostre que os segmentos P_1P_1', P_2P_2', e P_3P_3' (ver figura) que unem os pontos médios das arestas opostas de um tetraedro se interceptam em um ponto P, que é o ponto médio de cada segmento. (*Sugestão:* Coloque o vértice D no eixo-z e o triângulo ABC no plano-xy.)



44 Um cubo tem aresta de comprimento k. Os centros das seis faces do cubo são os vértices de um octaedro, conforme figura.

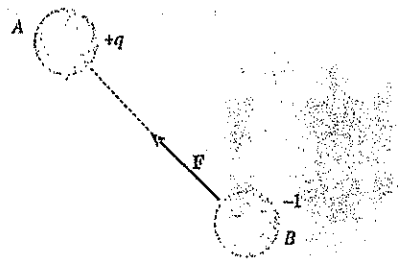
(a) Ache as coordenadas de cada vértice do octaedro.

(b) Ache o comprimento de cada aresta do octaedro em termos de k.



45 A *lei de Coulomb* afirma que o módulo da força de atração entre duas partículas carregadas opostamente é diretamente proporcional ao produto dos módulos q_1 e q_2 das cargas e inversamente proporcional ao quadrado da distância d entre elas. Mostre que se uma partícula com carga $+q$ é fixada em um ponto A e uma partícula com carga -1 é colocada em B (ver figura), então a força de atração $\mathbf{F}$ em A é dada por

$$\mathbf{F} = \frac{kq}{\|\overrightarrow{BA}\|^3}\overrightarrow{BA}$$ para uma constante positiva k



46 Ref. Exercício 45. Partículas de carga $+q$ são colocadas e mantidas fixas nos pontos (1, 0 , 0), (0, 1, 0) e (0, 0, 1). Coloca-se então uma carga de -1 em $P(x, y, z)$.

(a) Se $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$, mostre que a força líquida $\mathbf{F}$ na partícula carregada negativamente é dada por

$$\mathbf{F} = kq\left(\frac{\mathbf{v} - \mathbf{i}}{\|\mathbf{v} - \mathbf{i}\|^3} + \frac{\mathbf{v} - \mathbf{j}}{\|\mathbf{v} - \mathbf{j}\|^3} + \frac{\mathbf{v} - \mathbf{k}}{\|\mathbf{v} - \mathbf{k}\|^3}\right)$$

(b) A partícula carregada negativamente deve ser colocada em um ponto $P(x, y, z)$ eqüidistante das três cargas positivas, de modo que a força líquida que atua sobre a partícula seja 0. Ache as coordenadas de P.

14.3 O PRODUTO ESCALAR

Dois conceitos de grande utilidade envolvendo vetores a e b são *o produto escalar*, que é um escalar, e o *produto vetorial*, que é um vetor. Nesta seção definiremos o produto escalar. O produto vetorial será abordado na próxima seção.

O **produto escalar** $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ de dois vetores pode ser definido geometricamente ou algebricamente. Usaremos o método algébrico por duas razões:

1. Pode ser facilmente generalizado para uso em cursos de matemática avançada, como *álgebra linear*, onde se estudam vetores em quatro ou mais dimensões.

2. Permite demonstrações mais fáceis das propriedades do produto escalar.

Mais adiante consideraremos interpretações geométricas e físicas de $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

Definição (14.16)

O produto escalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ de $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ e $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ é

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Lê-se o símbolo $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ como a *ponto b* (ou a *escalar* b). O produto escalar é chamado também **produto interno**. É importante notar que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ é um escalar, e não um vetor. Se $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ e $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ são vetores de V_2, então seu produto escalar se define como $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2$.

EXEMPLO 1

Ache $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ se

(a) $\mathbf{a} = \langle 2, 4, -3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -1, 5, 2 \rangle$

(b) $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

SOLUÇÃO

(a) $\langle 2, 4, -3 \rangle \cdot \langle -1, 5, 2 \rangle = (2)(-1) + (4)(5) + (-3)(2) = 12$

(b) $(3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot (4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = (3)(4) + (-2)(5) + (1)(-2) = 0$

Damos a seguir algumas propriedades do produto escalar para vetores arbitrários a, b, c e um escalar c.

Propriedades do produto escalar (14.17)

(i) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2$

(ii) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$

(iii) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$

(iv) $(c\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = c(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (c\mathbf{b})$

(v) $\mathbf{0} \cdot \mathbf{a} = 0$

DEMONSTRAÇÃO

Demonstraremos (iii) e deixaremos como exercício a demonstração das outras propriedades. Se $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, e $\mathbf{c} = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$, então

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \cdot \langle b_1 + c_1, b_2 + c_2, b_3 + c_3 \rangle \\ &= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + a_3(b_3 + c_3) \\ &= a_1b_1 + a_1c_1 + a_2b_2 + a_2c_2 + a_3b_3 + a_3c_3 \\ &= (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}.\end{aligned}$$

Mostraremos a seguir que existe uma estreita relação entre o produto escalar e o ângulo entre dois vetores.

Ângulo entre a e b (14.18)

Sejam a e b vetores não-nulos.

(i) Se b não é múltiplo escalar de a e se $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são os vetores posição de a e b, respectivamente, então o ângulo θ entre a e b (ou entre $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$) é o ângulo AOB do triângulo determinado pelos pontos A, O e B (ver Figura 14.33).

(ii) Se $\mathbf{b} = c\mathbf{a}$ para algum escalar c (isto é, se a e b são paralelos), então $\theta = 0$ se $c > 0$ e $\theta = \pi$ se $c < 0$.

Os vetores a e b são **ortogonais**, ou **perpendiculares**, se $\theta = \pi/2$. Admitiremos que o vetor $\mathbf{0}$ é paralelo e perpendicular a todo vetor a. (Recordemos que $\mathbf{0}$ tem *todas* as direções).

Teorema (14.19)

Se θ é o ângulo entre dois vetores não-nulos a e b, então

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \cos \theta$$

DEMONSTRAÇÃO

Se $\mathbf{b} \neq c\mathbf{a}$, temos a situação ilustrada na Figura 14.33. Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo AOB, vem

$$\|\overrightarrow{AB}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2\|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \cos \theta$$

Conseqüentemente

$$(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2$$

$$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - 2\|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \cos \theta,$$

que se simplifica como

$$-2a_1b_1 - 2a_2b_2 - 2a_3b_3 = -2\|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \cos \theta$$

Dividindo ambos os membros da última equação por -2, chegamos à conclusão desejada.

Se $\mathbf{b} = c\mathbf{a}$, então, pelas propriedades (iv) e (i) do Teorema (14.17),

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (c\mathbf{a}) = c(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) = c\|\mathbf{a}\|^2$$

Outrossim, $\|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \cos \theta = \|\mathbf{a}\| \, \|c\mathbf{a}\| \cos \theta = |c| \, \|\mathbf{a}\|^2 \cos \theta$.

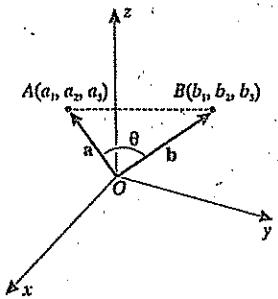


Figura 14.33

Se $c > 0$, então $|c| = c$, $\theta = 0$ e $|c|\,\|a\|^2 \cos\theta$ se reduz a $c\,\|a\|^2$. Assim, $a \cdot b = \|a\|\,\|b\| \cos\theta$. Se $c < 0$, então $|c| = -c$, $\theta = \pi$, e, novamente, $|c|\,\|a\|^2 \cos\theta$ se reduz a $c\|a\|^2$. Está, assim, completa a demonstração do teorema.

O Teorema (14.19) pode ser enunciado como segue: *O produto escalar de dois vetores é igual ao produto de seus módulos e do cosseno do ângulo entre os vetores.* Em alguns livros esta afirmação é usada como definição do produto escalar, porque admite uma interpretação geométrica interessante, útil nas aplicações. Há, entretanto, duas desvantagens em adotar esta definição: é difícil visualizar vetores em quatro ou mais dimensões, e é trabalhoso utilizá-la para demonstrar algumas propriedades do produto escalar.

Dividindo por $\|a\|\,\|b\|$ ambos os membros da fórmula do Teorema (14.19), obtemos o seguinte:

Corolário (14.20) Se θ é o ângulo entre dois vetores não-nulos a e b, então

$$\cos\theta = \frac{a \cdot b}{\|a\|\,\|b\|}$$

EXEMPLO 2

Ache o ângulo entre os vetores $a = \langle 4, -3, 1\rangle$ e $b = \langle -1, -2, 2\rangle$.

SOLUÇÃO

Aplicando o Corolário (14.20), temos

$$\cos\theta = \frac{a \cdot b}{\|a\|\,\|b\|} = \frac{(4)(-1) + (-3)(-2) + (1)(2)}{\sqrt{16 + 9 + 1}\sqrt{1 + 4 + 4}}$$

$$= \frac{4}{3\sqrt{26}} = \frac{4\sqrt{26}}{78} = \frac{2\sqrt{26}}{39}$$

Logo, $\theta = \arccos(2\sqrt{26}/39) = \arccos(0{,}2615)$.

Utilizando uma calculadora ou uma tábua, obtemos

$$\theta = 74{,}84^\circ = 1{,}31 \text{ radianos}$$

O próximo teorema decorre do Teorema (14.19).

Teorema (14.21) Dois vetores a e b são ortogonais se e somente se $a \cdot b = 0$.

EXEMPLO 3

Prove que os vetores (a) i, j (b) $3i - 7j + 2k$, $10i + 4j - k$ são ortogonais.

SOLUÇÃO

A prova decorre do Teorema (14.21).

(a) $i \cdot j = \langle 1, 0, 0\rangle \cdot \langle 0, 1, 0\rangle = (1)(0) + (0)(1) + (0)(0) = 0$

(b) $(3i - 7j + 2k) \cdot (10i + 4j - k) = 30 - 28 - 2 = 0$

Ambos os resultados a seguir são válidos para todos os vetores a e b.

Desigualdade de Cauchy-Schwarz (14.22)

$$|a \cdot b| \le \|a\|\,\|b\|$$

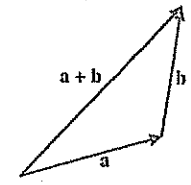


Figura 14.34

DEMONSTRAÇÃO

O resultado é trivial se a ou b é 0. Se a e b são vetores não-nulos, então, pelo Teorema (14.19), $|a \cdot b| = \|a\|\,\|b\|\,|\cos\theta|$, onde θ é o ângulo entre a e b. Como $|\cos\theta| \le 1$, $|a \cdot b| \le \|a\|\,\|b\|$.

Representando a, b e $a + b$ geometricamente, como na Figura 14.34, e utilizando o fato de que o comprimento $\|a + b\|$ de um lado do triângulo não pode exceder a soma dos comprimentos dos outros dois lados, obtemos o resultado seguinte.

Desigualdade do triângulo (14.23)

$$\|a + b\| \le \|a\| + \|b\|$$

Vamos dar uma demonstração *algébrica* da desigualdade do triângulo, utilizando o produto escalar.

DEMONSTRAÇÃO ALGÉBRICA DE (14.23)

Aplicando propriedades do produto escalar, obtemos

$$\|a + b\|^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a \cdot a + 2(a \cdot b) + b \cdot b$$

$$= \|a\|^2 + 2(a \cdot b) + \|b\|^2$$

Como $a \cdot b \le |a \cdot b| \le \|a\|\,\|b\|$ (ver (14.22)),

$$\|a + b\|^2 \le \|a\|^2 + 2\|a\|\,\|b\| + \|b\|^2 = (\|a\| + \|b\|)^2$$

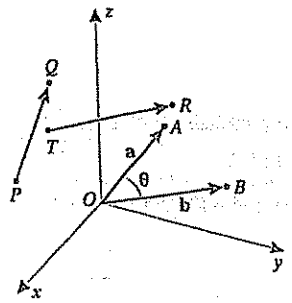


Figura 14.35

Tomando raízes quadradas, temos

$$\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\| \le \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$$

Em (14.18) definimos o ângulo entre vetores em V_3. Define-se o ângulo entre dois vetores (segmentos orientados) $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{TR}$ como o ângulo θ entre seus vetores correspondentes a e b em V_3. A Figura 14.35 ilustra um ângulo típico; ali $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são vetores posição de a e b, respectivamente. Se $\theta = \pi/2$, então $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{TR}$ são **ortogonais**.

O **produto escalar** de $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{TR}$ na Figura 14.35 se define como

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{TR} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\| \cos\theta$$

Como $\|\overrightarrow{PQ}\| = \|\mathbf{a}\|$ e $\|\overrightarrow{TR}\| = \|\mathbf{b}\|$,

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{TR} = \|\overrightarrow{PQ}\|\,\|\overrightarrow{TR}\| \cos\theta$$

Se $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$ têm o mesmo ponto inicial e se S é a projeção de Q sobre a reta por P e R (ver Figura 14.36), então o escalar $\|\overrightarrow{PQ}\| \cos\theta$ é chamado **componente de $\overrightarrow{PQ}$ segundo $\overrightarrow{PR}$**, o que se abrevia como $\text{comp}_{\overrightarrow{PR}}\,\overrightarrow{PQ}$.

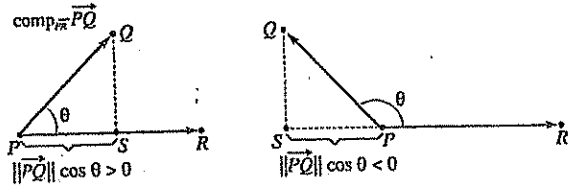


Figura 14.36

Note que o escalar $\|\overrightarrow{PQ}\| \cos\theta$ é positivo se $0 \le \theta < \pi/2$ ou negativo se $\pi/2 < \theta \le \pi$. Se $\theta = \pi/2$, o componente é 0. Segue-se que

$$\text{comp}_{\overrightarrow{PR}}\,\overrightarrow{PQ} = \|\overrightarrow{PQ}\| \cos\theta = \|\overrightarrow{PQ}\| \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}}{\|\overrightarrow{PQ}\|\,\|\overrightarrow{PR}\|} = \overrightarrow{PQ} \cdot \frac{1}{\|\overrightarrow{PR}\|}\overrightarrow{PR}$$

A afirmação seguinte facilita a rememoração deste fato.

Teorema (14.24) O componente de $\overrightarrow{PQ}$ segundo $\overrightarrow{PR}$ é igual ao produto escalar de $\overrightarrow{PQ}$ pelo vetor unitário de mesma direção que $\overrightarrow{PR}$.

Com auxílio do Teorema (14.24), podemos definir a componente de um vetor a segundo um vetor b em V_3 como segue.

Definição (14.25) Sejam a e b vetores em V_3, com $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. A **componente de a segundo b**, denotada por $\text{comp}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}$, é

$$\text{comp}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \frac{1}{\|\mathbf{b}\|}\mathbf{b}$$

Se $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, então, pela Definição (14.25), $\text{comp}_{\mathbf{i}}\,\mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{i} = a_1$, $\text{comp}_{\mathbf{j}}\,\mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{j} = a_2$ e $\text{comp}_{\mathbf{k}}\,\mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{k} = a_3$.

Assim, as componentes de a segundo i, j e k são as mesmas que as componentes a_1, a_2 e a_3 de a.

EXEMPLO 4

Se $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ e $\mathbf{b} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, ache (a) $\text{comp}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}$ e (b) $\text{comp}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}$

SOLUÇÃO

(a) Aplicando a Definição (14.25), temos

$$\text{comp}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \frac{1}{\|\mathbf{b}\|}\mathbf{b} = (4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}) \cdot \frac{1}{7}(6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k})$$

$$= \frac{24 - 3 - 10}{7} = \frac{11}{7} \approx 1{,}6$$

(b) Permutando os papéis de a e b em (14.25), obtemos

$$\text{comp}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \frac{1}{\|\mathbf{a}\|}\mathbf{a} = (6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) \cdot \frac{1}{\sqrt{42}}(4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k})$$

$$= \frac{24 - 3 - 10}{\sqrt{42}} = \frac{11}{\sqrt{42}} \approx 1{,}7$$

Concluiremos esta seção com uma importante interpretação física do produto escalar. Recordemos, da Definição (6.20), que o trabalho realizado se uma força constante F é exercida através de uma distância d, é dado por $W = Fd$. Esta fórmula é bastante restritiva, porque só pode ser empregada se a força é aplicada ao longo da reta de movimento. De modo mais geral, suponhamos que um vetor $\overrightarrow{PQ}$ represente uma força, e que seu

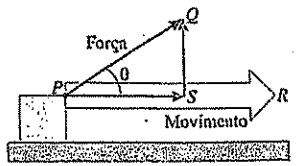


Figura 14.37

ponto de aplicação se mova ao longo de um vetor $\overrightarrow{PR}$, conforme ilustrado na Figura 14.37, onde se aplica uma força $\overrightarrow{PQ}$ para mover um objeto ao longo de uma trajetória plana de P a R. Como

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SQ}$$

$\overrightarrow{SQ}$ não contribui para o movimento horizontal e, assim, o movimento de P a R é causado tão-somente por $\overrightarrow{PS}$. Aplicando (6.20) com $F = \|\overrightarrow{PS}\|$ e $d = \|\overrightarrow{PR}\|$, vemos que o trabalho realizado é

$$W = (\|\overrightarrow{PS}\|)\|\overrightarrow{PR}\|$$
$$= (\|\overrightarrow{PQ}\| \cos \theta)\|\overrightarrow{PR}\| = \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}$$

Isto motiva a definição seguinte.

Definição (14.26)

O trabalho realizado por uma força constante $\overrightarrow{PQ}$, quando seu ponto de aplicação se move ao longo do vetor $\overrightarrow{PR}$, é $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}$.

EXEMPLO 5

O módulo e a direção de uma força constante são dados por $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$. Ache o trabalho realizado, se o ponto de aplicação da força se desloca de $P(1, -1, 2)$ a $R(4, 3, -1)$.

SOLUÇÃO

O vetor de V_3 que corresponde a $\overrightarrow{PR}$ é

$$\mathbf{b} = \langle 4-1, 3-(-1), -1-2\rangle = \langle 3, 4, -3\rangle$$

Se $\overrightarrow{PQ}$ corresponde a $\mathbf{a}$, então, pela Definição (14.26), o trabalho realizado é

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \langle 5, 2, 6\rangle \cdot \langle 3, 4, -3\rangle = 15 + 8 - 18 = 5$$

Se, por exemplo, a distância é em pés e o módulo da força é em libras, então o trabalho é 5 pés-lb. Se a distância é em metros e a força é em Newtons, o trabalho realizado é 5 joules.

EXEMPLO 6

Uma carreta pesando 100 quilos é empurrada ladeira acima a um ângulo de 30° com a horizontal, conforme Figura 14.38(i). Determine o trabalho realizado contra a gravidade ao empurrar a carreta por uma distância de 80 m.

SOLUÇÃO

Trataremos o problema como bidimensional e introduziremos um sistema de coordenadas xy conforme Figura 14.38(ii). O vetor $\overrightarrow{PQ}$ representa a força da gravidade que atua verticalmente para baixo com módulo de 100 quilos. O vetor $\mathbf{F}$ correspondente em V_2 é $0\mathbf{i} - 100\mathbf{j}$. O ponto de aplicação desta força se move ao longo do vetor $\overrightarrow{PR}$ de módulo 80. Se $\overrightarrow{PR}$ corresponde a $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$, então, pelo triângulo PTR, vemos que

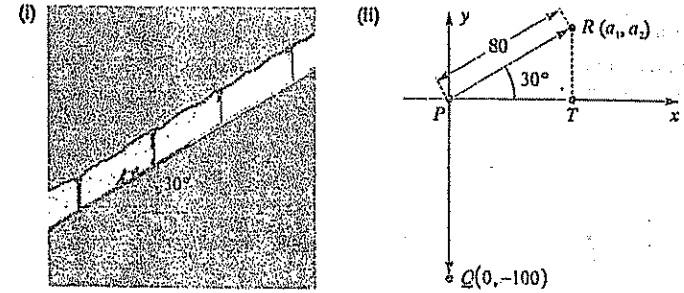


Figura 14.38

$$a_1 = 80 \cos 30° = 40\sqrt{3}, \quad a_2 = 80 \operatorname{sen} 30° = 40$$

e daí

$$\mathbf{a} = 40\sqrt{3}\mathbf{i} + 40\mathbf{j}$$

O trabalho realizado pela gravidade é $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}$, ou $\mathbf{F} \cdot \mathbf{a}$. Aplicando a definição de produto escalar, vem

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{a} = (0\mathbf{i} - 100\mathbf{j}) \cdot (40\sqrt{3}\mathbf{i} + 40\mathbf{j}) = 0 - 4000 = -4000 \text{ joules}$$

Assim, o trabalho realizado *contra* a gravidade é

$$-\mathbf{F} \cdot \mathbf{a} = 4000 \text{ joules}$$

EXERCÍCIOS 14.3

Exercs. 1-10: Dados $\mathbf{a} = \langle -2, 3, 1\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 7, 4, 5\rangle$, e $\mathbf{c} = \langle 1, -5, 2\rangle$, ache o número.

1 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$

2 $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$

3 (a) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ (b) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$

4 (a) $(\mathbf{a} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b}$ (b) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{c} \cdot \mathbf{b}$

5 $(2\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot 3\mathbf{c}$

6 $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

7 $\text{comp}_{\mathbf{c}}\mathbf{b}$

8 $\text{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{c}$

9 $\text{comp}_{\mathbf{b}}(\mathbf{a} + \mathbf{c})$

10 $\text{comp}_{\mathbf{c}}\mathbf{c}$

Exercs. 11-14: Ache o ângulo de a e b.

11 $\mathbf{a} = -4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

12 $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 5\mathbf{i} - \mathbf{k}$

13 $\mathbf{a} = \langle -2, -3, 0\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -6, 0, 4\rangle$

14 $\mathbf{a} = \langle 3, -5, -1\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, 1, -3\rangle$

Exercs. 15-16: Mostre que a e b são ortogonais.

15 $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

16 $\mathbf{a} = \langle 4, -1, -2\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, -2, 5\rangle$

Exercs. 17-18: Ache todos os valores de c tais que a e b sejam ortogonais.

17 $\mathbf{a} = \langle c, -2, 3\rangle$, $\mathbf{b} = \langle c, c, -5\rangle$

18 $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 22\mathbf{j} - 3c\mathbf{k}$

Exercs. 19-24: Dados os pontos $P(3, -2, -1)$, $Q(1, 5, 4)$, $R(2, 0, -6)$ e $S(-4, 1, 5)$, ache a quantidade indicada.

19 $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{RS}$ 20 $\overrightarrow{QS} \cdot \overrightarrow{RP}$

21 O ângulo de $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{RS}$.

22 O ângulo de $\overrightarrow{QS}$ e $\overrightarrow{RP}$.

23 O componente de $\overrightarrow{PS}$ segundo $\overrightarrow{QR}$.

24 O componente de $\overrightarrow{QR}$ segundo $\overrightarrow{PS}$.

Exercs. 25-26: Se o vetor a representa uma força constante, ache o trabalho realizado quando seu ponto de aplicação percorre o segmento de P a Q.

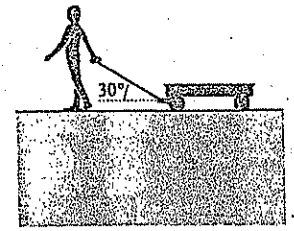
25 $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$; $P(4, 0, -7)$, $Q(2, 4, 0)$

26 $\mathbf{a} = \langle 8, 0, -4\rangle$; $P(-1, 2, 5)$, $Q(4, 1, 0)$

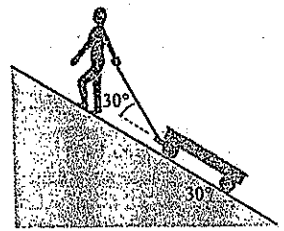
27 Uma força constante de módulo 4 Newtons tem a mesma direção que o vetor $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Se a distância é medida em metros, ache o trabalho realizado quando o ponto de aplicação se move ao longo do eixo-y de (0, 2, 0) a (0, −1, 0).

28 Uma força constante de módulo 5 Newtons tem a mesma direção do eixo-z positivo. Se a distância é medida em metros, ache o trabalho realizado quando o ponto de aplicação percorre o segmento da origem ao ponto $P(1, 2, 3)$.

29 Uma pessoa puxa um carrinho em terreno plano exercendo uma força de 20 Newtons sobre um puxador que forma um ângulo de 30° com a horizontal (ver figura). Ache o trabalho realizado ao puxar o carrinho por uma distância de 100 metros.



30 Ref. Exercício 29. Ache o trabalho realizado se o carrinho é puxado com a mesma força, por uma distância de 100 metros ladeira acima a um ângulo de 30° com a horizontal (ver figura).



31 Se AB é um diâmetro de uma esfera de centro O e raio r, e P é um terceiro ponto na esfera, mostre, por meio de vetores, que APB é um triângulo retângulo. (Sugestão: Faça $\mathbf{v}_1 = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{v}_2 = \overrightarrow{OP}$, e expresse $\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PB}$ em termos de $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.)

32 Os *parâmetros diretores* de um vetor não-nulo $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ se definem como os ângulos α, β e γ entre os vetores i, j e k, respectivamente, e o vetor a. Os *cossenos diretores* de a são $\cos\alpha$, $\cos\beta$ e $\cos\gamma$. Prove:

(a) $\cos\alpha = \dfrac{a_1}{\|\mathbf{a}\|}$, $\cos\beta = \dfrac{a_2}{\|\mathbf{a}\|}$, $\cos\gamma = \dfrac{a_3}{\|\mathbf{a}\|}$

(b) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

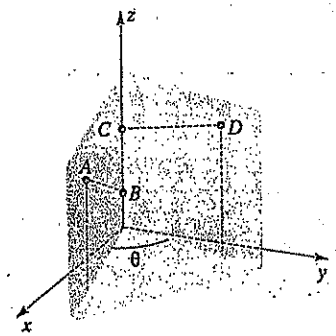
33 Ref. Exercício 35.

(a) Ache os cossenos diretores de $\mathbf{a} = \langle -2, 1, 5\rangle$.

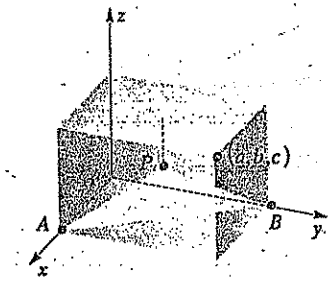
(b) Ache os parâmetros diretores e os cossenos diretores de i, j e k.

(c) Ache dois vetores unitários que verifiquem $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma$.

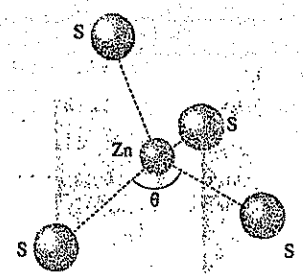
34 Dada uma seqüência A-B-C-D de quatro átomos vinculados, o ângulo do plano formado por A, B e C com o plano formado por B, C e D é chamado *ângulo de torção* θ da ligação, ou vínculo. Com este ângulo de torção explica-se a estabilidade das estruturas moleculares. Colocando-se o segmento BC ao longo do eixo-z (ver figura), como se pode calcular θ em termos das componentes dos vetores $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{CD}$?



35 Uma caixa retangular tem comprimento a, largura b e altura c (ver figura). Se P é o centro da caixa, utilize vetores para achar uma expressão para o ângulo APB em termos de a, b e c.



36 Ref. Exercício 32. Na esfalerita mineral, cada átomo de zinco é rodeado por quatro átomos de enxofre, que formam um tetraedro com o átomo de zinco no centro (ver figura). O *ângulo de ligação* θ é o ângulo formado pela combinação S-Zn-S. Por meio de vetores, mostre que o *ângulo tetraedro* θ é aproximadamente de 109,5.



37 Três números não-nulos l, m e n são parâmetros diretores de um vetor não-nulo a se são proporcionais aos cossenos diretores – isto é, se existe um número positivo k tal que

$$l = k\cos\alpha,\ m = k\cos\beta,\ n = k\cos\gamma$$

Se $d = (l^2 + m^2 + n^2)^{1/2}$, prove que $\cos\alpha = l/d$, $\cos\beta = m/d$, $\cos\gamma = n/d$.

38 Ref. Exercício 37. Se l_1, m_1, n_1 e l_2, m_2, n_2 são parâmetros diretores de a e b, respectivamente, prove que

(a) a e b são ortogonais se e somente se

$$l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$$

(b) a e b são paralelos se e somente se existe um número k tal que $l_1 = kl_2$, $m_1 = km_2$, e $n_1 = kn_2$

Exercs. 39-42: Prove a propriedade vetorial dada se $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, c_2\rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ e c é um escalar.

39 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2$

40 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$

41 $(c\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = c(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (c\mathbf{b})$

42 $\mathbf{0} \cdot \mathbf{a} = 0$

Exercs. 43-52: Resolva *sem utilizar componentes* dos vetores:

43 Sejam a e b vetores não-nulos, não-paralelos, tais que $c\mathbf{a} + d\mathbf{b} = p\mathbf{a} + q\mathbf{b}$, com c, d, p e q escalares. Prove que $c = p$ e $d = q$.

44 Prove que se c é ortogonal a a e a b, então c é ortogonal a $p\mathbf{a} + q\mathbf{a}$ para todos os escalares p e q.

45 Prove que $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + \|\mathbf{b}\|^2$.

46 Prove que $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 = 2(\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2)$.

47 Na desigualdade de Cauchy-Schwarz, sob que condições se tem $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| = \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\|$?

48 Na desigualdade do triângulo, sob que condições se tem $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$?

49 Prove que $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| \geq \|\mathbf{a}\| - \|\mathbf{b}\|$. (*Sugestão:* Considere $\mathbf{a} = \mathbf{b} + (\mathbf{a} - \mathbf{b})$ e use a desigualdade do triângulo.)

50 Prove que $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}$.

51 Prove que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{4}(\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2)$.

52 Prove que $\text{comp}_{\mathbf{c}}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \text{comp}_{\mathbf{c}}\mathbf{a} + \text{comp}_{\mathbf{c}}\mathbf{b}$

14.4 O PRODUTO VETORIAL

Nesta seção introduziremos o *produto vetorial* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ de dois vetores a e b em V_3. Ao contrário do produto escalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, que é um escalar, o produto vetorial é um vetor. Como veremos, o vetor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ é ortogonal tanto a a como a b. É utilizado na física e na engenharia para descrever efeitos rotacionais produzidos por forças. Poderíamos definir $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ geometricamente e obter então a forma em i, j, k introduzindo um sistema retangular de coordenadas; vamos, entretanto, começar com uma definição algébrica. Embora este método possa encobrir a natureza geométrica de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, tem a vantagem de permitir demonstrações mais simples das propriedades.

Convém utilizar *determinantes* ao lidar com produtos vetoriais. Um **determinante de ordem 2** se define como

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

onde todas as letras representam números reais.

ILUSTRAÇÃO

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = (2)(5) - (-3)(4) = 10 + 12 = 22$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = (4)(-3) - (5)(2) = -12 - 10 = -22$$

A ilustração precedente demonstra uma propriedade válida para determinantes de todas as ordens: *A permuta de duas linhas (colunas) inverte o sinal de um determinante.*

Um determinante de ordem 3 é dado por

$$\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} c_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} c_3$$

Esta expressão costuma chamar-se *desenvolvimento do determinante segundo a primeira linha*. Obtém-se o valor do determinante calculando-se os determinantes de segunda ordem do membro direito da equação.

ILUSTRAÇÃO

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}(2) - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}(-1) + \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}(3)$$

$$= (-20 - 2)(2) - (8 - 1)(-1) + (-4 - 5)(3)$$

$$= -44 + 7 - 27 = -64$$

Definição (14.27)

O produto vetorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ de $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ e $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ é

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

O símbolo $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ se lê como "a *cruz b*". Note que a fórmula de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ pode ser obtida substituindo-se c_1, c_2, c_3 na definição de determinante de ordem 3, pelos vetores unitários i, j, k. Isto sugere a seguinte notação para a fórmula da Definição (14.27).

Notação para produtos vetoriais (14.28)

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

O símbolo à direita de (14.28) *não* é um determinante, pois a primeira linha contém vetores em lugar de escalares. Todavia, a notação de determinante é útil para rememorar a fórmula mais complicada da Definição (14.27). Com esta definição em mente, utilizaremos (14.28) para achar produtos vetoriais, como no exemplo que vem a seguir.

EXEMPLO 1

Ache $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ se $\mathbf{a} = \langle 2, -1, 6 \rangle$ e $\mathbf{b} = \langle -3, 5, 1 \rangle$.

SOLUÇÃO

Procedemos como segue:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 6 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$= (-1-30)\mathbf{i} - (2+18)\mathbf{j} + (10-3)\mathbf{k}$$

$$= -31\mathbf{i} - 20\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$$

Se a é um vetor arbitrário em V_3, então

$$\mathbf{a} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{a}$$

porque, se um dos vetores na Definição (14.27) é 0, então cada determinante tem uma linha de zeros, sendo, assim, 0 (verifique!). É fácil também mostrar que $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ para todo a.

O próximo teorema evidencia uma propriedade importante do produto vetorial.

Teorema (14.29) O vetor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ é ortogonal tanto a a como a b.

DEMONSTRAÇÃO

Pelo Teorema (14.21), basta mostrar que

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = 0 \text{ e } (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0$$

Obtendo o produto escalar (14.27) de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ e $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, vem:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} a_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} a_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} a_3$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)a_1 - (a_1b_3 - a_3b_1)a_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)a_3$$

$$= a_2b_3a_1 - a_3b_2a_1 - a_1b_3a_2 + a_3b_1a_2 + a_1b_2a_3 - a_2b_1a_3$$

$$= 0$$

Logo, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ é ortogonal a a. A prova de que $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0$ é análoga.

Interpretemos o Teorema (14.29) geometricamente. De acordo com a Figura 14.39(i), se vetores não-nulos a e b correspondem a vetores $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$ com mesmo ponto inicial P, então $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ corresponde a um vetor $\overrightarrow{PS}$ que é ortogonal tanto a $\overrightarrow{PQ}$ como a $\overrightarrow{PR}$. Logo, $\overrightarrow{PS}$ é perpendicular ao plano determinado por P, Q e R. Escrevemos

$$\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$$

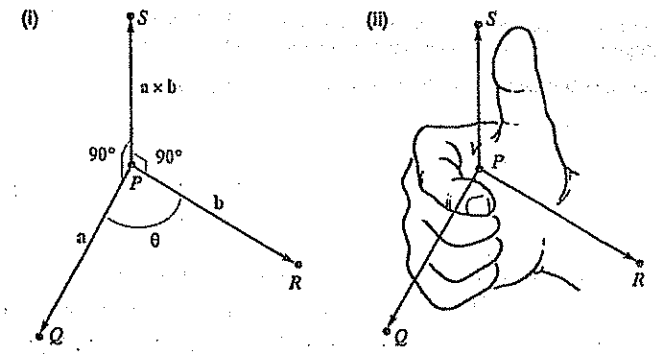


Figura 14.39

Pode-se obter a direção $\overrightarrow{PS}$ por meio da regra da mão direita ilustrada na Figura 14.39(ii). Assim, se θ é o ângulo entre $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$, e se os dedos da mão direita são dobrados de modo que uma rotação de θ transforme $\overrightarrow{PQ}$ em um vetor que tenha a mesma direção de $\overrightarrow{PR}$, então o polegar distendido apontará na direção de $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$.

O resultado que segue dá o módulo de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Teorema (14.30) Se θ é o ângulo entre vetores não-nulos a e b, então

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \operatorname{sen} \theta$$

DEMONSTRAÇÃO

Pelo Teorema (14.17)(i) e a Definição (14.27),

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2$$
$$= a_2^2b_3^2 - 2a_2a_3b_2b_3 + a_3^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 - 2a_1a_3b_1b_3$$
$$+ a_3^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_1^2$$
$$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$$

Pode-se verificar a última igualdade efetuando-se as multiplicações. Em forma vetorial, a identidade precedente é

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 = (\|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\|)^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2.$$

ou, como $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \cos \theta$,

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 = (\|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\|)^2 - (\|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\|)^2 \cos \theta$$
$$= (\|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\|)^2(1 - \cos^2 \theta).$$

Logo $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 = (\|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\|)^2 \operatorname{sen}^2 \theta$.

Extraindo raízes quadradas e notando que $\operatorname{sen} \theta \geq 0$ (pois $0 \leq \theta \leq \pi$), obtemos

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \operatorname{sen} \theta.$$

Corolário (14.31) Dois vetores **a** e **b** são paralelos se e somente se $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

DEMONSTRAÇÃO

Sejam **a** e **b** vetores não-nulos. Se θ é o ângulo de **a** e **b**, então os vetores são paralelos se e somente se $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, ou, equivalentemente, $\operatorname{sen} \theta = 0$. Pelo Teorema (14.30), a última afirmação é equivalente a $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$. Se ou **a** ou **b** é o vetor zero, a prova é trivial, pois **0** é paralelo a todos os vetores.

Para interpretar $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ geometricamente, representemos **a** e **b** por vetores $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$ com mesmo ponto inicial P. Conforme Figura 14.40, seja S o ponto tal que os segmentos PQ e PR sejam lados adjacentes de um paralelogramo com vértices P, Q, R e S. $\|\mathbf{b}\| \operatorname{sen} \theta$ é uma altura do paralelogramo e, assim, sua área é $\|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \operatorname{sen} \theta$. Comparando com o Teorema (14.30), vemos que *o módulo do produto vetorial* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ *é igual à área do paralelogramo definido por* **a** e **b**.

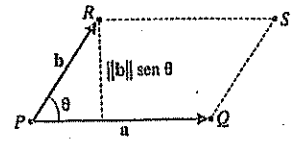


Figura 14.40

EXEMPLO 2

Ache a área do triângulo formado por $P(4, -3, 1)$, $Q(6, -4, 7)$ e $R(1, 2, 2)$.

SOLUÇÃO

Os vetores em V_3 correspondentes a $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$ são

$$\mathbf{a} = \langle 6 - 4, -4 - (-3), 7 - 1 \rangle = \langle 2, -1, 6 \rangle$$
$$\mathbf{b} = \langle 1 - 4, 2 - (-3), 2 - 1 \rangle = \langle -3, 5, 1 \rangle$$

Do Exemplo 1,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -31\mathbf{i} - 20\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$$

Logo, a área do paralelogramo de lados adjacentes $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$ é

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \sqrt{961 + 400 + 49} = \sqrt{1.410}$$

Segue-se que a área do triângulo é $\frac{1}{2}\sqrt{1.410} \approx 18{,}8$.

Têm interesse os produtos vetoriais dos vetores unitários especiais **i**, **j** e **k**. Por exemplo, pela Definição (14.27) com $\mathbf{a} = \mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$ e $\mathbf{b} = \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle$, temos

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{k} = \mathbf{k}$$

Pode-se também provar, de maneira análoga:

Propriedades de i, j, k (14.32)

$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$	$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$	$\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$
$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$	$\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$	$\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$
$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$		

A Figura 14.41 é um dispositivo mnemônico simples para lembrar seis das fórmulas (14.32). Dispondo os símbolos **i**, **j**, **k** ao redor de um círculo conforme figura, e procedendo em *sentido horário* (denotado pelas setas), então o produto vetorial de dois vetores sucessivos quaisquer é o próximo vetor. Assim, $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$. Para o sentido *anti-horário*, deve-se tomar o *negativo* do próximo vetor, como em $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$.

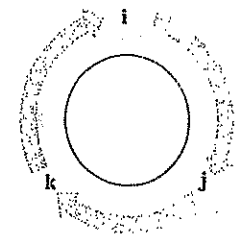


Figura 14.41

O fato de ser $\mathbf{i} \times \mathbf{j} \neq \mathbf{j} \times \mathbf{i}$ mostra que *o produto vetorial não é comutativo*. Além disso, *não vale a lei associativa*, pois, por exemplo

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

mas

$$(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$$

As propriedades seguintes são válidas para quaisquer vetores **a**, **b**, **c** e um escalar m.

Propriedades do produto vetorial (14.33)

(i) $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$

(ii) $(m\mathbf{a}) \times \mathbf{b} \times = m(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (m\mathbf{b})$

(iii) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$

(iv) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

(v) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

(vi) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$

DEMONSTRAÇÃO

Cada propriedade pode ser estabelecida por aplicação direta (embora às vezes longa) da Definição (14.27). Para provar (i), façamos $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ e $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ obtendo

$$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

Como a permuta de duas linhas de um determinante muda seu sinal, temos

$$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$= -(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

Para provar (iii) consideremos $\mathbf{c} = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$. O componente **i** de $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ é

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_1 + c_2 & b_3 + c_3 \end{vmatrix} = a_2(b_3 + c_3) - a_3(b_2 + c_2)$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2) + (a_2c_3 - a_3c_2)$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

que é igual ao componente **i** de $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$. Mediante cálculo análogo pode-se provar que os componentes **j** e **k** de $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ são os mesmos que os de $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$. Isto estabelece (iii). A prova das outras propriedades fica como exercício.

A fórmula (vi) do Teorema (14.33) é chamada **duplo produto vetorial** de **a**, **b** e **c**. (Em livros de língua inglesa, usa-se o *triplo produto vetorial*).

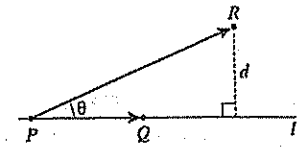


Figura 14.42

EXEMPLO 3

Ache a fórmula da distância d de um ponto R a uma reta l.

SOLUÇÃO

Sejam P e Q pontos de l, conforme Figura 14.42, e θ o ângulo entre $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$. Como $d = \|\overrightarrow{PR}\| \operatorname{sen} \theta$, obtemos

$$\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\| = \|\overrightarrow{PQ}\| \, \|\overrightarrow{PR}\| \operatorname{sen} \theta = \|\overrightarrow{PQ}\| d$$

Logo,

$$d = \frac{\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\|}{\|\overrightarrow{PQ}\|}$$

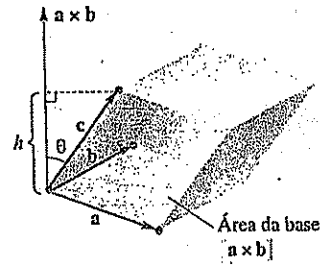


Figura 14.43

EXEMPLO 4

Sejam **a**, **b** e **c** os lados adjacentes da caixa oblíqua da Figura 14.43. Mostre que $|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$ é o volume da caixa.

SOLUÇÃO

A área da base da caixa é $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$. Seja θ o ângulo entre **c** e $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Como $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ é perpendicular à base, a altura h da caixa é dada por $h = \|\mathbf{c}\| |\cos \theta|$. (Devemos empregar o valor absoluto $|\cos \theta|$, pois θ pode ser um ângulo obtuso.) Assim, o volume V da caixa é

$$V = (\text{área da base})(\text{altura})$$

$$= \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| \, \|\mathbf{c}\| \, |\cos \theta|$$

$$= |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$$

onde a última igualdade decorre do Teorema (14.19).

O número $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ considerado no Exemplo 4 é chamado **produto misto** de **a**, **b** e **c**. Este número pode expressar-se como um determinante de ordem 3 que envolve os componentes dos três vetores (ver Exercício 21).

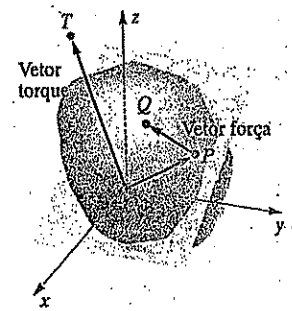


Figura 14.44

Os produtos vetoriais são utilizados no estudo de efeitos rotacionais produzidos por forças. Suponhamos que uma força $\overrightarrow{PQ}$ atue em um ponto P de um objeto, conforme ilustrado na Figura 14.44, onde superpusemos um sistema coordenado xyz. A força tende a fazer o objeto girar em torno de uma reta por O perpendicular ao plano determinado por $\overrightarrow{PQ}$ e pelo vetor posição $\overrightarrow{OP}$ de P. O **vetor torque** $\overrightarrow{OT}$ da força (também chamado **momento de $\overrightarrow{PQ}$ em relação a O**) é definido como

$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{PQ}$$

Em física e mecânica, $\overrightarrow{OT}$ indica tanto o módulo como a direção do efeito rotacional induzido pela força $\overrightarrow{PQ}$. Se $\overrightarrow{OP}$ representa o pegador de uma chave inglesa e $\overrightarrow{PQ}$ é a força aplicada à extremidade do pegador, então $\overrightarrow{OT}$ aponta na direção em que um parafuso (direto) se move quando se faz girar a chave inglesa.

Os produtos vetoriais têm também aplicação na teoria dos campos eletromagnéticos. Para ilustrar, consideremos um **dípolo elétrico**, ou seja, duas cargas pontuais $+q$ e $-q$ sempre à distância constante d uma da outra. Se $\mathbf{d}$ é o vetor exibido na Figura 14.45(i), então $\|\mathbf{d}\| = d$ e o **momento dípolo elétrico** $\mathbf{p}$ se define como $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$. Suponhamos, conforme ilustrado na Figura 14.45(ii), que o dípolo elétrico esteja colocado em um campo eletromagnético onde todo vetor força $\mathbf{E}$ tem mesmo módulo e mesma direção. O dípolo elétrico tende a rotar até ficar alinhado com a direção do campo, isto é, o ângulo θ entre $\mathbf{d}$ e $\mathbf{E}$ tenderá para 0. O torque $\mathbf{T}$ causado por $\mathbf{E}$ em P é dado por $\mathbf{T} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$, e o trabalho realizado por $\mathbf{E}$ no processo de alinhamento é $W = \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$.

No Capítulo 15 estudaremos outras interpretações do produto vetorial.

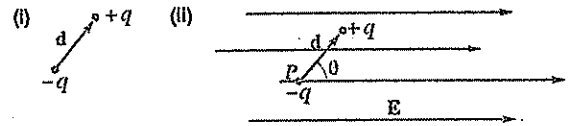


Figura 14.45

EXERCÍCIOS 14.4

Exercs. 1-10: Ache $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

1 $\mathbf{a} = \langle 1, -2, 3\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, 1, -4\rangle$

2 $\mathbf{a} = \langle -5, 1, -1\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 3, 6, -2\rangle$

3 $\mathbf{a} = \langle 0, 1, 2\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 1, 2, 0\rangle$

4 $\mathbf{a} = \langle 0, 0, 4\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -7, 1, 0\rangle$

5 $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + \mathbf{k}$

6 $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

7 $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 8\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 9\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$

8 $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 8\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 5\mathbf{j}$

9 $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

10 $\mathbf{a} = 3\mathbf{i}$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{k}$

Exercs. 11-12: Use o produto vetorial para mostrar que $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são paralelos.

11 $\mathbf{a} = \langle -6, -10, 4\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 3, 5, -2\rangle$

12 $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 12\mathbf{k}$

Exercícios 13-14: Sejam $\mathbf{a} = \langle 2, 0, -1\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -3, 1, 0\rangle$, $\mathbf{c} = \langle 1, -2, 4\rangle$.

13 Ache $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ e $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$.

14 Ache $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} - \mathbf{c})$ e $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$.

Exercs. 15-18: (a) Ache um vetor perpendicular ao plano definido por P, Q e R. (b) Ache a área do triângulo PQR.

15 $P(1, -1, 2)$, $Q(0, 3, -1)$, $R(3, -4, 1)$

16 $P(-3, 0, 5)$, $Q(2, -1, -3)$, $R(4, 1, -1)$

17 $P(4, 0, 0)$, $Q(0, 5, 0)$, $R(0, 0, 2)$

18 $P(-1, 2, 0)$, $Q(0, 2, -3)$, $R(5, 0, 1)$

Exercs. 19-20: Ref. Exemplo 3. Ache a distância de P à reta por Q e R.

19 $P(3, 1, -2)$, $Q(2, 5, 1)$, $R(-1, 4, 2)$

20 $P(-2, 5, 1)$, $Q(3, -1, 4)$, $R(1, 6, -3)$

21 Se $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$, $\mathbf{c} = \langle c_1, c_2, c_3\rangle$, prove que

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Exercs. 22-23: Use o Exemplo 4 e o Exercício 21 para achar o volume da caixa de lados adjacentes AB, AC e AD.

22 $A(0, 0, 0)$, $B(1, -1, 2)$, $C(0, 3, -1)$, $D(3, -4, 1)$

23 $A(2, 1, -1)$, $B(3, 0, 2)$, $C(4, -2, 1)$, $D(5, -3, 0)$

24 Se $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ são representados por vetores com ponto inicial comum, mostre que $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0$ se e somente se os vetores são coplanares.

25 Prove que $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0$ para todos os vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.

26 Se $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ e $\mathbf{a} \neq 0$, isto implica $\mathbf{b} = \mathbf{c}$? Explique

27 Seja $\mathbf{a} \neq 0$. Se $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ e $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$, prove que $\mathbf{b} = \mathbf{c}$.

Exercs. 28-31: Prove a propriedade, se $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$, $\mathbf{c} = \langle c_1, c_2, c_3\rangle$, e m é um escalar.

28 $(m\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = m(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (m\mathbf{b})$

29 $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

30 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

31 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$

Exercs. 32-37: *Sem utilizar componentes de vetores, verifique que:*

32 $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 2(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$

33 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$

(*Sugestão:* Use (vi) do Teorema (14.33).)

34 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}$

35 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} \end{vmatrix}$

36 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{d})\mathbf{c} - (\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{d}$

37 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c})^2$

14.5 RETAS E PLANOS

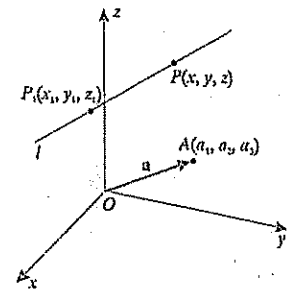


Figura 14.46

Nesta seção estudaremos retas e planos com o auxílio dos conceitos vetoriais de *paralelismo* e *ortogonalismo*. Admitiremos que todas as retas e planos estejam em um sistema coordenado xyz.

Sejam $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ um vetor não-nulo em V_3, $P_1(x_1, y_1, z_1)$ um ponto arbitrário e $\overrightarrow{OA}$ o vetor posição de $\mathbf{a}$. De acordo com a Figura 14.46, descrevemos a reta l por $P_1(x_1, y_1, z_1)$ paralela a $\mathbf{a}$ como o conjunto de todos os pontos $P(x, y, z)$ tais que $\overrightarrow{P_1P}$ seja paralelo a $\overrightarrow{OA}$, isto é,

$$\overrightarrow{P_1P} = t\overrightarrow{OA} \text{ para um escalar } t.$$

Em termos de vetores V_3,

$$\langle x - x_1, y - y_1, z - z_1\rangle = t\langle a_1, a_2, a_3\rangle = \langle a_1 t, a_2 t, a_3 t\rangle$$

Igualando componentes e resolvendo em relação a x, y, z, temos

$$x = x_1 + a_1t,\ y = y_1 + a_2t,\ z = z_1 + a_3t,$$

onde t é um número real. Estas equações são as *equações paramétricas* da reta l, com t como parâmetro. Obtêm-se os pontos $P(x, y, z)$ de l fazendo t tomar todos os valores reais.

Acabamos de provar o seguinte:

Teorema (14.34)

As equações paramétricas da reta por $P_1(x_1, y_1, z_1)$ paralela a $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ são

$$x = x_1 + a_1t,\ y = y_1 + a_2t,\ z = z_1 + a_3t;\ t \text{ em } \mathbb{R}$$

Note que os coeficientes de t em (14.34) são os componentes do vetor a. Podemos obter a mesma reta utilizando qualquer vetor não-nulo que seja paralelo a a, pois, nesse caso, $\mathbf{b} = c\mathbf{a} = \langle ca_1, ca_2, ca_3 \rangle$ e as equações paramétricas da reta são

$$x = x_1 + (ca_1)v,\ y = y_1 + (ca_2)v,\ z = z_1 + (ca_3)v;\ v \text{ em } \mathbb{R}.$$

Estas equações determinam a mesma reta, pois podemos obter o ponto dado por t fazendo $v = t/c$.

EXEMPLO 1

(a) Escreva equações paramétricas da reta l por $P(5, -2, 4)$ e paralela a $\mathbf{a} = \langle \frac{1}{2}, 2, -\frac{2}{3} \rangle$.

(b) Onde l intercepta o plano-xy?

(c) Trace o vetor posição de a e a reta l.

SOLUÇÃO

(a) Para evitar frações, utilizaremos o vetor $\mathbf{b} = 6\mathbf{a} = \langle 3, 12, -4 \rangle$ em lugar de a. Aplicando o Teorema (14.34), obtemos as seguintes equações paramétricas para l:

$$x = 5 + 3t,\ y = -2 + 12t,\ z = 4 - 4t;\ t \text{ em } \mathbb{R}$$

(b) A reta intercepta o plano-xy no ponto $R(x, y, z)$ se $z = 4 - 4t = 0$ (isto é, se $t = 1$). Fazendo $t = 1$ nas equações paramétricas da parte (a), obtemos as coordenadas x e y de R, a saber:

$$x = 5 + 3(1) = 8 \quad \text{e} \quad y = -2 + 12(1) = 10$$

Logo R é o ponto de coordenadas (8, 10, 0).

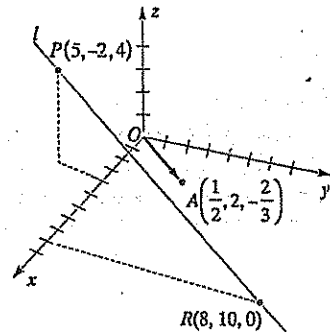


Figura 14.47

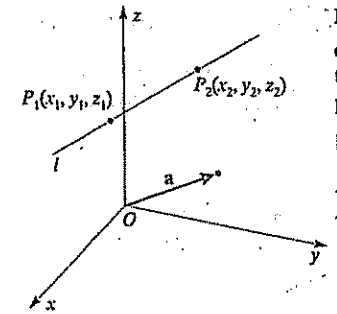


Figura 14.48

(c) A Figura 14.47 exibe o vetor posição $\overrightarrow{OA}$ de a. A reta l pode ser traçada tomando-se o ponto dado $P(5, -2, 4)$ e o ponto $R(8, 10, 0)$ obtido na parte (b).

Para achar as equações paramétricas da reta que passa por dois pontos arbitrários $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$, conforme Figura 14.48, utilizamos o vetor a que corresponde a $\overrightarrow{P_1P_2}$ – isto é,

$$\mathbf{a} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$$

Substituindo no Teorema (14.34), obtemos as equações paramétricas

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t,\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t,$$

$$z = z_1 + (z_2 - z_1)t;\ t \text{ em } \mathbb{R}$$

Note que $t = 0$ dá o ponto P_1, $t = \frac{1}{2}$ o ponto médio de P_1P_2 e $t = 1$ o ponto P_2. De modo geral, ao variar t de 0 a 1, o ponto $P(x, y, z)$ traça o segmento P_1P_2. Outros valores de t nos dão diferentes pontos de l.

EXEMPLO 2

Ache as equações paramétricas da reta l por $P_1(3, 1, -2)$ e $P_2(-2, 7, -4)$.

SOLUÇÃO

O vetor a em V_3 correspondente a $\overrightarrow{P_1P_2}$ é

$$\mathbf{a} = \langle -2 - 3, 7 - 1, -4 + 2 \rangle = \langle -5, 6, -2 \rangle$$

Aplicando o Teorema (14.34), obtemos as equações paramétricas de l:

$$x = 3 - 5t,\ y = 1 + 6t,\ z = -2 - 2t;\ t \text{ em } \mathbb{R}$$

EXEMPLO 3

Sejam as retas l_1 e l_2 parametrizadas respectivamente por

$$x = -2 + 3t,\ y = 5 - 4t,\ z = 1 + 2t;\ t \text{ em } \mathbb{R}$$

$$x = 1 - v,\ y = 3 + 2v,\ z = -4 - 3v;\ v \text{ em } \mathbb{R}$$

Determine se l_1 e l_2 se interceptam e, em caso afirmativo, determine o ponto de intersecção.

SOLUÇÃO

As retas se interceptam se existem valores de t (para l_1) e v (para l_2) que dêem o mesmo ponto $P(x, y, z)$. Consideramos, pois, o seguinte sistema de três equações em duas variáveis:

$$\begin{cases} -2 + 3t = 1 - v \\ 5 - 4t = 3 + 2v \\ 1 + 2t = -4 - 3v \end{cases} \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad \begin{cases} 3t + v = 3 \\ -4t - 2v = -2 \\ 2t + 3v = -5 \end{cases}$$

Resolvendo simultaneamente as duas primeiras equações do sistema, obtemos $t = 2$ e $v = -3$. Levando na terceira equação, $2t + 3v = -5$, obtemos $2(2) + 3(-3) = -5$, ou $-5 = -5$. Como $t = 2$ e $v = -3$ é uma solução de cada uma das três equações, as retas se interceptam. Pode-se achar o ponto de intersecção fazendo-se $t = 2$ na parametrização de l_1 ou $v = -3$ na parametrização de l_2. Em qualquer caso obtemos o ponto $P(4, -3, 5)$.

É importante notar que, se a solução $t = 2$ e $v = -3$ das duas primeiras equações do sistema *não* satisfizessem a terceira equação, as retas não se interceptariam.

Na próxima definição utilizamos o ângulo entre dois vetores (ver (14.18)) para definir o ângulo de duas retas. Utilizamos vetores também para definir retas paralelas e retas ortogonais.

Definição (14.35)

Sejam l_1 e l_2 retas paralelas aos vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, e θ o ângulo entre $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ (ver Figura 14.49).

(i) Os ângulos entre l_1 e l_2 são θ e $\pi - \theta$.

(ii) As retas l_1 e l_2 são paralelas se e somente se $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são paralelos – isto é, se $\mathbf{b} = c\mathbf{a}$ para algum escalar c.

(iii) As retas l_1 e l_2 são ortogonais se e somente se $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são ortogonais – isto é, se $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

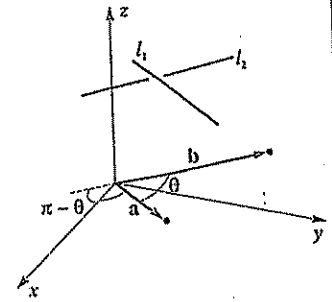


Figura 14.49

Note que o ângulo de l_1 e l_2 é definido, quer as retas se interceptem ou não.

EXEMPLO 4

Sejam as retas l_1 e l_2 com as respectivas parametrizações para t em $\mathbb{R}$:

$$x = 1 + 2t, y = 3 - 4t, z = -2 + t$$

$$x = -5 - t, y = 2 - 3t, z = 4 + 3t$$

Ache os ângulos entre l_1 e l_2.

SOLUÇÃO

Considerando os coeficientes de t, vemos que l_1 e l_2 são paralelas, respectivamente, a

$$\mathbf{a} = \langle 2, -4, 1 \rangle \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \langle -1, -3, 3 \rangle$$

Se θ é o ângulo entre $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, então, por (14.18),

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\|} = \frac{(2)(-1) + (-4)(-3) + (1)(3)}{\sqrt{4 + 16 + 1}\sqrt{1 + 9 + 9}} = \frac{13}{\sqrt{399}}$$

Logo, pela Definição (14.35), os ângulos entre l_1 e l_2 são dados por

$$\theta = \cos^{-1}\frac{13}{\sqrt{399}} \approx 0{,}86 \text{ rad} \approx 49°$$

$$\pi - \theta \approx 2{,}28 \text{ rad} \approx 131°$$

Conforme ilustrado na Figura 14.50, se $P_1(x_1, y_1, z_1)$ é um ponto de uma reta l, então o **plano por P_1 com normal l** é o conjunto de pontos de todas as retas l' ortogonais a l em P_1. Para obter uma definição equivalente empregando vetores, escolhamos outro ponto P_2 em l e consideremos o vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$ conforme Figura 14.50(ii). O **plano por P_1 com vetor normal $\overrightarrow{P_1P_2}$** se define como o conjunto de todos os pontos $P(x, y, z)$ tais que $\overrightarrow{P_1P}$ seja ortogonal a $\overrightarrow{P_1P_2}$.

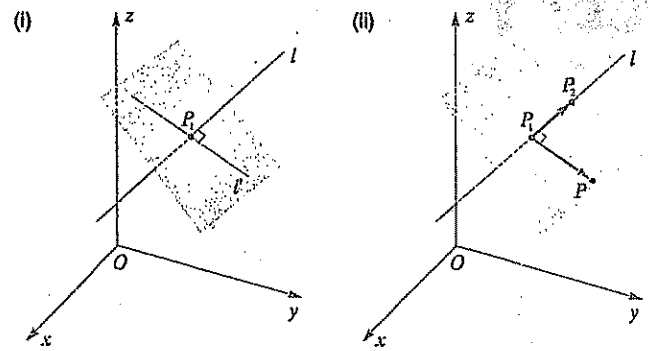


Figura 14.50

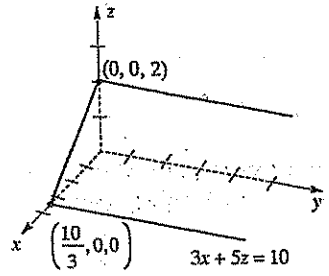


Figura 14.54

Um plano de equação da forma $by + cz + d = 0$ tem vetor normal $\mathbf{a} = \langle 0, b, c\rangle$ e é ortogonal ao plano-yz, pois $\mathbf{a} \cdot \mathbf{i} = 0$. Analogamente, os gráficos de $ax + by + d = 0$ e $ax + cz + d = 0$ são planos ortogonais aos planos xy e xz, respectivamente.

EXEMPLO 10

Esboce o gráfico do plano $3x + 5z = 10$.

SOLUÇÃO

O plano é ortogonal ao plano-xz e tem como intercepto-x $\frac{10}{3}$ e como intercepto-z 2. Note que o traço no plano-yz tem equação $5z = 10$, sendo, pois, uma reta paralela ao eixo-y com intercepto-z 2. Analogamente, o traço no plano-xy tem equação $3x = 10$, sendo, pois, uma reta paralela ao eixo-y com intercepto-x $\frac{10}{3}$. A Figura 14.54 exibe parte do gráfico mostrando os traços nos três planos coordenados.

As retas podem ser escritas como intersecções de planos. Se uma reta l é dada parametricamente como no Teorema (14.34) e se a_1, a_2, a_3 são diferentes de zero, podemos resolver cada equação em relação a t, obtendo

$$t = \frac{x - x_1}{a_1}, \quad t = \frac{y - y_1}{a_2}, \quad t = \frac{z - z_1}{a_3}$$

Segue-se que um ponto $P(x, y, z)$ pertence à reta l se e somente se são verificadas as seguintes equações, chamadas *equações simétricas* de l:

Equações simétricas de uma reta (14.39)

$$\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{a_2} = \frac{z - z_1}{a_3}$$

A forma simétrica das equações de uma reta não é única, pois podemos, em (14.39), utilizar três números b_1, b_2, b_3 proporcionais a a_1, a_2, a_3 e qualquer outro ponto l que não (x_1, y_1, z_1).

Se, em (14.39), tomamos as equações indicadas aos pares, digamos,

$$\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{a_2} \quad \text{e} \quad \frac{x - x_1}{a_1} = \frac{z - z_1}{a_3}$$

obtemos l como intersecção de dois planos, o primeiro ortogonal ao plano-xy e o segundo ortogonal ao plano-xz. Se um dos números a_1, a_2 ou a_3 é zero, já não podemos resolver cada equação de (14.34) em relação a t. Por exemplo, se $a_3 = 0$ e $a_1 a_2 \neq 0$, a terceira equação se reduz a $z = z_1$, podendo-se escrever a forma simétrica como

$$\frac{x - x_1}{a_2} = \frac{y - y_1}{a_2}, \quad z = z_1$$

que, novamente, expressa l como intersecção de dois planos – o primeiro, ortogonal ao plano-xy, e o segundo, $z = z_1$, paralelo ao plano-xy. A situação á análoga se $a_1 = 0$ ou $a_2 = 0$.

EXEMPLO 11

Escreva, em forma simétrica, as equações da reta por $P_1(3, 1, -2)$ e $P_2(-2, 7, -4)$.

SOLUÇÃO

Tal como no Exemplo 2, uma representação paramétrica da reta é

$$x = 3 - 5t, \; y = 1 + 6t, \; z = -2, -2t; \; t \text{ em } \mathbb{R}$$

Resolvendo cada equação em relação a t e igualando os resultados, obtemos a forma simétrica

$$\frac{x - 3}{-5} = \frac{y - 1}{6} = \frac{z + 2}{-2}$$

EXEMPLO 12

Seja l a reta de intersecção dos dois planos

$$2x - y + 4z = 4 \quad \text{e} \quad x + 3y - 2z = 1$$

Ache equações paramétricas de l.

SOLUÇÃO

Um ponto $P(x, y, z)$ pertence a l se e somente se P está em cada um dos planos – isto é, se e somente se (x, y, z) é solução do sistema de equações

$$\begin{cases} 2x - y + 4z = 4 \\ x + 3y - 2z = 1 \end{cases}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{cases} 2x - y = 4 - 4z \\ x + 3y = 1 + 2z \end{cases}$$

Encaremos as equações acima como um sistema de duas equações em x e y. Eliminando y do sistema, podemos exprimir x em

termos de z. Da mesma forma, eliminando x do sistema obtemos uma fórmula para y em termos de z. Este processo nos dá o sistema equivalente

$$\begin{cases} x = \frac{13}{7} - \frac{10}{7}z \\ y = -\frac{2}{7} + \frac{8}{7}z \end{cases}$$

Dando a z todos os valores reais t, obtemos as soluções do sistema – isto é, os pontos de l. São, pois, equações paramétricas de l:

$$x = \tfrac{13}{7} - \tfrac{10}{7}t,\ y = -\tfrac{2}{7} + \tfrac{8}{7}t,\ z = t;\ t \text{ em } \mathbb{R}$$

No próximo exemplo empregamos métodos vetoriais para achar a distância de um ponto a um plano.

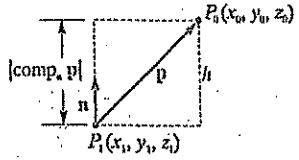


Figura 14.55

EXEMPLO 13

Ache uma fórmula da distância h de um ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ao plano $ax + by + cz + d = 0$.

SOLUÇÃO

Conforme Figura 14.55, seja $P_1(x_1, y_1, z_1)$ um ponto arbitrário do plano, e seja $\mathbf{n}$ um vetor normal ao plano. O vetor $\mathbf{p}$ correspondente a $\overrightarrow{P_1P_0}$ é

$$\mathbf{p} = \langle x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1 \rangle.$$

Referindo-nos à figura, vemos que

$$h = |\text{comp}_{\mathbf{n}}\, \mathbf{p}| = \left| \mathbf{p} \cdot \frac{1}{\|\mathbf{n}\|}\mathbf{n} \right|$$

Como $\langle a, b, c \rangle$ é um vetor normal ao plano, podemos fazer

$$\frac{1}{\|\mathbf{n}\|}\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\langle a, b, c \rangle$$

Conseqüentemente,

$$h = \left| \mathbf{p} \cdot \frac{1}{\|\mathbf{n}\|}\mathbf{n} \right| = \left| \frac{a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(c_0 - z_1)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$$

$$= \frac{|(ax_0 + by_0 + cz_0) + (-ax_1 - by_1 - cz_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Como P_1 pertence ao plano, (x_1, y_1, z_1) é uma solução de $ax + by + cz + d = 0$ e, então, $ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$, ou $d = -ax_1 - by_1 - cz_1$. Assim, podemos escrever a fórmula de h como

$$h = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Duas retas dizem-se reversas se não são paralelas nem se interceptam. Deduziremos no próximo exemplo uma fórmula para a menor distância entre duas retas reversas.

EXEMPLO 14

Ache uma fórmula para a menor distância d entre duas retas reversas l_1 e l_2.

SOLUÇÃO

Escolhamos pontos P_1, Q_1 em l_1 e P_2, Q_2 em l_2, conforme ilustrado na Figura 14.56. Pelo Teorema (14.29), $\overrightarrow{P_1Q_1} \times \overrightarrow{P_2Q_2}$ é ortogonal tanto a $\overrightarrow{P_1Q_1}$ como a $\overrightarrow{P_2Q_2}$ e, daí, um vetor *unitário* $\mathbf{n}$ ortogonal tanto a $\overrightarrow{P_1Q_1}$ como a $\overrightarrow{P_2Q_2}$ é

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\|\overrightarrow{P_1Q_1} \times \overrightarrow{P_2Q_2}\|}(\overrightarrow{P_1Q_1} \times \overrightarrow{P_2Q_2})$$

Consideremos planos por P_1 e P_2, respectivamente, tendo cada um vetor normal $\mathbf{n}$. Esses planos são paralelos e contêm l_1 e l_2, respectivamente. A distância d entre os planos é medida ao longo de uma reta paralela à normal comum $\mathbf{n}$, conforme exibido na figura. Segue-se que d é a menor distância entre l_1 e l_2. Além disso,

$$d = |\text{comp}_{\mathbf{n}}\overrightarrow{P_1P_2}| = |\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_1P_2}|$$

$$= \frac{1}{\|\overrightarrow{P_1Q_1} \times \overrightarrow{P_2Q_2}\|}|(\overrightarrow{P_1Q_1} \times \overrightarrow{P_2Q_2}) \cdot \overrightarrow{P_1P_2}|$$

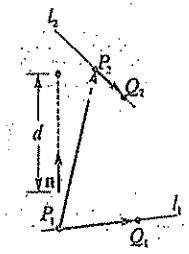


Figura 14.56

EXERCÍCIOS 14.5

Exercs. 1-4: Ache equações paramétricas da reta por P paralela a a.

1 $P(4, 2, -3)$; $\mathbf{a} = \langle \frac{1}{3}, 2, \frac{1}{2} \rangle$

2 $P(5, 0, -2)$; $\mathbf{a} = \langle -1, -4, 1 \rangle$

3 $P(0, 0, 0)$; $\mathbf{a} = \mathbf{j}$

4 $P(1, 2, 3)$; $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

Exercs. 5-8: Ache equações paramétricas da reta por P_1 e P_2. Determine (se possível) os pontos em que a reta intercepta cada um dos planos coordenados.

5 $P_1(5, -2, 4)$, $P_2(2, 6, 1)$

6 $P_1(-3, 1, -1)$, $P_2(7, 11, -8)$

7 $P_1(2, 0, 5)$, $P_2(-6, 0, 3)$

8 $P_1(2, -2, 4)$, $P_2(2, -2, -3)$

9 Se l tem equações paramétricas $x = 5 - 3t$, $y = -2 + t$, $z = 1 + 9t$, ache equações paramétricas da reta por $P(-6, 4, -3)$ paralela a l.

10 Ache equações paramétricas da reta por $P(4, -1, 0)$ paralela à reta por $P_1(-3, 9, -2)$ e $P_2(5, 7, -3)$.

Exercs. 11-14: Determine se as duas retas se interceptam; em caso afirmativo, ache o ponto de intersecção.

11 $x = 1 + 2t$, $y = 1 - 4t$, $z = 5 - t$
$x = 4 - v$, $y = -1 + 6v$, $z = 4 + v$

12 $x = 1 - 6t$, $y = 3 + 2t$, $z = 1 - 2t$
$x = 2 + 2v$, $y = 6 + v$, $z = 2 + v$

13 $x = 3 + t$, $y = 2 - 4t$, $z = t$
$x = 4 - v$, $y = 3 + v$, $z = -2 + 3v$

14 $x = 2 - 5t$, $y = 6 + 2t$, $z = -3 - 2t$
$x = 4 - 3v$, $y = 7 + 5v$, $z = 1 + 4v$

Exercs. 15-18: Dão-se as equações de duas retas l_1 e l_2. Ache o ângulo entre elas.

15 $x = 7 - 2t$, $y = 4 + 3t$, $z = 5t$
$x = -1 + 4t$, $y = 3 + 4t$, $z = 1 + t$

16 $x = 5 + 3t$, $y = 4 - t$, $z = 3 + 2t$
$x = -t$, $y = 1 - 2t$, $z = 3 + t$

17 $\frac{x-1}{-3} = \frac{y+2}{8} = \frac{z}{-3}$; $\frac{x+2}{10} = \frac{y}{10} = \frac{z-4}{-7}$

18 $\frac{x}{3} = \frac{y-2}{3} = z - 1$; $\frac{x+5}{4} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+7}{-9}$

Exercs. 19-26: Ache uma equação do plano que verifique as condições dadas.

19 Por $P(6, -7, 4)$ e paralelo (a) ao plano xy (b) ao plano yz (c) ao plano xz.

20 Por $P(-2, 5, -8)$ e com vetor normal (a) $\mathbf{i}$ (b) $\mathbf{j}$ (c) $\mathbf{k}$.

21 Por $P(-11, 4, -2)$ e com vetor normal $\mathbf{a} = 6\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

22 Por $P(4, 2, -9)$ com vetor normal $\overrightarrow{OP}$.

23 Por $P(2, 5, -6)$ e paralelo ao plano $3x - y + 2z = 10$.

24 Pela origem e paralelo ao plano $x - 6y + 4z = 7$

25 Por $P(-4, 1, 6)$ e com mesmo traço no plano-xz que o plano $x + 4y - 5z = 8$.

26 Pela origem e pelos pontos $P(0, 2, 5)$ e $Q(1, 4, 0)$.

Exercs. 27-28: Ache uma equação do plano por P, Q e R.

27 $P(1, 1, 3)$, $Q(-1, 3, 2)$, $R(1, -1, 2)$

28 $P(3, 2, 1)$, $Q(-1, 1, -2)$, $R(3, -4, 1)$

Exercs. 29-36: Esboce o gráfico da equação em um sistema coordenado xyz.

29 (a) $x = 3$ (b) $y = -2$ (c) $z = 5$

30 (a) $x = -4$ (b) $y = 0$ (c) $z = -\frac{2}{3}$

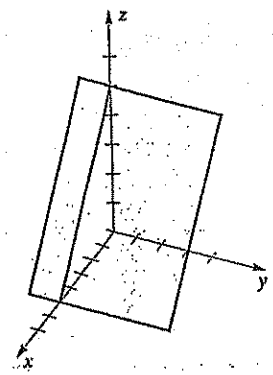
31 $2x + y - 6 = 0$ 32 $3x - 2z - 24 = 0$

33 $2y - 3z - 9 = 0$ 34 $5x + y - 4z + 20 = 0$

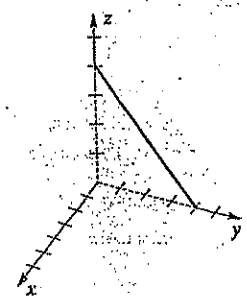
35 $2x - y + 5z + 10 = 0$ 36 $x + y + z = 0$

Exercs. 37-40: Ache uma equação do plano.

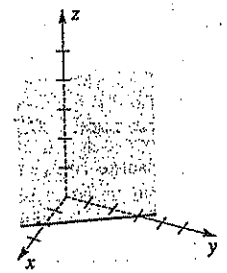
37



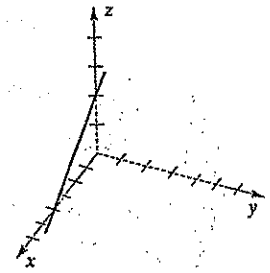
38



39



40



Exercs. 41-42: Ache a equação do plano por P e paralelo ao plano dado.

41 $P(1, 2, -3)$; $4x - y + 3z - 7 = 0$

42 $P(3, -2, 4)$; $-2x + 3y - z + 5 = 0$

Exercs. 43-46: Ache as equações simétricas da reta por P_1 e P_2.

43 $P_1(5, -2, 4)$, $P_2(2, 6, 1)$

44 $P_1(-3, 1, -1)$, $P_2(7, 11, -8)$

45 $P_1(4, 2, -3)$, $P_2(-3, 2, 5)$

46 $P_1(5, -7, 4)$, $P_2(-2, -1, 4)$

Exercs. 47-50: Ache equações paramétricas da reta de intersecção dos dois planos.

47 $x + 2y - 9z = 7$, $2x - 3y + 17z = 0$

48 $2x + 5y + 16z = 13$, $-x - 2y - 6z = -5$

49 $-2x + 3y + 9z = 12$, $x - 2y - 5z = -8$

50 $5x - y - 12z = 15$, $2x + 3y + 2z = 6$

Exercs. 51-52: Ref. Exemplo 13. Ache a distância de P ao plano.

51 $P(1, -1, 2)$; $3x - 7y + z - 5 = 0$

52 $P(3, 1, -2)$; $2x + 4y - 5z + 1 = 0$

Exercs. 53-54: Mostre que os dois planos são paralelos e ache a distância entre eles.

53 $4x - 2y + 6z = 3$, $-6x + 3y - 9z = 4$

54 $3x + 12y - 6z = -2$, $5x + 20y - 10z = 7$

Exercs. 55-56: Ref. Exemplo 14. Sejam l_1 a reta por A e B e l2 a reta por C e D. Ache a menor distância entre l_1 e l_2.

55 $A(1,-2,3)$, $B(2,0,5)$; $C(4,1,-1)$, $D(-2,3,4)$

56 $A(1,3,0)$, $B(0,4,5)$; $C(-2,-1,2)$, $D(5,1,0)$

Exercs. 57-58: Ache a equação do plano que contém o ponto P e a reta.

57 $P(5,0,2)$; $x=3t+1$, $y=-2t+4$, $z=t-3$

58 $P(4,-3,0)$; $x=t+5$, $y=2t-1$, $z=-t+7$

Exercs. 59-60: Use o produto escalar para achar a distância de A à reta por B e C.

59 $A(2,-6,1)$; $B(3,4,-2)$, $C(7,-1,5)$

60 $A(1,5,0)$; $B(-2,1,-4)$, $C(0,-3,2)$

Exercs. 61-62: Ache a distância do ponto P à reta.

61 $P(2,1,-2)$; $x=3-2t$, $y=-4+3t$, $z=1+2t$

62 $P(3,1,-1)$; $x=1+4t$, $y=3-t$, $z=3t$

Exercs. 63-64: Se um plano tem interceptos não-nulos a, b e c sobre os eixos x, y e z, respectivamente, então sua equação sob *forma-intercepto* é

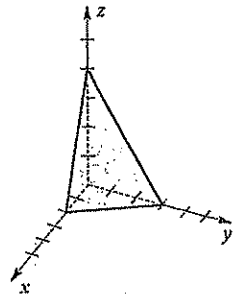
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

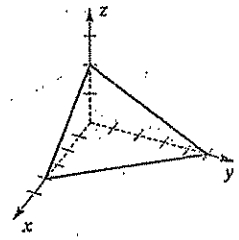
Ache a equação do plano na forma-intercepto.

63 $10x-15y+6z=30$

64 $12x+15y-20z=60$

Exercs. 65-66: Ache uma equação do plano na forma $Ax+By+Cz=D$.





Exercs. 67-68: Grafe f e g no mesmo plano coordenado, para $-2 \le x \le 2$. (a) Estime as coordenadas de seu ponto P de intersecção. (b) Aproxime os ângulos entre as tangentes aos gráficos em P.

67 $f(x)=\text{sen}\,(x^2)$, $g(x)=\cos x-x$

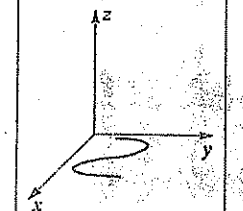
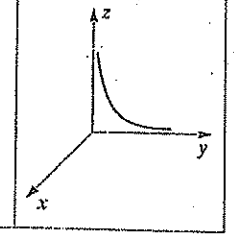
68 $f(x)=1-3x+x^3$, $g(x)=x^5+\frac{1}{2}$

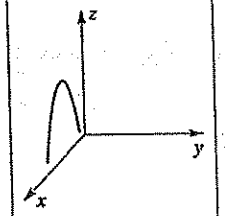
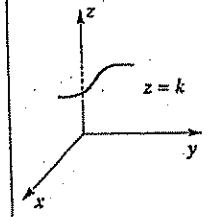
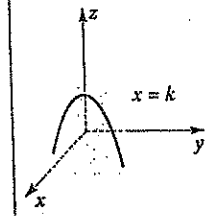
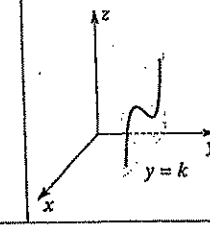
14.6 SUPERFÍCIES

Para esboçar uma superfície com lápis e papel, em geral escolhemos os eixos coordenados como na Figura 14.21, com os eixos y e z no plano do papel e o eixo x projetando-se para fóra deste. Esta técnica é ilustrada nas Figuras 14.57 – 14.67 e nos gráficos desta seção. Uma desvantagem deste tipo de escolha de eixos é que, quando se traça o gráfico de uma equação específica, a forma da superfície resultante pode ficar distorcida. Por exemplo, secções circulares podem parecer elipses e vice-versa. Por esta razão, os gráficos em três dimensões ilustrados mais

adiante são gerados por computador, com eixos e unidades de distância escolhidos de maneira a proporcionar uma visão não distorcida da superfície. Nesse *sistema axonométrico*, nenhum dos planos coordenados coincide com o plano do papel. Após estudar cuidadosamente esta seção e ser capaz de identificar uma superfície a partir de sua equação, você deve procurar adquirir proficiência na escolha do sistema de eixos coordenados.

Na seção precedente definimos o *traço* do gráfico de uma equação linear em um plano coordenado. De modo mais geral, se S é uma superfície (isto é, o gráfico de uma equação em x, y, z), então o traço de S em um plano é a intersecção de S com o plano. Para esboçar uma superfície, utilizamos traços. Revestem-se de especial importância os traços nos planos coordenados. Estes três traços são: O traço-xy, o traço-yz e o traço-xz. Às vezes, é conveniente também determinar traços em planos paralelos aos planos coordenados. Mostramos a seguir como obter equações de traços a partir da equação de uma superfície. O traço esboçado é apenas uma das possibilidades. Em problemas típicos o traço pode ser uma secção cônica, uma reta, ou uma outra curva. Por vezes, *não há* traço, ou seja, a superfície não intercepta um plano dado.

Traço	Para Achar a Equação do Traço	Esboço do Traço
Traço-xy	Fazer $z=0$	
Traço-yz	Fazer $x=0$	

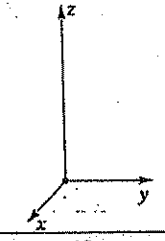
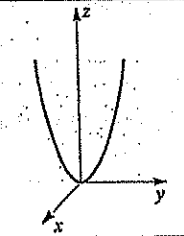
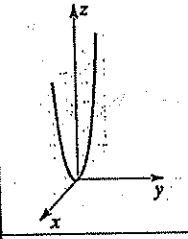
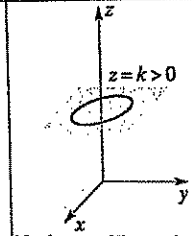
Traço	Para Achar a Equação do Traço	Esboço do Traço
Traço-xz	Fazer $y = 0$	
Em $z = k$	Fazer $z = k$	
Em $x = k$	Fazer $x = k$	
Em $y = k$	Fazer $y = k$	

EXEMPLO 1

Esboce o gráfico de $z = x^2 + y^2$.

SOLUÇÃO

O gráfico é uma superfície em um sistema coordenado xyz. Dão-se a seguir os traços sobre diversos planos.

Traço	Equação do Traço	Natureza do Traço	Esboço do Traço
Traço-xy	$0 = x^2 + y^2$	Origem	
Traço-yz	$z = y^2$	Parábola	
Traço-xz	$z = x^2$	Parábola	
Em $z = k$	$k = x^2 + y^2$, ou $x^2 + y^2 = k$	Círculo, ponto, ou nenhum gráfico	 Nenhum gráfico se $k < 0$

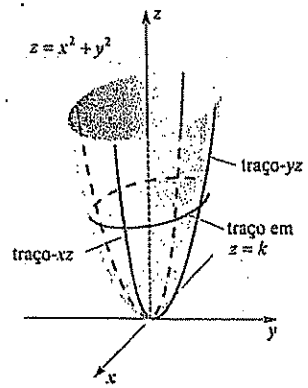


Figura 14.57

Esboçamos a seguir esses traços utilizando apenas *um* conjunto de eixos coordenados. Notando que o raio $\sqrt{k}$ do traço circular em $z = k$ aumenta com z, somos levados ao esboço da Figura 14.57.

Os traços nos planos $x = k$ e $y = k$ são parábolas. A título de ilustração, o traço no plano $y = 1$ é a parábola $z = x^2 + 1$, e o traço no plano $x = 2$ é a parábola $z = y^2 + 4$. Não esboçaremos esses traços, pois os traços circulares sobre $z = k$ são suficientes para indicar o gráfico. A superfície deste exemplo pode ser considerada como tendo sido gerada pela revolução do gráfico da parábola $z = y^2$ no plano-yz em torno do eixo-z. Esta superfície é chamada **paraboloide de revolução (ou paraboloide circular).**

Até aqui você pode ter considerado um cilindro como um objeto em forma de uma lata com seções transversas circulares. A próxima definição mostra que, na realidade, os cilindros podem apresentar uma variedade de formas.

Definição (14.40)

Sejam C uma curva em um plano, e l uma reta que não está em um plano paralelo. O conjunto de todas as retas paralelas a l e que interceptam C é um **cilindro.**

A Figura 14.58 ilustra dois exemplos de cilindros. A curva C do plano é chamada **diretriz** do cilindro, e cada reta por C paralela a l é uma **geratriz** do cilindro. O cilindro da Figura 14.58(i) é um **cilindro circular reto**, obtido quando C é um círculo em um plano e l é uma reta perpendicular ao plano. Embora o cilindro apareça limitado na figura, as geratrizes se prolongam indefinidamente. Como se vê em (ii) da figura, *a diretriz C não é necessariamente uma curva fechada.*

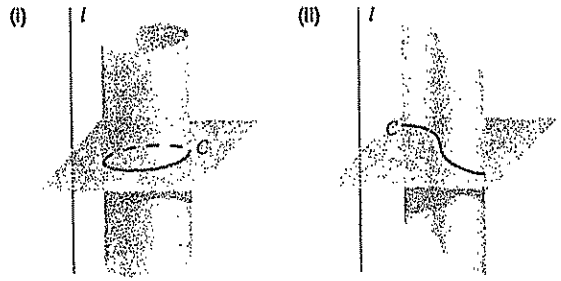


Figura 14.58

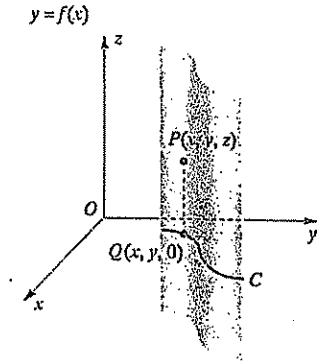


Figura 14.59

Consideremos um cilindro cuja diretriz C está no plano-xy e tem como equação $y = f(x)$ para alguma função f. Suponhamos também que as geratrizes sejam paralelas ao eixo-z. Conforme Figura 14.59, um ponto $P(x, y, z)$ está no cilindro se e somente se $Q(x, y, 0)$ está em C – isto é, se e somente se as duas primeiras coordenadas x e y de P verificam a equação $y = f(x)$. Assim, a equação do cilindro é $y = f(x)$, que é a mesma equação da diretriz no plano-xy.

EXEMPLO 2

Esboce o gráfico de $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ em três dimensões.

SOLUÇÃO

Pelas observações anteriores, o gráfico é um cilindro de geratrizes paralelas ao eixo-z. Começamos por esboçar o gráfico da equação $(x^2/4) + (y^2/9) = 1$ no plano-xy. Esta elipse é uma diretriz C do cilindro. Todos os traços em planos paralelos ao plano-xy são elipses congruentes com esta diretriz. Ao esboçar um cilindro, costumamos grafar ao menos dois traços, conforme indicado na Figura 14.60. Como a diretriz é uma elipse, chamamos esta superfície um **cilindro elíptico.**

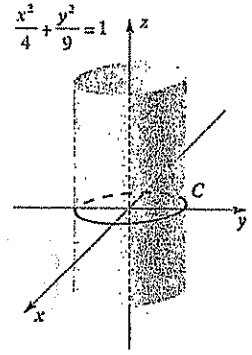


Figura 14.60

O gráfico de uma equação que contém apenas as variáveis y e z é um cilindro de geratrizes paralelas ao eixo-x, e cujo traço (diretriz) no plano-yz é o gráfico da equação dada. Analogamente, o gráfico de uma equação que não contém a variável y é um cilindro de geratrizes paralelas ao eixo-y e cuja diretriz é o gráfico da equação dada no plano-xz.

EXEMPLO 3

Esboce o gráfico das seguintes equações em três dimensões:

(a) $y^2 = 9 - z$ (b) $z = \operatorname{sen} x$

SOLUÇÃO

(a) O gráfico de $y^2 = 9 - z$ é um cilindro de geratrizes paralelas ao eixo-x. Uma diretriz no plano-yz é a parábola $y^2 = 9 - z$. A Figura 14.61 representa parte do gráfico (um **cilindro parabólico**).

(b) O gráfico de $z = \operatorname{sen} x$ é um cilindro de geratrizes paralelas ao eixo-y e cuja diretriz no plano-xz é a curva $z = \operatorname{sen} x$. A Figura 14.62 é o esboço de uma parte do gráfico.

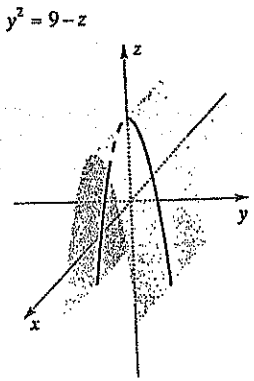


Figura 14.61

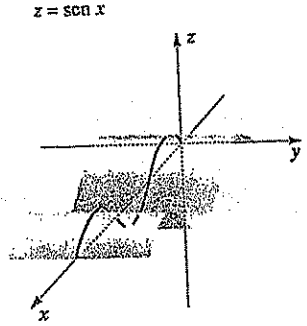


Figura 14.62

No Capítulo 12 vimos que, em duas dimensões, o gráfico de qualquer equação do segundo grau x e y,

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

é uma secção cônica (salvo em casos degenerados). Em três dimensões, o gráfico de uma equação de segundo grau em x, y, z,

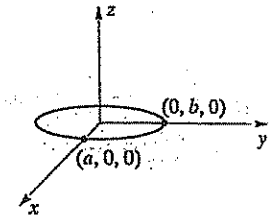
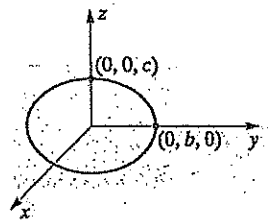
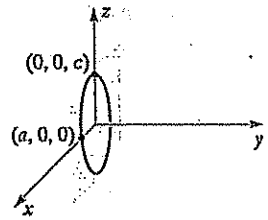
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

é uma **superfície quádrica** (salvo em casos degenerados). Por simplicidade, limitaremos nosso estudo ao caso em que os coeficientes D, E, F, G, H e I são todos zero. As equações mais gerais podem reduzir-se a este caso mediante translações e rotações adequadas de eixos.

Há três tipos de superfícies quádricas: *elipsóides, hiperboloides* e *paraboloides*. Os nomes se devem ao fato de que os traços em planos paralelos aos planos coordenados são em geral elipses, hipérboles e parábolas, respectivamente. No restante desta seção (a menos que se indique o contrário), a, b e c denotarão números reais positivos. O gráfico da equação seguinte é um elipsóide. O quadro abaixo indica os traços desta superfície nos planos coordenados.

Elipsóide (14.41)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Traço	Equação do Traço	Descrição do Traço	Esboço do Traço
Traço-xy	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	Elipse	
Traço-yz	$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	Elipse	
Traço-xz	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	Elipse	

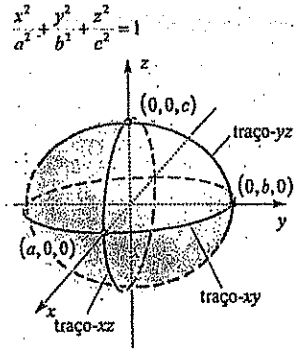


Figura 14.63

Esboçaremos a seguir estes traços utilizando apenas *um* conjunto de eixos coordenados, conforme ilustrado na Figura 14.63. Uma vez que você esteja familiarizado com superfícies quádricas, estes três traços serão suficientes para um esboço preciso do gráfico. Entretanto, para completar nosso estudo, consideraremos traços em planos paralelos aos planos coordenados.

Para achar o traço em um plano $z = k$ paralelo ao plano-xy fazemos $z = k$ na equação do elipsóide, obtendo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2}$$

Se $|k| > c$, então $1 - (k^2/c^2) < 0$ e não há gráfico. Assim, o gráfico de (14.41) está entre os planos $z = -k$ e $z = k$. Se $|k| < c$, então $1 - (k^2/c^2) > 0$ e assim o traço no plano $z = k$ é uma elipse,

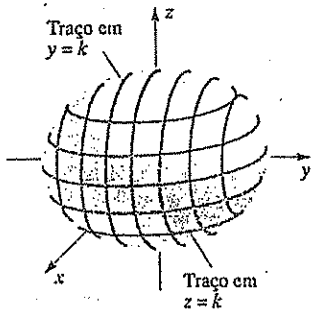


Figura 14.64

conforme Figura 14.64. A figura exibe também partes de outros traços em planos paralelos ao plano-xy.

O traço em um plano $y = k$ paralelo ao plano-xz é

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{b^2}$$

A Figura 14.64 exibe vários desses traços (elipses) para $-b < k < b$.

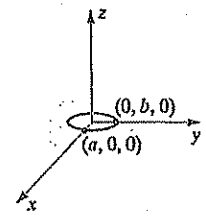
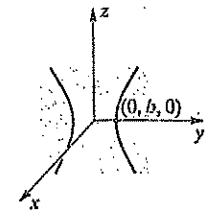
Finalmente, fazendo $x = k$ para $-a < k < a$, vemos que o traço em um plano paralelo ao plano-yz é uma elipse. (A Figura 14.64 não exibe essas elipses.)

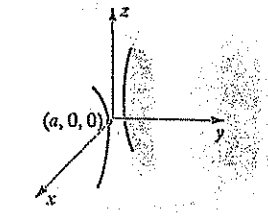
Note que se $a = b = c$, então o gráfico de (14.41) é uma esfera de raio a com centro na origem.

O gráfico da equação seguinte é um *hiperbolóide de uma folha*. O quadro abaixo indica os traços nos planos coordenados.

Hiperbolóide de uma folha
(14.42)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Traço	Equação do Traço	Descrição do Traço	Esboço do Traço
Traço-xy	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	Elipse	
Traço-yz	$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	Hipérbole	

Traço	Equação do Traço	Descrição do Traço	Esboço do Traço
Traço-xz	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	Hipérbole	

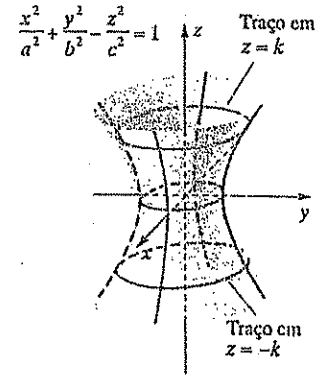


Figura 14.65

Estes traços estão delineados na Figura 14.65 em um conjunto de eixos coordenados. O eixo-z é o eixo do hiperbolóide.

O traço no plano $z = k$ paralelo ao plano-xy é

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2}$$

que é uma elipse. Quando k aumenta passando por valores positivos, os comprimentos dos eixos da elipse também aumentam.

Os traços em planos $x = k$ ou $y = k$ (isto é, em planos paralelos ao plano-yz ou ao plano-xz, respectivamente) são hipérboles (verifique!).

Os gráficos de

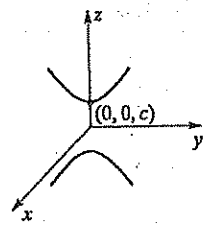
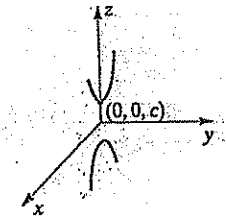
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{e} \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

são também hiperbolóides de uma folha; entretanto, no primeiro caso, o eixo do hiperbolóide é o eixo-y, e no segundo caso o eixo do hiperbolóide coincide com o eixo-x. Assim, o termo negativo nessas equações indica o eixo do hiperbolóide.

Damos a seguir um tipo diferente de hiperbolóide.

Hiperbolóide de duas folhas
(14.43)

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Traço	Equação do Traço	Descrição do Traço	Esboço do Traço
Traço - xy	$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	Nenhuma	Não há gráfico
Traço - yz	$-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	Hipérbole	
Traço - xz	$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	Hipérbole	

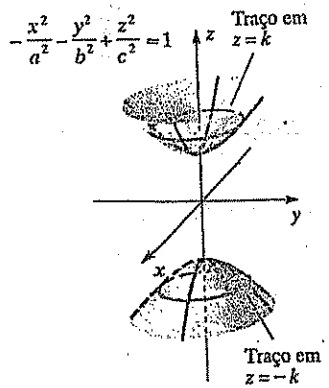


Figura 14.66

A Figura 14.66 exibe estes traços em um conjunto de eixos, onde também se exibem traços nos planos $z=k$ e $z=-k$ para $k>c$. (Verifique que estes traços são elipses se $a \neq b$.) Os traços em planos paralelos ao plano-yz ou ao plano-xz são hipérboles. O eixo-z é o eixo do hiperbolóide.

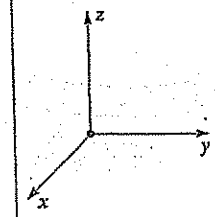
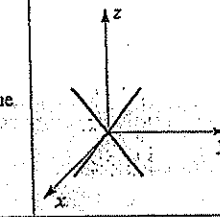
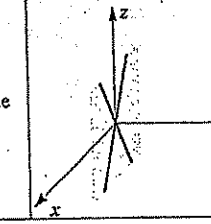
Tomando diferentes termos com o sinal "menos", obtemos um hiperbolóide de duas folhas cujo eixo é o eixo-x ou o eixo-y. (Que termos devem ser negativos?)

Um *cone* (de duas folhas) pode ser encarado como um hiperbolóide degenerado obtido pela substituição de 1 por 0 em (14.42) ou (14.43). Isto nos dá a seguinte equação.

Cone (14.44)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

Conforme indicado no quadro abaixo, o traço-yz e o traço-xz são as retas $z=\pm(c/b)y$ e $z=\pm(c/a)x$, respectivamente.

Traço	Equação do Traço	Natureza do Traço	Esboço do Traço
Traço-xy	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	Origem	
Traço-yz	$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	Duas retas que se cortam	
Traço-xz	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	Duas retas que se cortam	

O traço em um plano $z=k$ paralelo ao plano-xy tem a equação

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{k^2}{c^2}$$

logo, é uma elipse. Os traços nos planos paralelos aos outros eixos coordenados são hipérboles. A Figura 14.67 é um esboço do gráfico. O eixo-z é o eixo do cone.

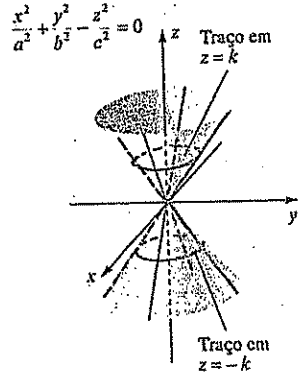


Figura 14.67

O gráfico da próxima equação, para c positivo ou negativo, é um *parabolóide*.

Parabolóide (14.45)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz$$

O Exemplo 1 é um caso especial de (14.45) com $a=b=c=1$. Se $c>0$, o gráfico de (14.45) é análogo ao exibido na Figura 14.57; se, entretanto, $a \neq b$, então os traços nos planos $z=k$ paralelos ao plano-xy são elipses em lugar de círculos. Se $c<0$, o parabolóide *abre para baixo*. O eixo-z é o **eixo do parabolóide**. Os gráficos das equações

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=cy \quad \text{e} \quad \frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=cx$$

são parabolóides cujos eixos são o eixo-y e o eixo-x, respectivamente. Trocando o sinal de um dos termos do membro esquerdo de (14.45), obtemos um *parabolóide hiperbólico*.

Parabolóide hiperbólico (14.46)

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=cz$$

A Figura 14.68 mostra um parabolóide típico em forma de sela, para o caso $c>0$. Obtêm-se variações permutando-se x, y e z em (14.46). O parabolóide hiperbólico é a superfície quádrica mais difícil de visualizar, e o traçado do seu gráfico exige considerável prática. Podem ser de utilidade traços do tipo

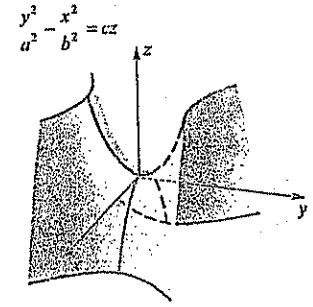


Figura 14.68

apresentado na Figura 14.68. Note que o traço no plano-xy tem por equação

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=0 \quad \text{ou} \quad y=\pm\frac{a}{b}x$$

e, então, representa um par de retas que se interceptam na origem. Este traço não é apresentado na Figura 14.68.

Os dois próximos exemplos são casos especiais de superfícies quádricas.

EXEMPLO 4

Esboce o gráfico de $16x^2-9y^2+36z^2=144$, e identifique a superfície.

SOLUÇÃO

Dividindo por 144 ambos os membros da equação, obtemos

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{4}=1$$

Os traços nos planos coordenados são:

Traço	Equação do Traço	Descrição do Traço
Plano-xy	$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$	Hipérbole
Plano-yz	$\frac{z^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$	Hipérbole
Plano-xz	$\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$	Elipse

A Figura 14.69 exibe o gráfico, um hiperbolóide de uma folha tendo como eixo o eixo-y. Os traços em planos paralelos ao plano-xz são elipses, e os traços em planos paralelos ao plano-xy ou ao plano-yz são hipérboles.

$$16x^2 - 9y^2 + 36z^2 = 144$$

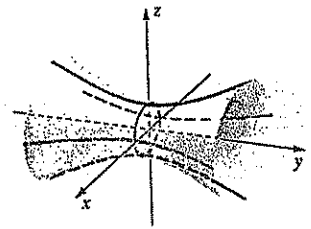


Figura 14.69

EXEMPLO 5

Trace o gráfico de $y^2 + 4z^2 = x$, e identifique a superfície.

SOLUÇÃO

Os traços são:

Traço	Equação do Traço	Descrição do Traço
Plano-xy	$y^2 = x$	Parábola
Plano-yz	$y^2 + 4z^2 = 0$	Origem
Plano-xz	$4z^2 = x$	Parábola

O traço em um plano $x = k$ paralelo ao plano-yz tem equação $y^2 + 4z^2 = k$, que é uma elipse se $k > 0$. Os traços nos planos paralelos ao plano-xz ou ao plano-xy são parábolas. A superfície, um paraboloide de eixo coincidindo com o eixo-x, é apresentada na Figura 14.70.

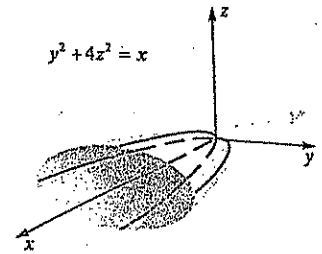


Figura 14.70

Obtém-se uma *superfície de revolução* fazendo-se uma curva plana C revolver em torno de uma reta (o eixo de revolução) no plano. No que segue, C estará sempre em um plano coordenado e o eixo de revolução será um dos eixos coordenados. Utilizaremos o símbolo $f(x, y)$ para uma expressão nas variáveis x e y. Neste caso, $f(a, b)$ denota o número obtido substituindo-se x por a e y por b. Esta notação será novamente abordada no Capítulo 16.

O gráfico da equação $f(x, y) = 0$ no plano-xy é uma curva C. (Interessa-nos aqui apenas o gráfico no plano-xy e não o gráfico tridimensional, que é um cilindro). Por simplicidade, suponhamos que x e y sejam não-negativos para todos os pontos (x, y) em C, e denotemos por S a superfície obtida fazendo-se C revolver em torno do eixo-y, conforme ilustrado na Figura 14.71. Um ponto $P(x, y, z)$ está em S se e somente se $Q(x_1, y, 0)$ está em C e $x_1 = \sqrt{x^2 + z^2}$. Conseqüentemente, $P(x, y, z)$ está em S se e somente se $f(\sqrt{x^2 + z^2}, y) = 0$. Assim, para achar a equação de S, substituímos x na equação de C por $\sqrt{x^2 + z^2}$. Analogamente, se o gráfico de $f(x, y) = 0$ revolve em torno do eixo-x, a equação da superfície resultante se obtém substituindo-se y por $\sqrt{y^2 + z^2}$. Para algumas curvas que contêm pontos (x, y) com x ou y negativo, pode-se estender a discussão precedente substituindo x por $\pm\sqrt{x^2 + z^2}$ ou y por $\pm\sqrt{y^2 + z^2}$. Se, como no próximo exemplo, x ou y aparece apenas em potências pares, então esta discussão se torna desnecessária, pois o radical desaparece quando se simplifica a equação.

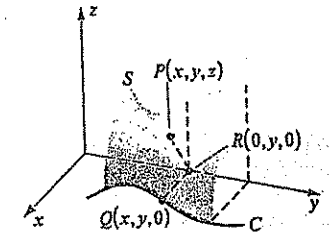


Figura 14.71 $C: f(x, y) = 0$.

EXEMPLO 6

O gráfico de $9x^2 + 4y^2 = 36$ gira em torno do eixo-y. Ache a equação da superfície resultante.

SOLUÇÃO

Achamos a equação da superfície substituindo x^2 por $x^2 + z^2$ o que dá

$$9(x^2 + z^2) + 4y^2 = 36$$

A superfície é um *elipsóide de revolução*. Dividindo ambos os membros por 36 e reagrupando os termos, obtemos

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$$

que é da forma em (14.41).

Estudo análogo vale para curvas no plano-yz ou no plano-xz. Por exemplo, fazendo-se uma curva C do plano-xz girar em torno do eixo-z, podemos achar a equação da superfície resultante substituindo x por $\sqrt{x^2 + y^2}$. Se C gira em torno do eixo-x, substituímos z por $\sqrt{y^2 + z^2}$.

Finalmente, note que as equações das superfícies de revolução se caracterizam pelo fato de duas das variáveis ocorrerem sempre em combinações como $x^2 + y^2$, $y^2 + z^2$ ou $x^2 + z^2$.

EXERCÍCIOS 14.6

Exercs. 1-8: Esboce o gráfico do cilindro em um sistema coordenado xyz.

1 $x^2+y^2=9$

2 $y^2+z^2=16$

3 $4y^2+9z^2=36$

4 $x^2+5z^2=25$

5 $x^2=9z$

6 $x^2-4y=0$

7 $y^2-x^2=16$

8 $xz=1$

Exercs. 9-20: Estabeleça a correspondência entre cada gráfico e uma das equações.

A. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$

B. $x=z^2+\frac{y^2}{4}$

C. $y^2+z^2-x^2=1$

D. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=0$

E. $z=\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}$

F. $z^2-\frac{x^2}{4}-y^2=1$

G. $\frac{z^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{4}=0$

H. $\frac{x^2}{4}-y^2-z^2=1$

I. $y=\frac{x^2}{4}-\frac{z^2}{9}$

J. $x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}=1$

K. $z=\frac{x^2}{9}+y^2$

L. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$

M. $y=\frac{z^2}{9}-\frac{x^2}{4}$

N. $y=\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{4}$

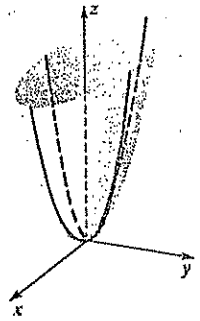
O. $z^2+\frac{x^2}{4}-y^2=1$

P. $\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{9}-\frac{y^2}{4}=0$

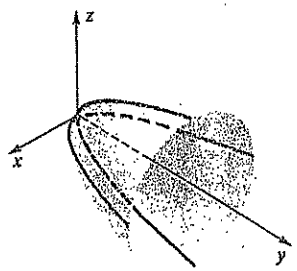
Q. $y^2-\frac{x^2}{4}-z^2=1$

R. $x^2+\frac{y^2}{4}-z^2=1$

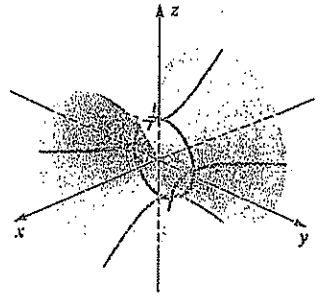
9



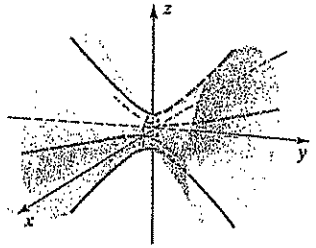
10



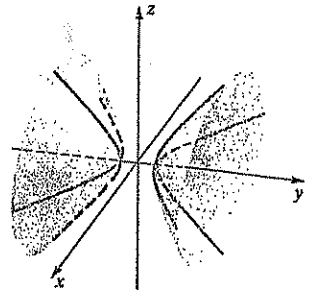
11



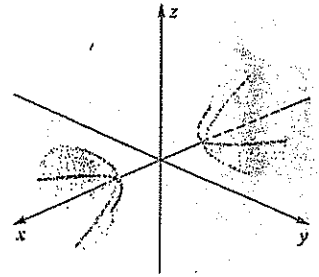
12



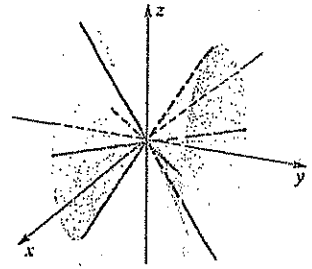
13



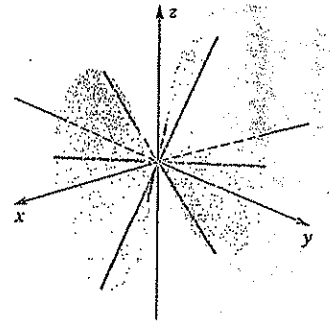
14



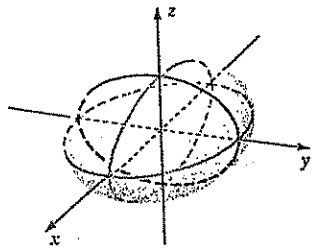
15



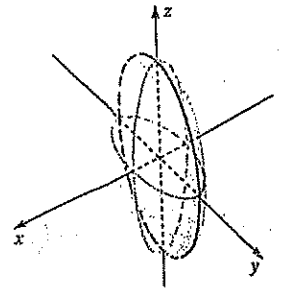
16



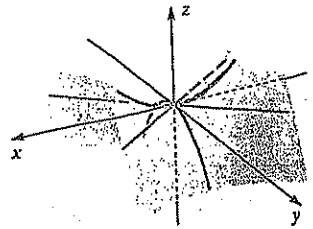
17



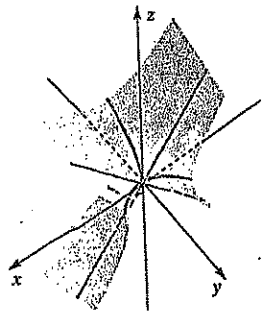
18



19



20



Exercs. 21-32: Trace o gráfico da superfície quádrica.

Elipsóides

21 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$ 22 $x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$

Hiperbolóide de uma folha

23 (a) $\frac{x^2}{4} + y^2 - z^2 = 1$ (b) $x^2 + \frac{z^2}{4} - y^2 = 1$

24 (a) $z^2 + x^2 - y^2 = 1$ (b) $y^2 + \frac{z^2}{4} - x^2 = 1$

Hiperbolóides de duas folhas

25 (a) $x^2 - \frac{y^2}{4} - z^2 = 1$ (b) $\frac{z^2}{4} - y^2 - x^2 = 1$

26 (a) $z^2 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$ (b) $\frac{y^2}{4} - x^2 - \frac{z^2}{9} = 1$

Cones

27 (a) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = \frac{z^2}{4}$ (b) $\frac{x^2}{4} - y^2 + \frac{z^2}{9} = 0$

28 (a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 0$ (b) $x^2 = 4y^2 + z^2$

Parabolóides

29 (a) $y = \frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9}$ (b) $x^2 + \frac{y^2}{4} - z = 0$

30 (a) $z = x^2 + \frac{y^2}{9}$ (b) $\frac{z^2}{25} + \frac{y^2}{9} - x = 0$

Parabolóides hiperbólicos

31 (a) $z = x^2 - y^2$ (b) $z = y^2 - x^2$

32 (a) $z = \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4}$ (b) $z = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}$

Exercs. 33-46: Esboce o gráfico da equação em um sistema coordenado xyz, e identifique a superfície.

33 $16x^2 - 4y^2 - z^2 + 1 = 0$

34 $8x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$

35 $36x = 9y^2 + z^2$

36 $16x^2 + 100y^2 - 25z^2 = 400$

37 $x^2 - 16y^2 = 4z^2$ 38 $3x^2 - 4y^2 - z^2 = 12$

39 $9x^2 + 4y^2 + z^2 = 36$ 40 $16y = x^2 + 4z^2$

41 $z = e^y$ 42 $x^2 + (y-2)^2 = 1$

43 $4x - 3y = 12$ 44 $2x + 4y + 3z = 12$

45 $y^2 - 9x^2 - z^2 - 9 = 0$

46 $36x^2 - 16y^2 + 9z^2 = 0$

Exercs. 47-50: Grafe a superfície.

47 $z = \frac{1}{5}y^2 - 3|x|$ 48 $z = x^2 + 3xy + 4y^2$

49 $z = xy + x^2$ 50 $z = \frac{y^2}{16} - \frac{xy}{15} - \frac{x^2}{9}$

Exercs. 51-56: Ache a equação da superfície obtida fazendo-se o gráfico da equação revolver em torno do eixo indicado.

51 $x^2 + 4y^2 = 16$; eixo-y 52 $y^2 = 4x$; eixo-x

53 $z = 4 - y^2$; eixo-z 54 $z = e^{-y^2}$; eixo-y

55 $z^2 - x^2 = 1$; eixo-x 56 $xz = 1$; eixo-z

57 Embora costumemos usar a esfera como modelo da Terra, é necessário um modelo mais preciso para pesquisar sua superfície. Utiliza-se o *elipsóide de Clarke* (1866), de equação $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) = 1$ para $a = b = 6378{,}2064$ km e $c = 6356{,}5838$ km para estabelecer as posições geográficas de pontos de controle na rede geodética nacional dos EUA.

(a) Explique sumariamente a diferença entre o elipsóide de Clarke e a representação esférica usual da superfície da Terra.

(b) As curvas de mesma latitude são traços em um plano da forma $z = k$. Descreva-as.

(c) As curvas de mesma longitude (*meridianos*) são traços em um plano da forma $y = mx$. Descreva-as.

14.7 EXERCÍCIOS DE REVISÃO

Exercs. 1-20: Se $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, e $\mathbf{c} = -\mathbf{i} + 6\mathbf{k}$, ache o vetor ou escalar.

1 $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ 2 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c})$ 3 $\|-3\mathbf{b}\|$

4 $\|\mathbf{b} + \mathbf{c}\|$ 5 $\|\mathbf{a}\|^2$ 6 $\|\mathbf{a} \times \mathbf{a}\|$

7 O ângulo entre a e c

8 Os ângulos entre a e os unitários i, j, k.

9 Um vetor unitário de mesma direção de a.

10 Um vetor de direção oposta à de a e módulo duas vezes o de b

11 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 12 $(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{a}$

13 $\text{comp}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}$ 14 $\text{comp}_{\mathbf{a}}\,(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

15 $(2\mathbf{a}) \cdot (3\mathbf{a})$ 16 $(2\mathbf{a}) \times (3\mathbf{a})$

17 $(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{c} \times \mathbf{a})$ 18 $(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a})$

19 O volume da caixa definida por a, b e c.

20 A área do triângulo definido por a e b.

21 Mostre que $\mathbf{a} = \langle 4, 3, -5 \rangle$ e $\mathbf{b} = \langle -1, 3, 1 \rangle$ são ortogonais.

22 Uma força constante de módulo de 18 Newtons tem a mesma direção que o vetor $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. Se a distância é medida em metros, ache o trabalho realizado se o ponto de aplicação da força percorre o segmento de $P(1, 1, 1)$ a $Q(3, 5, 4)$.

23 Dados os pontos $A(5, -3, 2)$ e $B(-1, -4, 3)$, ache:

(a) $d(A, B)$

(b) o ponto médio de AB

(c) a equação da esfera de centro B e tangente ao plano-xz

(d) a equação do plano por B paralelo ao plano-xz.

(e) equações paramétricas da reta por A e B.

(f) a equação do plano por A com vetor normal $\overrightarrow{AB}$.

24 Ache a equação do plano por $A(0, 4, 9)$ e $B(0, -3, 7)$ perpendicular ao plano-yz.

25 Ache a equação do plano de intercepto-x 5, intercepto-y -2 e intercepto-z 0.

26 Ache as equações simétricas da reta dada por $x = 3 + 4t$, $y = 2 - t$, $z = 2t$.

27 Ache as equações paramétricas da reta de intersecção dos planos $2x + y + 4z = 8$ e $x + 3y - z = 1$.

28 Ache a equação do plano por $P(1, 3, -2)$ que é paralelo ao plano $5x - 4y + 3z = 7$.

29 Ache a equação do plano por $P(4, 1, 2)$ que tem o mesmo traço-yz que o plano $2x + 3y - 4z = 11$.

30 Ache a equação do cilindro de geratrizes paralelas ao eixo-z e que tem como diretriz o círculo no plano-xy com centro $C(4, -3, 0)$ e raio 5.

31 Ache a equação do elipsóide de centro 0, intercepto-x 8, intercepto-y 3 e intercepto-z 1.

32 Ache a equação da superfície obtida pela revolução do gráfico da equação $z = x$ em torno do eixo-z.

33 Dados os pontos $P(2, -1, 1)$, $Q(-3, 2, 0)$ e $R(4, -5, 3)$, ache:

(a) um vetor unitário normal ao plano determinado por P, Q e R

(b) a equação do plano por P, Q e R

(c) equações paramétricas da reta por P paralela à reta por Q e R

(d) $\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR}$

(e) o ângulo entre $\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR}$

(f) a área do triângulo PQR

(g) a distância de R à reta por P e Q

34 Ache os ângulos entre as duas retas

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-5}{8} \text{ e } \frac{x+1}{7} = \frac{6-y}{2} = \frac{2z+7}{-4}$$

35 Escreva equações paramétricas para cada uma das retas do Exercício 34.

36 Determine se as seguintes retas se interceptam e, em caso afirmativo, ache o ponto de intersecção:

$$x = 2 + t, \quad y = 1 + t, \quad z = 4 + 7t$$
$$x = -4 + 5v, \quad y = 2 - 2v, \quad z = 1 - 4v$$

37 Ache os ângulos entre as retas do Exercício 36.

38 Se a reta l tem equações paramétricas $x = 2t + 1$, $y = -t + 3$, $z = 5t$, ache a distância de $A(3, 1, -1)$ a l.

Exercs. 39-50: Esboce o gráfico da equação.

39 $x^2 + y^2 + z^2 - 14x + 6y - 8z + 10 = 0$

40 $4y - 3z - 15 = 0$

41 $3x - 5y + 2z = 10$

42 $y = z^2 + 1$

43 $9x^2 + 4z^2 = 36$

44 $x^2 + 4y + 9z^2 = 0$

45 $z^2 - 4x^2 = 9 - 4y^2$

46 $2x^2 + 4z^2 - y^2 = 0$

47 $z^2 - 4x^2 - y^2 = 4$

48 $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 16$

49 $x^2 - 4y^2 = 4z$

50 $z = 9 - x^2 - y^2$

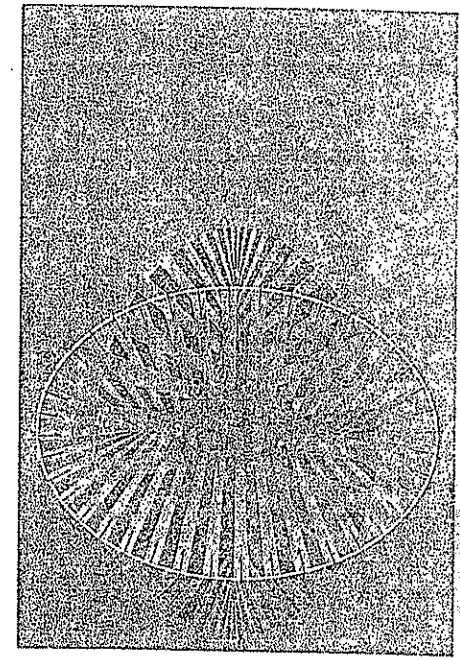
MAKRON Books

Capítulo 15

FUNÇÕES COM VALORES VETORIAIS

INTRODUÇÃO

Os valores das funções consideradas até aqui são números reais. Neste capítulo introduziremos funções cujos valores são vetores. Exemplo de uma tal *função com valor vetorial* é a velocidade, no instante t, de um objeto que se move no espaço. Na Seção 13 estudaremos esta aplicação, bem como outros aspectos do movimento, tais como aceleração e força centrípeta.



Definem-se os conceitos de limite, derivada e integral de funções com valores vetoriais aplicando-se às componentes dos vetores os métodos já estudados. Isto nos permite obter rapidamente propriedades análogas às estabelecidas para funções nos Capítulos 3 e 5.

Se uma função com valores vetoriais é contínua, então os pontos terminais dos vetores definem, em seu contradomínio, uma curva em três dimensões e, reciprocamente, a cada curva corresponde uma função contínua com valores vetoriais. Esta correspondência biunívoca é útil em aplicações que envolvem um ponto em movimento ao longo de uma curva. Em particular, a derivada de uma função com valores vetoriais nos dá *vetores tangentes* a uma curva.

Nas Seções 15.4 e 15.5 utilizamos funções com valores vetoriais para definir *curvatura* – um conceito que permite determinar quanto uma curva se afasta da direção de sua tangente, ou quanto muda de forma. A seção final contém um surpreendente exemplo do uso de vetores nas demonstrações das leis de Kepler. As demonstrações são difíceis e exigem muitas propriedades dos vetores. O presente material deve ser lido cuidadosamente, com o objetivo de aquilatar o poder dos métodos vetoriais.

15.1 FUNÇÕES COM VALORES VETORIAIS E CURVAS NO ESPAÇO

Pela Definição (1.10), uma *função* é uma correspondência que associa a cada elemento de seu domínio D exatamente *um* elemento de seu contradomínio E. Se os valores da função são números reais, referimo-nos à função como uma **função com valores reais**, ou função escalar. Estudaremos a seguir *funções com valores vetoriais*, denotadas por $\mathbf{r}$ (ou por $\overrightarrow{r}$); os valores dessas funções são *vetores*.

Definição (15.1) Seja D um conjunto de números reais. Uma **função vetorial** $\mathbf{r}$ com domínio D é uma correspondência que associa a cada número t em D exatamente um vetor $\mathbf{r}(t)$ em V_3.

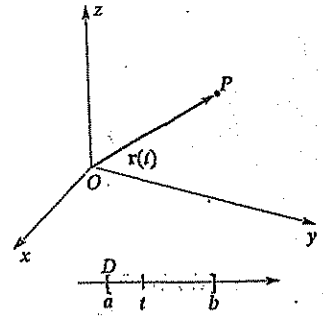


Figura 15.1

O contradomínio de $\mathbf{r}$ na Definição (15.1) consiste em todos os vetores possíveis $\mathbf{r}(t)$, para t em D. Na Figura 15.1, o domínio D é um intervalo fechado; entretanto, D pode ser *qualquer* conjunto de números reais. Esboçamos também o vetor posição de $\mathbf{r}(t)$. No futuro, não faremos distinção entre o vetor $\mathbf{r}(t)$ em V_3 e seu vetor posição $\overrightarrow{OP}$. Assim, *esboçar* $\mathbf{r}(t)$ significará esboçar $\overrightarrow{OP}$. O ponto terminal P de OP é chamado **ponto terminal** de $\mathbf{r}(t)$.

Como as três componentes de $\mathbf{r}(t)$ são determinadas unicamente para cada t em D, podemos escrever

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

onde f, g e h são funções *escalares* com domínio D. Reciprocamente, uma fórmula deste tipo para $\mathbf{r}(t)$ define uma função $\mathbf{r}$ com valores vetoriais. Temos, pois, o seguinte:

Teorema (15.2) Se D é um conjunto de números reais, então $\mathbf{r}$ é uma função com valores vetoriais com domínio D se e somente se existem funções escalares f, g e h tais que

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

para todo t em D.

EXEMPLO 1

Seja $\mathbf{r}(t) = (t+1)\mathbf{i} + (t^2-4)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$, t em $\mathbb{R}$.

(a) Esboce $\mathbf{r}(1)$ e $\mathbf{r}(3)$.

(b) Ache os vetores $\mathbf{r}(t)$ que estão em um plano coordenado.

SOLUÇÃO

(a) Fazendo $t = 1$ e $t = 3$ na fórmula de $\mathbf{r}(t)$, obtemos

$$\mathbf{r}(1) = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k} \text{ e } \mathbf{r}(3) = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$$

A Figura 15.2 exibe estes vetores.

(b) O quadro seguinte exibe os vetores $\mathbf{r}(t)$ que estão em um plano coordenado.

Plano que contém $\mathbf{r}(t)$	Componente zero de $\mathbf{r}(t)$	Valor de $\mathbf{r}(t)$	$\mathbf{r}(t)$
Plano-xy	componente-$\mathbf{k}$	$t = 0$	$\mathbf{r}(0) = \mathbf{i} - 4\mathbf{j}$
Plano-yz	componente-$\mathbf{i}$	$t = -1$	$\mathbf{r}(-1) = -3\mathbf{j} + \mathbf{k}$
Plano-xz	componente-$\mathbf{j}$	$t = \pm 2$	$\mathbf{r}(2) = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$ $\mathbf{r}(-2) = -\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$

EXEMPLO 2

Seja $\mathbf{r}(t) = (9-4t)\mathbf{i} + (-4+6t)\mathbf{j} + (3+3t)\mathbf{k}$, t em $\mathbb{R}$

(a) Esboce $\mathbf{r}(0)$, $\mathbf{r}(1)$ e $\mathbf{r}(2)$.

(b) Descreva graficamente o conjunto de todos os pontos terminais de $\mathbf{r}(t)$.

SOLUÇÃO

(a) Façamos $t = 0$, 1 e 2 na fórmula de $\mathbf{r}(t)$, como segue:

$$\mathbf{r}(0) = 9\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}(1) = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}(2) = \mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$$

Estes são os vetores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$ da Figura 15.3.

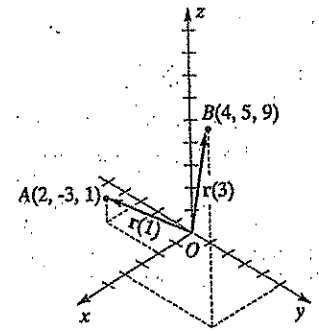


Figura 15.2

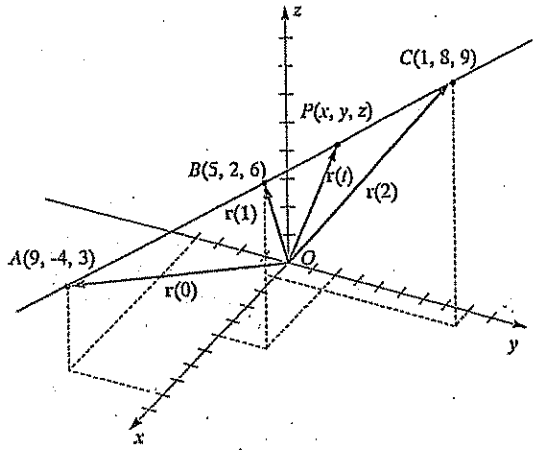


Figura 15.3

(b) Se $P(x, y, z)$ é o ponto terminal de $\mathbf{r}(t)$, conforme indicado na Figura 15.3, então

$$x = 9 - 4t,\ y = -4 + 6t,\ z = 3 + 3t;\ t \text{ em } \mathbb{R}$$

Pelo Teorema (14.34), estas são equações paramétricas da reta l por $A(9, -4, 3)$ paralela ao vetor $\langle -4, 6, 3\rangle$. Como $\langle -4, 6, 3\rangle$ corresponde a $\overrightarrow{AB}$, vemos que os pontos terminais de $\mathbf{r}(t)$, coincidem com a reta l.

Os pontos terminais de $\mathbf{r}(t)$ no Exemplo 2 determinam uma reta l em um sistema coordenado xyz. Em geral, os pontos terminais de

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

onde as funções escalares f, g e h são contínuas em um intervalo I, definem **uma curva no espaço** (ou simplesmente **curva**) – isto é, um conjunto C de ternos ordenados $(f(t), g(t), h(t))$. O gráfico de C consiste em todos os pontos $P(f(t), g(t), h(t))$ em um sistema coordenado xyz que correspondem aos ternos ordenados. (Tal como no caso de duas dimensões, diz-se indiferentemente *gráfico de uma curva*, ou *curva*.) As equações

$$x = f(t),\ y = g(t),\ z = h(t);\ t \text{ em } I$$

são **equações paramétricas de C**. C é **uma curva parametrizada** e as equações constituem **uma parametrização de C**. A

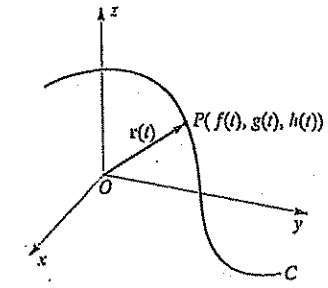


Figura 15.4

orientação de C é a direção determinada pelos valores crescentes de t.

Definem-se as noções de **pontos terminais**, **curva fechada** e **curva fechada simples** exatamente como no caso das curvas planas (ver Seção 13.1) Uma curva C é **suave** se admite **uma parametrização suave**: $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, com f', g' e h' contínuas e não simultaneamente zero (isto é, não simultaneamente zero para nenhum t), exceto possivelmente nas extremidades. Uma curva suave não tem pontos angulosos, pontos de reversão nem interrupções. Define-se uma curva **parcialmente suave** tal como na Seção 13.1.

Se $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$, com f, g e h contínuas em um intervalo I, então, conforme ilustrado na Figura 15.4, quando t varia em I, a extremidade de $\mathbf{r}(t)$ traça a curva C com parametrização

$$x = f(t),\ y = g(t),\ z = h(t);\ t \text{ em } I$$

Referimo-nos a C como a **curva definida por $\mathbf{r}(t)$**. Na Seção 15.3, utilizaremos esta representação vetorial de C, tendo t como o tempo, para descrever o movimento de um ponto P no espaço.

Uma **cúbica reversa** é uma curva com parametrização

$$x = at,\ y = bt^2,\ z = ct^3$$

onde a, b e c são constantes não-nulas. O caso especial $a = 1$, $b = 1$ e $c = 1$ é a curva determinada por $\mathbf{r}(t)$ no próximo exemplo.

EXEMPLO 3

Seja $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, $t \geq 0$. Trace a curva C definida por $\mathbf{r}(t)$ e indique a orientação.

SOLUÇÃO

As equações paramétricas de C são

$$x = t,\ y = t^2,\ z = t^3;\ t \geq 0$$

Como x, y e z são não-negativos, C está no primeiro octante.

Para visualizar o gráfico, eliminemos o parâmetro das duas primeiras equações, obtendo $y = x^2$. Isto implica que todo ponto $P(x, y, z)$ de C também pertence ao cilindro parabólico $y = x^2$.

Eliminando o parâmetro de $x = t$ e $z = t^3$, obtemos $z = x^3$, que é a equação de um cilindro de diretrizes paralelas ao eixo-y. A curva C é a intersecção dos dois cilindros $y = x^2$ e $z = x^3$, conforme exibido na Figura 15.5.

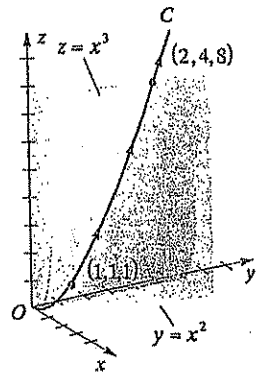


Figura 15.5

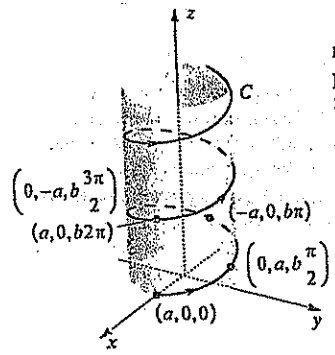


Figura 15.6

Em $t = 0$, o ponto terminal $P(x, y, z)$ do vetor posição de $\mathbf{r}(t)$ é $(0, 0, 0)$. Ao aumentar t, o ponto terminal traça a curva C, passando pelos pontos $(1, 1, 1)$, $(2, 4, 8)$, $(3, 9, 27)$ etc. As setas na figura indicam a orientação de C. Note que y cresce mais rapidamente do que x e z cresce mais rapidamente do que y. Assim, em $t = 10$, o ponto terminal do vetor posição é $(10, 100, 1000)$.

EXEMPLO 4 Seja $\mathbf{r}(t) = a = \cos t\mathbf{i} + a \operatorname{sen} t\mathbf{j} + bt\mathbf{k}$ para $t \geq 0$ e constantes positivas a e b. Trace a curva C determinada por $\mathbf{r}(t)$, e indique a orientação.

SOLUÇÃO As equações paramétricas de C são

$$x = a\cos t, y = a \operatorname{sen} t, z = bt; t \geq 0$$

Eliminando o parâmetro nas duas primeiras equações (ver Exemplo 2 da Seção 13.1), obtemos

$$x^2 + y^2 = a^2$$

Assim, todo ponto $P(x, y, z)$ de C está sobre o cilindro circular $x^2 + y^2 = a^2$. Quando t varia de 0 a 2π, o ponto P parte de $(a, 0, 0)$ e se move para cima, fazendo ao mesmo tempo uma revolução em torno do cilindro, conforme Figura 15.6. Outros intervalos-t de amplitude 2π resultam em partes semelhantes da curva. As setas indicam a orientação de C.

A curva C da Figura 15.6 é uma **hélice circular**.

Encarando V_2 como um subconjunto de V_3 que consiste em todos os vetores cuja terceira componente é 0, então $\mathbf{r}(t)$ em (15.2) pode ser escrito como

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$$

Neste caso, a curva definida por $\mathbf{r}(t)$ está no plano-xy.

EXEMPLO 5

Seja $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + (8 - 2t^2)\mathbf{j}, -2 \leq t \leq 2$.

(a) Trace a curva C determinada por $\mathbf{r}(t)$, e indique a orientação.

(b) Trace $\mathbf{r}(t)$ para $t = -2, -1, 0, \frac{3}{2}, 2$.

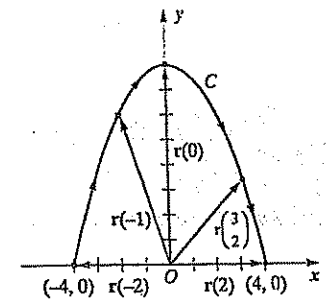


Figura 15.7

SOLUÇÃO

(a) A curva C está no plano-xy e admite a parametrização

$$x = 2t, y = 8 - 2t^2; -2 \leq t \leq 2$$

Eliminando o parâmetro, vemos que C está na parábola

$$y = 8 - 2(\tfrac{1}{2}x)^2, \quad \text{ou} \quad y = 8 - \tfrac{1}{2}x^2$$

Os valores $-2 \leq t \leq 2$ dão a parte da parábola compreendida entre $(-4, 0)$ e $(4, 0)$ (ver Figura 15.7), onde as setas em C indicam a orientação.

(b) Fazendo $t = -2, -1, 0, \frac{3}{2}, 2$ na fórmula de $\mathbf{r}(t)$, obtemos:

$$\mathbf{r}(-2) = -4\mathbf{i} \qquad \mathbf{r}(-1) = -2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} \qquad \mathbf{r}(0) = 8\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}\left(\tfrac{3}{2}\right) = 3\mathbf{i} + \tfrac{7}{2}\mathbf{j} \qquad \mathbf{r}(2) = 4\mathbf{i}$$

A Figura 15.7 exibe estes vetores.

EXEMPLO 6

Seja $\mathbf{r}(t) = (\frac{1}{2}t \cos t)\mathbf{i} + (\frac{1}{2}t \operatorname{sen} t)\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 3\pi$.

(a) Trace a curva determinada por $\mathbf{r}(t)$, e indique a orientação.

(b) Esboce $\mathbf{r}(6)$.

SOLUÇÃO

(a) A curva C está no plano-xy e tem equações paramétricas

$$x = \tfrac{1}{2}t\cos t,\ y = \tfrac{1}{2}t \operatorname{sen} t;\ 0 \leq t \leq 3\pi$$

Podemos admitir que t seja a medida em radianos de um ângulo θ e escrevemos

$$x = \tfrac{1}{2}\theta\cos\theta,\ y = \tfrac{1}{2}\theta \operatorname{sen}\theta;\ 0 \leq \theta \leq 3\pi$$

Além disso, como

$$\frac{y}{x} = \frac{\frac{1}{2}\theta \operatorname{sen}\theta}{\frac{1}{2}\theta\cos\theta} = \operatorname{tg}\theta$$

decorre do Teorema (13.8) que podemos utilizar θ para expressar (x, y) em coordenadas polares. Notemos em seguida que

$$x^2 + y^2 = \tfrac{1}{4}\theta^2\cos^2\theta + \tfrac{1}{4}\theta^2\operatorname{sen}^2\theta$$
$$= \tfrac{1}{4}\theta^2(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) = \tfrac{1}{4}\theta^2$$

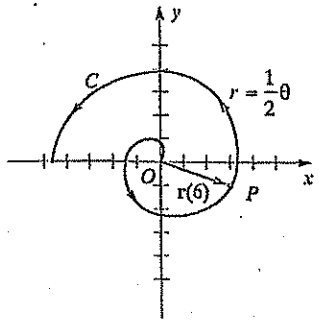


Figura 15.8

Escrevendo $x^2 + y^2$ em coordenadas polares, temos

$$r^2 = \tfrac{1}{4}\theta^2 \quad \text{ou} \quad r = \tfrac{1}{2}\theta$$

(Note que $r \neq -\frac{1}{2}\theta$, porque $r = \|\mathbf{r}(t)\| \geq 0$.)

O gráfico da equação polar $r = \frac{1}{2}\theta$, $0 \leq \theta \leq 3\pi$ é a parte da espiral de Arquimedes ilustrada na Figura 15.8 (ver Exemplo 5, Seção 13.3). A orientação é o sentido anti-horário, conforme indicado pelas setas.

(b) Substituindo t por 6, obtemos

$$\mathbf{r}(6) = (3 \cos 6)\mathbf{i} + (3 \operatorname{sen} 6)\mathbf{j} \approx 2.9\mathbf{i} - 0.8\mathbf{j}$$

e traçamos $\mathbf{r}(6)$ como na Figura 15.8.

Podemos definir o **comprimento de uma curva** C em três dimensões exatamente como o fizemos para as curvas planas na Seção 13.1.

O próximo resultado é análogo ao Teorema (13.5).

Teorema (15.3)

Se uma curva C admite uma parametrização suave

$$x = f(t),\ y = g(t),\ z = h(t);\ a \leq t \leq b$$

e se C não se intercepta, exceto possivelmente em $t = a$ e $t = b$, então o comprimento L de C é

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\ dt$$

$$= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\ dt$$

EXEMPLO 7

Ache o comprimento L da hélice circular

$$x = a \cos t,\ y = a \operatorname{sen} t,\ z = bt;\ 0 \leq t \leq 2\pi$$

SOLUÇÃO

A hélice é a parte da curva da Figura 15.6 entre os pontos $(a, 0, 0)$ e $(a, 0, 2\pi b)$. Aplicando o Teorema (15.3), obtemos

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a \operatorname{sen} t)^2 + (a \cos t)^2 + (b)^2}\ dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2}\ dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2}\ dt \\ &= \left[\sqrt{a^2 + b^2}\ t\right]_0^{2\pi} = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

EXERCÍCIO 15.1

Exercs. 1-8: (a) Trace os dois vetores indicados após a fórmula de $\mathbf{r}(t)$. (b) Trace, no mesmo plano, a curva C determinada por $\mathbf{r}(t)$ e indique a orientação para os valores dados de t.

1 $\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + (1 - 9t^2)\mathbf{j}$,
$\mathbf{r}(0)$, $\mathbf{r}(1)$; t em $\mathbb{R}$

2 $\mathbf{r}(t) = (1 - t^3)\mathbf{i} + t\mathbf{j}$,
$\mathbf{r}(1)$, $\mathbf{r}(2)$; $t \geq 0$

3 $\mathbf{r}(t) = (t^3 - 1)\mathbf{i} + (t^2 + 2)\mathbf{j}$,
$\mathbf{r}(1)$, $\mathbf{r}(2)$; $-2 \leq t \leq 2$

4 $\mathbf{r}(t) = (2 + \cos t)\mathbf{i} - (3 - \operatorname{sin} t)\mathbf{j}$,
$\mathbf{r}(\pi/2)$, $\mathbf{r}(\pi)$; $0 \leq t \leq 2\pi$

5 $\mathbf{r}(t) = (3 + t)\mathbf{i} + (2 - t)\mathbf{j} + (1 + 2t)\mathbf{k}$,
$\mathbf{r}(-1)$, $\mathbf{r}(0)$; $t \geq -1$

6 $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} - 3 \operatorname{sen} t\mathbf{j} + 3 \cos t\mathbf{k}$,
$\mathbf{r}(0)$, $\mathbf{r}(\pi/2)$; $t \geq 0$

7 $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 4 \cos t\mathbf{j} + 9 \operatorname{sin} t\mathbf{k}$,
$\mathbf{r}(0)$, $\mathbf{r}(\pi/2)$; $t \geq 0$

8 $\mathbf{r}(t) = \tan t\mathbf{i} + \sec t\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$,
$\mathbf{r}(0)$, $\mathbf{r}(\pi/4)$; $-\pi/2 < t < \pi/2$

Exercs. 9-18: Trace a curva C definida por $\mathbf{r}(t)$ e indique a orientação.

9 $\mathbf{r}(t) = e^t \cos t\mathbf{i} + e^t \operatorname{sen} t\mathbf{j}$; $0 \leq t \leq \pi$

10 $\mathbf{r}(t) = 2 \cosh t\mathbf{i} + 3 \operatorname{senh} t\mathbf{j}$; t em $\mathbb{R}$

11 $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t^2\mathbf{j} + 3t^3\mathbf{k}$; t em $\mathbb{R}$

12 $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}$; $0 \leq t \leq 4$

13 $\mathbf{r}(t) = (t^2 + 1)\mathbf{i} + t\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$; t em $\mathbb{R}$

14 $\mathbf{r}(t) = 6 \operatorname{sen} t\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 25 \cos t\mathbf{k}$; $-2\pi \leq t \leq 2\pi$

15 $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \operatorname{sen} t\mathbf{k}$; t em $\mathbb{R}$

16 $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$; t em $\mathbb{R}$

17 $\mathbf{r}(t) = 3 \operatorname{sen} (t^2)\mathbf{i} + (4 - t^{3/2})\mathbf{j}$; $0 \leq t \leq 5$

18 $\mathbf{r}(t) = e^{\operatorname{sen} 3t}\mathbf{i} + e^{-\cos t}\mathbf{j}$; $0 \leq t \leq 2\pi$

Exercs. 19-24: Ache o comprimento da curva parametrizada.

19 $x = 5t$, $y = 4t^2$, $z = 3t^2$; $0 \leq t \leq 2$

20 $x = t^2$, $y = t \operatorname{sen} t$, $z = t \cos t$; $0 \leq t \leq 1$

21 $x = e^t \cos t$, $y = e^t$, $z = e^t \operatorname{sen} t$; $0 \leq t \leq 2\pi$

22 $x = 2t$, $y = 4 \operatorname{sen} 3t$, $z = 4 \cos 3t$; $0 \leq t \leq 2\pi$

23 $x = 3t^2$, $y = t^3$, $z = 6t$; $0 \leq t \leq t_1$

24 $x = 1 - 2t^2$, $y = 4t$, $z = 3 + 2t^2$; $0 \leq t \leq 2$

25 Uma *concho-espiral* é uma curva C que admite a parametrização $x = a\,e^{\mu t} \cos t$, $y = a\,e^{\mu t} \operatorname{sen} t$, $z = b\,e^{\mu t}$; $t \geq 0$, com a, b e μ constantes.

(a) mostre que C está no cone $a^2z^2 = b^2(x^2 + y^2)$.

(b) Trace C para $a = b = 4$ e $\mu = -1$.

(c) Ache o comprimento de C correspondente ao intervalo-t $[0, \infty)$.

26 Uma curva tem a parametrização

$$x = a \operatorname{sen} t \operatorname{sen} \alpha,\ y = b \operatorname{sen} t \cos \alpha,$$
$$z = c \cos t;\ t \geq 0,$$

com a, b, c e α constantes positivas.

(a) Mostre que C está no elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

(b) Mostre que C também está em um plano que contém o eixo-z.

(c) Descreva a curva C.

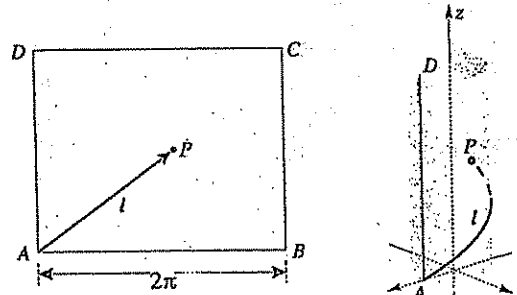
27 (a) Mostre que uma cúbica reversa $x = at$, $y = bt^2$, $z = ct^3$, $t \geq 0$ intercepta um plano dado no máximo em três pontos.

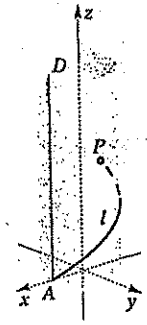
(b) Ache o comprimento da cúbica reversa $x = 6t$, $y = 3t^2$, $z = t^3$ entre os pontos correspondentes a $t = 0$ e $t = 1$.

28 Um retângulo pode ser transformado em um cilindro unindo-se dois lados opostos e paralelos. A figura mostra, à esquerda, um retângulo $ABCD$ de largura 2π. Une-se o lado AD ao lado BC, posicionando-se então o ponto A em (1, 0 0) de modo a formar parte do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, ilustrado à direita.

(a) Se l é o segmento de A a outro ponto P no retângulo e m é o coeficiente angular de l, mostre que, como curva traçada no cilindro, l admite a parametrização $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = mt$.

(b) Use a parte (a) para mostrar que a curva traçada no cilindro, com menor distância de (1, 0, 0) a outro ponto P, é uma hélice (ver Exemplo 4).





15.2 LIMITES, DERIVADAS E INTEGRAIS

Poderíamos definir o limite de uma função com valores vetoriais r utilizando o método $\in$-δ análogo ao utilizado na Definição (2.4) (ver Exercício 41); todavia, como $\mathbf{r}(t)$ pode expressar-se em termos de i, j e k, onde as componentes são funções escalares f, g e h, é mais simples utilizar a definição seguinte.

Definição (15.4)

Seja $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$. O **limite de** $\mathbf{r}(t)$ quando t tende para a é

$$\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \left[\lim_{t \to a} f(t)\right]\mathbf{i} + \left[\lim_{t \to a} g(t)\right]\mathbf{j} + \left[\lim_{t \to a} h(t)\right]\mathbf{k},$$

desde que f, g e h tenham limites quando t tende para a.

Assim, para achar $\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t)$ tomamos o limite de cada componente de $\mathbf{r}(t)$. Podemos formular definição análoga a (15.4) para limites laterais.

ILUSTRAÇÃO

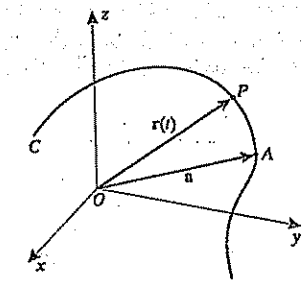


Figura 15.9

$$\lim_{t \to 2} (t^2\mathbf{i} + 3t\mathbf{j} + 5\mathbf{k}) = \left[\lim_{t \to 2} t^2\right]\mathbf{i} + \left[\lim_{t \to 2} 3t\right]\mathbf{j} + \left[\lim_{t \to 2} 5\right]\mathbf{k}$$
$$= 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$

Se, em (15.4),

$$\lim_{t \to a} f(t) = a_1, \quad \lim_{t \to a} g(t) = a_2, \quad \text{e} \quad \lim_{t \to a} h(t) = a_3,$$

então

$$\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}.$$

Fazendo $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ obtemos a situação ilustrada na Figura 15.9, onde C é curva definida por $\mathbf{r}(t)$ e $\overrightarrow{OA}$ é o vetor posição de a. Quando t tendo para a, o ponto terminal P de $\mathbf{r}(t)$ tende para A, isto é, $\mathbf{r}(t)$ tende para $\overrightarrow{OA}$.

Define-se a continuidade de uma função vetorial r da mesma forma que no caso de uma função escalar.

Definição (15.5)

Uma função com valores vetoriais r é **contínua em** a se

$$\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a)$$

Segue-se que, se $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$, então r é *contínua em a se e somente se f, g e h são contínuas em a*. A continuidade em um intervalo é definida na forma usual.

Definição (15.6)

Seja r uma função com valores vetoriais. A **derivada** de r é a função com valores vetoriais r' definida por

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}[\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)]$$

para todo t tal que o limite exista.

Escrevendo

$$\frac{1}{\Delta t}[\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)] = \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

então a Definição (15.6) toma a forma familiar das derivadas de funções escalares introduzidas no Capítulo 3.

O próximo teorema afirma que, para achar $\mathbf{r}'(t)$, devemos diferenciar cada componente de $\mathbf{r}(t)$.

Teorema (15.7) Se $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ e f, g e h são diferenciáveis, então

$$\mathbf{r}'(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} + h'(t)\mathbf{k}$$

DEMONSTRAÇÃO

Pela Definição (15.6)

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[f(t + \Delta t)\mathbf{i} + g(t + \Delta t)\mathbf{j} + h(t + \Delta t)\mathbf{k}] - [f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}]}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}\mathbf{i} + \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t}\mathbf{j} + \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t}\mathbf{k} \right]$$

Tomando o limite de cada componente, chegamos à conclusão do teorema.

Se $\mathbf{r}'(t)$ existe, dizemos que $\mathbf{r}$ é **diferenciável** em t. Denotamos também as derivadas como segue:

$$\mathbf{r}'(t) = D_t\,\mathbf{r}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t)$$

Podem-se obter derivadas de ordem superior de maneira análoga. Por exemplo, se f, g e h têm derivadas segundas, então

$$\mathbf{r}''(t) = f''(t)\mathbf{i} + g''(t)\mathbf{j} + h''(t)\mathbf{k}$$

EXEMPLO 1

Seja $\mathbf{r}(t) = (\ln t)\,\mathbf{i} + e^{-3t}\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$.

(a) Ache o domínio de $\mathbf{r}$ e determine onde $\mathbf{r}$ é contínua.

(b) Ache $\mathbf{r}'(t)$ e $\mathbf{r}''(t)$.

SOLUÇÃO

(a) Como $\ln t$ não é definida se $t \leq 0$, o domínio de $\mathbf{r}$ é o conjunto de números reais positivos. Além disso, $\mathbf{r}$ é contínua em todo seu domínio, pois cada componente define uma função contínua.

UFPB/BIBLIOTECA/PRAI

(b) Aplicando o Teorema (15.7), temos

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{1}{t}\mathbf{i} - 3e^{-3t}\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}''(t) = -\frac{1}{t^2}\mathbf{i} + 9e^{-3t}\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

O próximo teorema relaciona fórmulas de diferenciação para funções com valores vetoriais. Note a semelhança com as fórmulas escalares correspondentes.

Teorema (15.8) Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são funções vetoriais diferenciáveis e c é um escalar, então

(i) $D_t[\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) + \mathbf{v}'(t)$

(ii) $D_t[c\mathbf{u}(t)] = c\mathbf{u}'(t)$

(iii) $D_t[\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t) + \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t)$

(iv) $D_t[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t) + \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t)$

DEMONSTRAÇÃO

Provaremos (iii), deixando as outras partes como exercício. Sejam

$$\mathbf{u}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v}(t) = g_1(t)\mathbf{i} + g_2(t)\mathbf{j} + g_3(t)\mathbf{k}$$

onde cada função escalar f_k e g_k é uma função diferenciável de t. Pela definição de produto escalar

$$\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t) = f_1(t)g_1(t) + f_2(t)g_2(t) + f_3(t)g_3(t) = \sum_{k=1}^{3} f_k(t)g_k(t)$$

Conseqüentemente

$$D_t[\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] = D_t \sum_{k=1}^{3} f_k(t)\,g_k(t) = \sum_{k=1}^{3} D_t[f_k(t)\,g_k(t)]$$

$$= \sum_{k=1}^{3} [f_k(t)\,g'_k(t) + f'_k(t)\,g_k(t)]$$

$$= \sum_{k=1}^{3} f_k(t)g'_k(t) + \sum_{k=1}^{3} [f'_k(t)\,g_k(t)]$$

$$= \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t) + \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t)$$

Para obter uma interpretação geométrica da derivada $\mathbf{r}'(t)$ na Definição (15.6), consideremos

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k},$$

onde f, g e h são funções (escalares) diferenciáveis, e seja C a curva determinada por $\mathbf{r}(t)$. Conforme Figura 15.10(i), se $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OQ}$ correspondem a $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{r}(t + \Delta t)$, respectivamente, então

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \text{ corresponde a } \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$$

Logo, para qualquer real Δt diferente de zero,

$$\frac{1}{\Delta t}\overrightarrow{PQ} \quad \text{corresponde a} \quad \frac{1}{\Delta t}[\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)]$$

Se $\Delta t > 0$, então $(1/\Delta t)\overrightarrow{PQ}$ é um vetor $\overrightarrow{PR}$ de mesma direção que $\overrightarrow{PQ}$. Além disso, se $0 < \Delta t < 1$, então $(1/\Delta t) > 1$ e $\|\overrightarrow{PR}\| > \|\overrightarrow{PQ}\|$, conforme ilustrado na Figura 15.10(ii).

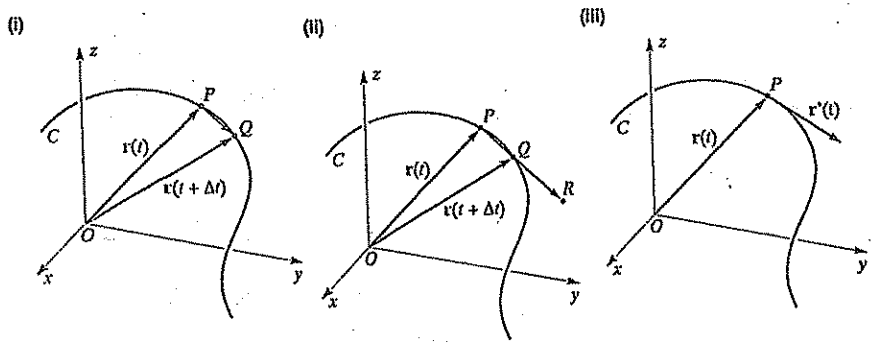


Figura 15.10

Fazendo $\Delta t \to 0^+$, Q se aproxima de P ao longo de C, e como $\overrightarrow{PR}$ está sobre a secante por P e Q, o vetor $\overrightarrow{PR}$ deve aproximar-se de um vetor que esteja na tangente a C em P. Discussão análoga vale se $\Delta t < 0$. Por esta razão, referimo-nos a $\mathbf{r}'(t)$ ou a qualquer de suas representações geométricas, como um vetor tangente a C em P. *Representaremos $\mathbf{r}'(t)$ sempre por um vetor com ponto inicial P sobre a curva C*, conforme exibido na Figura 15.10(iii). *O vetor $\mathbf{r}'(t)$ aponta na direção determinada pela orientação de C.* Por definição, a reta tangente a C em P é a reta por P paralela a $\mathbf{r}'(t)$.

No caso bidimensional $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$, o vetor tangente é

$$\mathbf{r}'(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j}$$

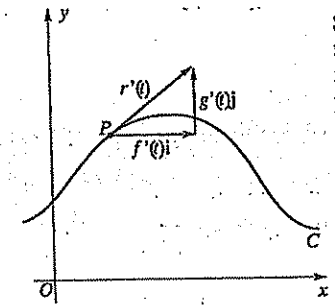


Figura 15.11

Se $f'(t) \neq 0$, então o coeficiente angular da reta por P paralela a $\mathbf{r}'(t)$ é $g'(t)/f'(t)$ (ver Figura 15.11). Isto está de acordo com a fórmula no Teorema (13.3) obtida para tangentes a curvas planas.

EXEMPLO 2

Seja $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + (t^2 - 4)\mathbf{j}$, $-2 \leq t \leq 3$.

(a) Trace a curva C determinada por $\mathbf{r}(t)$ e indique a orientação.

(b) Ache $\mathbf{r}'(t)$ e esboce $\mathbf{r}(1)$ e $\mathbf{r}'(1)$.

SOLUÇÃO

(a) Como $\mathbf{r}(t)$ está em V_2, utilizaremos um plano-xy. As equações paramétricas de C são

$$x = 2t, y = t^2 - 4; -2 \leq t \leq 3$$

Eliminando o parâmetro, vemos que C está sobre a parábola

$$y = (\tfrac{1}{2}x)^2 - 4 = \tfrac{1}{4}x^2 - 4$$

Os valores $-2 \leq t \leq 3$ nos dão a parte da parábola entre $(-4, 0)$ e $(6, 5)$ esboçada na Figura 15.12, na qual a orientação é da esquerda para a direita.

(b) Diferenciando $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + (t^2 - 4)\mathbf{j}$, temos

$$\mathbf{r}'(t) = 2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$$

Fazendo $t = 1$ nas fórmulas de $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{r}'(t)$, obtemos

$$\mathbf{r}(1) = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}, \mathbf{r}'(1) = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

Como dissemos, representaremos sempre $\mathbf{r}'(t)$ graficamente tomando o ponto inicial como o ponto C que corresponde a t. Assim, na Figura 15.12, o ponto inicial de $\mathbf{r}'(1)$ é o ponto $P(2, -3)$ que corresponde a $t = 1$. Como $\mathbf{r}'(1) = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, o ponto terminal de $\mathbf{r}'(1)$ é $(2 + 2, (-3), \text{ou } (4, -1)$. Note que $\mathbf{r}'(1)$ aponta na direção determinada pela orientação de C.

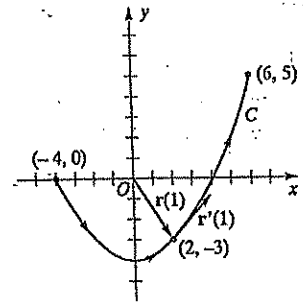


Figura 15.12

EXEMPLO 3

Seja C a curva de equações paramétricas

$$x = t, y = t^2, z = t^3; t \geq 0$$

Obtenha equações paramétricas da tangente a C no ponto correspondente a $t = 2$.

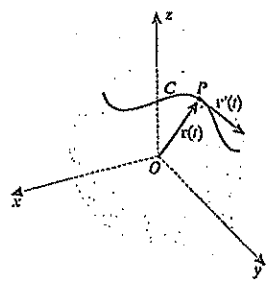


Figura 15.13

SOLUÇÃO

A curva C é determinada por

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k},\ t \geq 0$$

e é a cúbica reversa do Exemplo 3 da Seção 15.1 (ver Figura 15.5). Pelo que já vimos, um vetor tangente a C no ponto correspondente a t é

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$$

Em particular, o ponto de C correspondente a $t = 2$ é (2, 4, 8) e o vetor tangente é

$$\mathbf{r}'(2) = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$$

Pelo Teorema (14.34), as equações paramétricas da tangente correspondente são

$$x = 2 + t,\ y = 4 + 4t,\ z = 8 + 12t;\ t \text{ em } \mathbb{R}$$

Se $\mathbf{r}$ é diferenciável e se o módulo de $\mathbf{r}(t)$ é constante, digamos $\|\mathbf{r}(t)\| = c$ para algum c, então a curva C definida por $\mathbf{r}(t)$ está sobre uma esfera de raio c e centro em O, conforme Figura 15.13. A intuição geométrica nos diz que o vetor tangente $\mathbf{r}'(t)$ em um ponto arbitrário P de C é ortogonal ao vetor $\mathbf{r}(t)$ de O a P. Provaremos isto a seguir.

Teorema (15.9) Se $\mathbf{r}$ é diferenciável e $\|\mathbf{r}(t)\|$ é constante, então $\mathbf{r}'(t)$ é ortogonal a $\mathbf{r}(t)$ para todo t no domínio de $\mathbf{r}'$.

DEMONSTRAÇÃO

Se $\|\mathbf{r}(t)\| = c$ para alguma constante c, então

$$\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = \|\mathbf{r}(t)\|^2 = c^2$$

e, portanto,

$$D_t[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t)] = D_t c^2 = 0$$

Com o Teorema (15.8)(iii), obtemos

$$\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) + \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}(t) = 0$$

ou

$$2[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t)] = 0$$

Logo, pelo Teorema (14.21), $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{r}'(t)$ são ortogonais.

As integrais definidas de funções vetoriais podem definir-se como segue.

Definição (15.10) Seja $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$, com f, g e h integráveis em $[a, b]$. A **integral definida de r de a a b** é

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \left[\int_a^b f(t)\,dt\right]\mathbf{i} + \left[\int_a^b g(t)\,dt\right]\mathbf{j} + \left[\int_a^b h(t)\,dt\right]\mathbf{k}$$

Se $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t)$, então $\mathbf{R}(t)$ é uma **antiderivada** de $\mathbf{r}(t)$. O próximo resultado é análogo ao teorema fundamental do cálculo.

Teorema (15.11) Se $\mathbf{R}(t)$ é uma antiderivada de $\mathbf{r}(t)$ em $[a, b]$, então

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \mathbf{R}(t)\Big]_a^b = \mathbf{R}(b) - \mathbf{R}(a)$$

EXEMPLO 4

Calcule $\int_0^2 \mathbf{r}(t)\,dt$ se $\mathbf{r}(t) = 12t^3\mathbf{i} + 4e^{2t}\mathbf{j} + (t+1)^{-1}\mathbf{k}$.

SOLUÇÃO

Determinando uma antiderivada para cada componente de $\mathbf{r}(t)$, obtemos

$$\mathbf{R}(t) = 3t^4\mathbf{i} + 2e^{2t}\mathbf{j} + \ln(t+1)\mathbf{k}$$

Como $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t)$, decorre do Teorema (15.11) que

$$\begin{aligned}\int_0^2 \mathbf{r}(t)\,dt &= \mathbf{R}(2) - \mathbf{R}(0)\\ &= (48\mathbf{i} + 2e^4\mathbf{j} + \ln 3\mathbf{k}) - (0\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 0\mathbf{k})\\ &= 48\mathbf{i} + 2(e^4 - 1)\mathbf{j} + \ln 3\mathbf{k}\end{aligned}$$

A teoria das integrais indefinidas de funções vetoriais é análoga à desenvolvida no Capítulo 5 para funções reais. As demonstrações dos teoremas exigem apenas modificações secundárias, sendo, assim, omitidas. Se $\mathbf{R}(t)$ é uma antiderivada de $\mathbf{r}(t)$, então toda antiderivada de $\mathbf{r}(t)$ tem a forma $\mathbf{R}(t) + \mathbf{c}$ para algum vetor constante $\mathbf{c}$; escrevemos

$$\int \mathbf{r}(t)\,dt = \mathbf{R}(t) + \mathbf{c} \quad \text{onde} \quad \mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t)$$

EXERCÍCIOS 15.2

Exercs. 1-8: Ache o domínio de r. (b) Ache r'(t) e r''(t).

1 $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t-1}\,\mathbf{i} + \sqrt{2-t}\,\mathbf{j}$

2 $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{t}\mathbf{i} + \operatorname{sen} 3t\mathbf{j}$ 3 $\mathbf{r}(t) = \operatorname{tg} t\mathbf{i} + (t^2 + 8t)\mathbf{j}$

4 $\mathbf{r}(t) = e^{(t^2)}\mathbf{i} + \operatorname{arc\,sen} t\mathbf{j}$ 5 $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + \operatorname{tg} t\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

6 $\mathbf{r}(t) = \sqrt[3]{t}\,\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$

7 $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\,\mathbf{i} + e^{2t}\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

8 $\mathbf{r}(t) = \ln(1-t)\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$

Exercs. 9-16: (a) Esboce, no plano-xy, a curva determinada por r(t) e indique a orientação. (b) Ache r'(t) e trace r(t) e r'(t) para o valor indicado de t.

9 $\mathbf{r}(t) = -\frac{1}{4}t^4\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$; $t = 2$

10 $\mathbf{r}(t) = e^{2t}\mathbf{i} + e^{-4t}\mathbf{j}$; $t = 0$

11 $\mathbf{r}(t) = 4\cos t\mathbf{i} + 2\operatorname{sen} t\mathbf{j}$; $t = 3\pi/4$

12 $\mathbf{r}(t) = 2\sec t\mathbf{i} + 3\operatorname{tg} t\mathbf{j}$; $t = \pi/4$, $|t| < \pi/2$

13 $\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} + t^{-3}\mathbf{j}$; $t = 1$, $t > 0$

14 $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$; $t = -1$

15 $\mathbf{r}(t) = (2t-1)\mathbf{i} + (4-t)\mathbf{j}$; $t = 3$

16 $\mathbf{r}(t) = 5\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$; $t = 2$

Exercs. 17-20: A curva C é dada parametricamente. Ache equações paramétricas da tangente a C em P.

17 $x = 2t^3 - 1$, $y = -5t^2 + 3$, $z = 8t + 2$; $P(1, -2, 10)$

18 $x = 4\sqrt{t}$, $y = t^2 - 10$, $z = 4/t$; $P(8,6,1)$

19 $x = e^t$, $y = te^t$, $z = t^2 + 4$; $P(1, 0, 4)$

20 $x = t\operatorname{sen} t$, $y = t\cos t$, $z = t$; $P(\pi/2, 0, \pi/2)$

Exercs. 21-22: A curva C é dada parametricamente. Ache dois vetores unitários tangentes a C em P.

21 $x = e^{2t}$, $y = e^{-t}$, $z = t^2 + 4$; $P(1, 1, 4)$

22 $x = \operatorname{sen} t + 2$, $y = \cos t$, $z = t$; $P(2, 1, 0)$

23 Ref. Exercício 25, Seção 15.1. Mostre que a concho-espiral tem a propriedade especial de que o ângulo de k com o vetor tangente r'(t) é constante.

24 A *hélice geral* é uma curva cuja tangente faz ângulo constante com um vetor unitário fixo u. Mostre que a curva parametrizada por $x = 3t - t^3$, $y = 3t^2$, $z = 3t + t^3$; t em $\mathbb{R}$ é uma hélice geral, determinando um vetor apropriado u.

25 Um ponto se move em uma curva C de modo que o vetor posição r(t) de P é igual ao vetor tangente r'(t) para todo t. Ache equações paramétricas de C e trace o gráfico.

26 Um ponto se move sobre uma curva C de modo que o vetor posição r(t) e o vetor tangente r'(t) sejam sempre ortogonais. Prove que C está sobre uma esfera de centro na origem. (*Sugestão*: Mostre que $D_t\|\mathbf{r}(t)\|^2 = 0$.)

Exercs. 27-30: Calcule a integral

27 $\int_0^2 (6t^2\mathbf{i} - 4t\mathbf{j} + 3\mathbf{k})\,dt$

28 $\int_{-1}^{1} (-5\mathbf{i} + 8t^3\mathbf{j} - 3t^2\mathbf{k})\,dt$

29 $\int_0^{\pi/4} (\operatorname{sen} t\mathbf{i} - \cos t\mathbf{j} + \operatorname{tg} t\mathbf{k})\,dt$

30 $\int_0^1 [te^{(t^2)}\mathbf{i} + \sqrt{t}\mathbf{j} + (t^2+1)^{-1}\mathbf{k}]\,dt$

Exercs. 31-34: Calcule r(t) sujeito às condições dadas.

31 $\mathbf{r}'(t) = t^2\mathbf{i} + (6t+1)\mathbf{j} + 8t^3\mathbf{k}$,
$\mathbf{r}(0) = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$

32 $\mathbf{r}'(t) = 2\mathbf{i} - 4t^3\mathbf{j} + 6\sqrt{t}\,\mathbf{k}$,
$\mathbf{r}(0) = \mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

33 $\mathbf{r}''(t) = 6t\mathbf{i} - 12t^2\mathbf{j} + \mathbf{k}$,
$\mathbf{r}'(0) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{r}(0) = 7\mathbf{i} + \mathbf{k}$

34 $\mathbf{r}''(t) = 6t\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$,
$\mathbf{r}'(0) = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{r}(0) = 5\mathbf{j}$

Exercs. 35-36: Se uma curva C tem vetor tangente a em um ponto P, então o *plano normal* a C em P é o plano por P com vetor normal a. Ache a equação do plano normal à curva dada em P.

35 $x = e^t$, $y = te^t$, $z = t^2 + 4$; $P(1, 0, 4)$

36 $x = t\operatorname{sen} t$, $y = t\cos t$, $z = t$; $P(\pi/2, 0, \pi/2)$

Exercs. 37-38: Ache $D_t[\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}(t)]$ e $D_t[\mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}(t)]$.

37 $\mathbf{u}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, $\mathbf{v}(t) = \operatorname{sen} t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + 2\operatorname{sen} t\mathbf{k}$

38 $\mathbf{u}(t) = 2t\mathbf{i} + 6t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$, $\mathbf{v}(t) = e^{-t}\mathbf{i} - e^{-t}\mathbf{j} + \mathbf{k}$

39 Se u e v são funções vetoriais que têm limites quando $t \to a$, prove:

(a) $\lim_{t\to a}[\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)] = \lim_{t\to a}\mathbf{u}(t) + \lim_{t\to a}\mathbf{v}(t)$

(b) $\lim_{t\to a}[\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}(t)] = \lim_{t\to a}\mathbf{u}(t)\cdot\lim_{t\to a}\mathbf{v}(t)$

(c) $\lim_{t\to a} c\mathbf{u}(t) = c\lim_{t\to a}\mathbf{u}(t)$, onde c é um escalar.

40 Se uma função escalar f e uma função vetorial u têm limites quando $t \to a$, prove que

$$\lim_{t\to a} f(t)\mathbf{u}(t) = \left[\lim_{t\to a} f(t)\right]\left[\lim_{t\to a}\mathbf{u}(t)\right]$$

41 Prove que $\lim_{t\to a}\mathbf{u}(t) = \mathbf{b}$ se e somente se, para todo $\in > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{b}\| < \in$ sempre que $0 < |t - a| < \delta$. Descreva graficamente este resultado.

42 Se u e v têm limites quando $t \to a$, prove que

$$\lim_{t\to a}[\mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}(t)] = \left[\lim_{t\to a}\mathbf{u}(t)\right]\times\left[\lim_{t\to a}\mathbf{v}(t)\right]$$

Exercs. 43-44: Se u e v são diferenciáveis, prove as regras para derivadas:

43 $D_t[\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) + \mathbf{v}'(t)$

44 $D_t[\mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}'(t) + \mathbf{u}'(t)\times\mathbf{v}(t)$

45 Se f e u são diferenciáveis, prove que

$$D_t[f(t)\mathbf{u}(t)] = f(t)\mathbf{u}'(t) + f'(t)\mathbf{u}(t)$$

46 Se f e u são diferenciáveis com domínios convenientemente restritos, prove a regra da cadeia

$$D_t\mathbf{u}(f(t)) = f'(t)\,\mathbf{u}'(f(t))$$

47 Se u, v e w são diferenciáveis, prove que

$$D_t[\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}(t)\times\mathbf{w}(t)] = [\mathbf{u}'(t)\cdot\mathbf{v}(t)\times\mathbf{w}(t)] + [\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}'(t)\times\mathbf{w}(t)] + [\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}(t)\times\mathbf{w}'(t)]$$

48 Se u'(t) e u''(t) existem, prove que

$$D_t[\mathbf{u}(t)\times\mathbf{u}'(t)] = \mathbf{u}(t)\times\mathbf{u}''(t).$$

49 Se u e v são integráveis em $[a, b]$ e c é um escalar, prove:

(a) $\int_a^b [\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)]\,dt = \int_a^b \mathbf{u}(t)\,dt + \int_a^b \mathbf{v}(t)\,dt$

(b) $\int_a^b c\mathbf{u}(t)\,dt = c\int_a^b \mathbf{u}(t)\,dt$

50 Se u é integrável em $[a, b]$ e c pertence a V_3, prove que

$$\int_a^b \mathbf{c}\cdot\mathbf{u}(t)\,dt = \mathbf{c}\cdot\int_a^b \mathbf{u}(t)\,dt$$

15.3 MOVIMENTO

O movimento se verifica em geral em um plano. Assim é que, por exemplo, embora a Terra se mova no espaço, sua órbita jaz em um plano. (Isto será provado na Seção 15.6). Para estudar o movimento de um ponto P em um plano coordenado, é essencial conhecer sua posição (x, y) a todo instante. Como de hábito, para *objetos* em movimento suporemos que sua massa esteja concentrada em P. Sejam as coordenadas de P dadas pelas equações paramétricas

$$x = f(t),\ y = g(t)$$

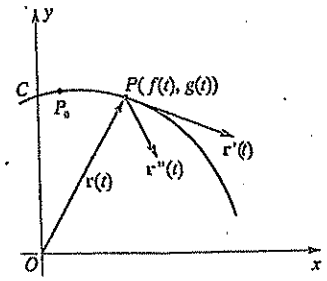


Figura 15.14

com t em um intervalo I. Fazendo

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$$

então, quando t varia em I, a extremidade de $\mathbf{r}(t)$ descreve a trajetória C do ponto. Chamamos $\mathbf{r}(t)$ o **vetor posição de P**. Conforme Figura 15.14, representamos

$$\mathbf{r}'(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j}$$

como um vetor tangente a C com ponto inicial P. O vetor $\mathbf{r}'(t)$ aponta na direção dos valores crescentes de t e tem módulo

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}$$

Seja t_0 um número em I, e seja P_0 o ponto C correspondente a t_0 (ver Figura 15.14). Se C é suave, então, pelo Teorema (13.5), o comprimento de arco $s(t)$ de C de P_0 a P é

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt = \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt$$

Aplicando o Teorema (5.35), obtemos

$$D_t\,[s(t)] = D_t \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt = \|\mathbf{r}'(t)\|$$

Assim, $\|\mathbf{r}'(t)\|$ *é a taxa de variação do comprimento de arco em relação ao tempo.* Por esta razão chamamos $\|\mathbf{r}'(t)\|$ módulo da velocidade do ponto. O vetor tangente $\mathbf{r}'(t)$ se define com a *velocidade vetorial* do ponto P no instante t, e o vetor $\mathbf{r}''(t)$ é a *aceleração* de P. Tal como no caso de $\mathbf{r}'(t)$, representaremos $\mathbf{r}''(t)$ graficamente por um vetor com ponto inicial P. Na maioria dos casos, $\mathbf{r}''(t)$ está dirigido para o lado côncavo de C, conforme ilustrado na Figura 15.14.

A próxima definição resume o assunto e introduz os símbolos $\mathbf{v}$ e $\mathbf{a}$ para a velocidade e a aceleração.

Definição (15.12)

Seja $\mathbf{r}(t) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$, o vetor posição de um ponto $P(x, y)$ em movimento em um plano-xy, onde t é o tempo e f e g têm derivadas primeira e segunda. A velocidade vetorial, a velocidade e a aceleração de P no instante t são:

Velocidade vetorial: $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \dfrac{dx}{dt}\mathbf{i} + \dfrac{dy}{dt}\mathbf{j}$

Velocidade:

$$v(t) = \|\mathbf{v}(t)\| = \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

Aceleração: $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t) = \dfrac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \dfrac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j}$

EXEMPLO 1

O vetor posição de um ponto P que se move em um plano-xy é

$$\mathbf{r}(t) = (t^2 + t)\mathbf{i} + t^3\mathbf{j},\ 0 \le t \le 2$$

(a) Ache a velocidade e a aceleração de P no instante t.

(b) Esboce a trajetória C do ponto, juntamente com $\mathbf{v}(1)$ e $\mathbf{a}(1)$.

SOLUÇÃO

(a) A velocidade e a aceleração são

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = (2t + 1)\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} \text{ e } \mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = 2\mathbf{i} + 6t\mathbf{j}$$

(b) As equações paramétricas de C (obtidas de $\mathbf{r}(t)$) são

$$x = t^2 + t,\ y = t^3;\ 0 \le t \le 2$$

A tabela relaciona as coordenadas de vários pontos (x, y) em C.

t	0	0,5	1	1,5	2
x	0	0,75	2	3,75	6
y	0	0,125	1	3,375	8

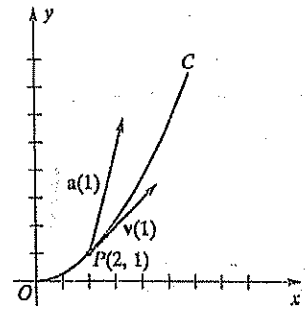


Figura 15.15

Marcando os pontos e levando em conta a continuidade dos componentes escalares de $\mathbf{r}(t)$, obtemos o esboço de C na Figura 15.15.

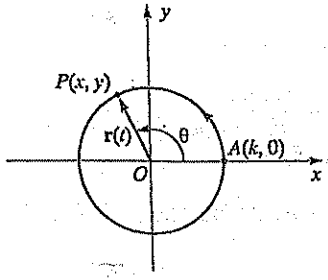


Figura 15.16

Em $t = 1$, o ponto está em $P(2, 1)$ com

$$\mathbf{v}(1) = \mathbf{r}'(1) = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} \text{ e } \mathbf{a}(1) = \mathbf{r}''(1) = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$$

A Figura 15.15 ilustra esses vetores.

EXEMPLO 2

Mostre que, se um ponto P se move em um círculo de raio k a uma velocidade constante v, o vetor aceleração tem módulo constante v^2/k e é dirigido de P para o centro do círculo.

SOLUÇÃO

Suponhamos que o centro do círculo seja a origem O em um plano-xy, e que a orientação seja anti-horária. Suponhamos ainda que, no instante $t = 0$, o ponto P esteja em $A(k, 0)$ e que θ seja o ângulo gerado por OP após t unidades de tempo (ver Figura 15.16). Como P percorre o círculo com velocidade constante, a taxa de variação de θ em relação a t (a **velocidade angular**) é uma constante ω. Assim,

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \text{ ou } d\theta = \omega\, dt$$

A integração dá

$$\int d\theta = \int \omega\, dt \text{ ou } \theta = \omega t + c$$

para alguma constante c. Como $\theta = 0$ quando $t = 0$, vemos que $c = 0$, isto é, $\theta = \omega t$. Assim, as coordenadas (x, y) de P são

$$x = k\cos\omega t,\ y = k\operatorname{sen}\omega t$$

e o vetor posição de P é

$$\mathbf{r}(t) = k\cos\omega t\,\mathbf{i} + k\operatorname{sen}\omega t\,\mathbf{j}$$

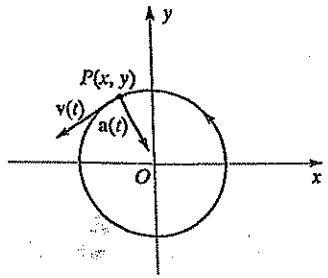


Figura 15.17

Conseqüentemente,

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = -\omega k\operatorname{sen}\omega t\,\mathbf{i} + \omega k\cos\omega t\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = -\omega^2 k\cos\omega t\,\mathbf{i} - \omega^2 k\operatorname{sen}\omega t\,\mathbf{j}$$

e então

$$\mathbf{a}(t) = -\omega^2(k\cos\omega t\,\mathbf{i} + k\operatorname{sen}\omega t\,\mathbf{j}) = -\omega^2\mathbf{r}(t).$$

Isto mostra que a direção do vetor aceleração $\mathbf{a}(t)$ é oposta à de $\mathbf{r}(t)$ e, assim, $\mathbf{a}(t)$ está dirigido de P para O, conforme Figura 15.17, que também apresenta o vetor velocidade $\mathbf{v}(t)$.

O módulo de $\mathbf{a}(t)$ é

$$\|\mathbf{a}(t)\| = \|-\omega^2\mathbf{r}(t)\| = |-\omega^2|\,\|\mathbf{r}(t)\| = \omega^2 k$$

que é uma constante. Além disso,

$$v = \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{(-\omega k)^2\operatorname{sen}^2\omega t + (\omega k)^2\cos^2\omega t} = \sqrt{\omega^2 k^2} = \omega k$$

e, então, $\omega = v/k$. A substituição na fórmula $\|\mathbf{a}(t)\| = \omega^2 k$ nos dá o módulo constante

$$\|\mathbf{a}(t)\| = \frac{v^2}{k}$$

O vetor aceleração $\mathbf{a}(t)$ no Exemplo 2 é chamado **vetor de aceleração centrípeta**, e a força que produz $\mathbf{a}(t)$ é uma **força centrípeta**. Note que o módulo $\|\mathbf{a}(t)\| = v^2/k$ aumenta se aumentarmos v ou reduzimos k, fato evidente para quem quer que tenha amarrado um objeto à ponta de uma corda, fazendo-a girar segundo uma trajetória circular.

Nosso estudo do movimento pode estender-se a um ponto P que se move em um sistema coordenado tridimensional. Suponhamos que as coordenadas de P no instante t sejam $(f(t), g(t), h(t))$, com f, g, h definidas em um intervalo I. O vetor posição de P é

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

Ao variar t, o ponto terminal P de $\mathbf{r}(t)$ descreve a trajetória. Tal como na Definição (15.12), a derivada $\mathbf{r}'(t)$, se existe, é o vetor **velocidade** $\mathbf{v}(t)$ no instante t e é um vetor tangente a C em P. O vetor $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$ é a **aceleração** no instante t. $v(t)$ é o módulo $\|\mathbf{v}(t)\|$ da velocidade e, como no caso de duas dimensões, é igual à taxa de variação do comprimento de arco em relação ao tempo.

EXEMPLO 3

O vetor posição de P é $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2$. Ache a velocidade e a aceleração de P no instante t. Esboce a trajetória de P e exiba $\mathbf{v}(1)$ e $\mathbf{a}(1)$.

SOLUÇÃO

A velocidade e a aceleração são

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = 2\mathbf{i} + 6t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k} \text{ e } \mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = 6\mathbf{j} + 6t\mathbf{k}.$$

Em $t = 1$, o ponto está em $P(2, 3, 1)$ e

$$\mathbf{v}(1) = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \text{ e } \mathbf{a}(1) = 6\mathbf{j} + 6\mathbf{k}.$$

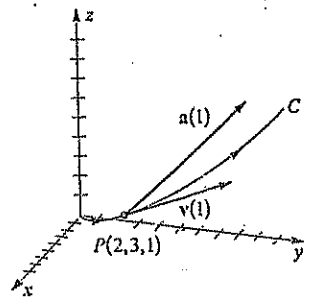


Figura 15.18

A Figura 15.18 mostra estes vetores e a trajetória do ponto. A trajetória é uma cúbica reversa (ver Exemplo 3 e Exercício 27 da Seção 15.1).

No estudo do torque no fim da Seção 14.4, vimos que o produto vetorial de vetores é utilizado na investigação do movimento rotacional. O exemplo seguinte é outra ilustração do fato.

EXEMPLO 4

Um ponto P gira em torno do eixo-z em um círculo de raio k situado em um plano $z = h$, conforme Figura 15.19. A velocidade angular $d\theta/dt$ é uma constante ω. O vetor $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$ dirigido segundo o eixo-z e com módulo ω é a **velocidade angular** de P. Mostre que a velocidade $\mathbf{v}(t)$ de P é o produto vetorial de $\boldsymbol{\omega}$ e do vetor posição $\mathbf{r}(t)$ de P.

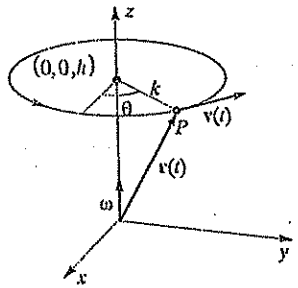


Figura 15.19

SOLUÇÃO

Estendendo o Exemplo 2 a três dimensões, vemos que o movimento de P é dado por

$$\mathbf{r}(t) = k\cos\omega t\,\mathbf{i} + k\,\text{sen}\,\omega t\,\mathbf{j} + h\mathbf{k}$$

Aplicando a definição de produto vetorial, temos

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ k\cos\omega t & k\,\text{sen}\,\omega t & h \end{vmatrix}$$

$$= -\omega k\,\text{sen}\,\omega t\,\mathbf{i} + \omega k\cos\omega t\,\mathbf{j} = \mathbf{r}'(t) = \mathbf{v}(t)$$

A lei seguinte é utilizada com freqüência no estudo de objetos em movimento.

Segunda lei de movimento de Newton (15.13)

> A força $\mathbf{F}$ que atua sobre um objeto de massa constante m está relacionada com a aceleração $\mathbf{a}$ do objeto como segue:
>
> $$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

No próximo exemplo aplicaremos (15.13) para determinar a posição de um objeto que se move próximo à superfície da Terra apenas sob a influência da gravidade, isto é, desprezam-se a resistência do ar e outras forças que poderiam afetar a aceleração. Admitiremos também que o solo é plano e que a curvatura da terra não influi na trajetória do objeto.

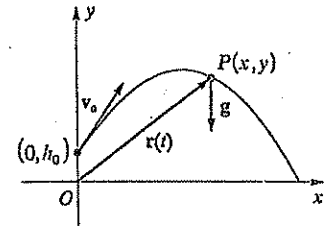


Figura 15.20

EXEMPLO 5

Lança-se um projétil, com velocidade inicial $\mathbf{v}_0$, de um ponto h_0 metros acima do solo. Se a única força que atua sobre o projétil é causada pela aceleração gravitacional $\mathbf{g}$, determine sua posição após t segundos.

SOLUÇÃO

Introduzamos um plano-xy, conforme Figura 15.20, onde $(0, h_0)$ é o ponto de onde o projétil é lançado. Denotemos por $P(x, y)$ a posição do projétil após t segundos, e seja $\mathbf{r}(t)$ o vetor posição de P. Como $\mathbf{g}$ atua na direção para baixo,

$$\mathbf{g} = -g\mathbf{j} \text{ e } \|\mathbf{g}\| = g = 9{,}8 \text{ m sec}^2$$

Pela segunda lei de Newton (15.13), $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, onde $\mathbf{a}$ é a aceleração do projétil. Na situação presente, $m\mathbf{a} = m\mathbf{g}$, ou $\mathbf{a} = \mathbf{g}$, o que conduz à equação diferencial vetorial.

$$\mathbf{r}''(t) = \mathbf{g}$$

A integração indefinida dá

$$\mathbf{r}'(t) = t\mathbf{g} + \mathbf{c}$$

para algum vetor constante $\mathbf{c}$. Como $\mathbf{r}'(t)$ é a velocidade no instante t,

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{r}'(0) = \mathbf{c}$$

e então $$\mathbf{r}'(t) = t\mathbf{g} + \mathbf{v}_0$$

Por integração indefinida,

$$\mathbf{r}(t) = \tfrac{1}{2}t^2\mathbf{g} + t\mathbf{v}_0 + \mathbf{d}$$

para algum vetor constante $\mathbf{d}$. Como $\mathbf{r}(0) = h_0\mathbf{j}$ (ver Figura (15.20)), segue-se que $\mathbf{d} = h_0\mathbf{j}$. Conseqüentemente

$$\mathbf{r}(t) = \tfrac{1}{2}t^2\mathbf{g} + t\mathbf{v}_0 + h_0\mathbf{j}$$

Como $\mathbf{g} = -g\mathbf{j}$, podemos também escrever

$$\mathbf{r}(t) = (-\tfrac{1}{2}t^2g + h_0)\mathbf{j} + t\mathbf{v}_0$$

EXEMPLO 6

Suponhamos, no Exemplo 5, que o projétil seja lançado de O e que o vetor velocidade inicial $\mathbf{v}_0$ faça um ângulo α com a horizontal.

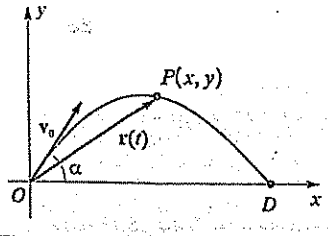


Figura 15.21

(a) Escreva equações paramétricas e uma equação em x e y para a trajetória do projétil.

(b) Ache o alcance do projétil – isto é, a distância horizontal que ele percorre antes de atingir o solo. Qual o alcance máximo?

(c) Ache a altitude máxima alcançada pelo projétil.

SOLUÇÃO

(a) A Figura 15.21 ilustra este caso especial no Exemplo 5. Um vetor unitário $\mathbf{u}$ de mesma direção que $\mathbf{v}_0$ é

$$\mathbf{u} = \cos\alpha\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\alpha\,\mathbf{j}$$

Assim, se $\|\mathbf{v}_0\| = v_0$, então $\mathbf{v}_0 = v_0\mathbf{u} = (v_0 \cos\alpha)\mathbf{i} + (v_0 \operatorname{sen}\alpha)\mathbf{j}$.

Aplicando a fórmula de $\mathbf{r}(t)$ obtida no Exemplo 5 com $h_0 = 0$, obtemos

$$\mathbf{r}(t) = (-\tfrac{1}{2}gt^2)\mathbf{j} + t[(v_0 \cos\alpha)\mathbf{i} + (v_0 \operatorname{sen}\alpha)\mathbf{j}]$$

$$= t(v_0 \cos\alpha)\mathbf{i} + (-\tfrac{1}{2}gt^2 + tv_0 \operatorname{sen}\alpha)\mathbf{j}.$$

Logo, as equações paramétricas da trajetória do projétil são

$$x = (v_0 \cos\alpha)t, \quad y = -\tfrac{1}{2}gt^2 + (v_0 \operatorname{sen}\alpha)t$$

Eliminando o parâmetro chegamos à seguinte equação em coordenadas retangulares:

$$y = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}x^2 + (tg\ \alpha)x$$

Isto mostra que a trajetória do projétil é parabólica.

(b) Para achar o alcance do projétil, devemos determinar o ponto D na Figura 15.21 em que ele toca o solo. Como a coordenada-y de D é 0, façamos $y = 0$ na segunda equação paramétrica da parte (a) e fatoremos, obtendo

$$t(-\tfrac{1}{2}gt + v_0 \operatorname{sen}\alpha) = 0$$

Assim, ou

$$t = 0 \quad \text{ou} \quad -\tfrac{1}{2}gt + v_0 \operatorname{sen}\alpha = 0$$

Segue-se que o projétil está em O se $t = 0$ e em D se

$$\tfrac{1}{2}gt = v_0 \operatorname{sen}\alpha, \quad \text{ou} \quad t = \frac{2v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g}$$

Utilizando a segunda equação paramétrica da parte (a), obtemos a distância $d(O, D)$ de O a D:

$$d(O, D) = (v_0 \cos\alpha)\left(\frac{2v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g}\right) = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g}$$

Em particular, o alcance do projétil atingirá seu valor máximo v_0^2/g se $\operatorname{sen} 2\alpha = 1$ ou $\alpha = 45°$.

(c) Diferenciando $\mathbf{r}(t)$ (ver (a)), obtemos o vetor velocidade

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = (v_0 \cos\alpha)\mathbf{i} + (-gt + v_0 \operatorname{sen}\alpha)\mathbf{j}$$

Na altitude máxima, este vetor tangente à trajetória do projétil é horizontal, isto é, o componente-$\mathbf{j}$ é zero. Isto nos dá $t = (v_0 \operatorname{sen}\alpha)/g$. Podemos também chegar a este resultado tomando a metade do tempo necessário para o projétil alcançar D. Levando este valor de t na equação paramétrica de y obtida na parte (a), obtemos

$$h = -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g}\right)^2 + (v_0 \operatorname{sen}\alpha)\left(\frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g}\right) = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{2g}$$

EXERCÍCIOS 15.3

Exercs. 1-8: Seja $\mathbf{r}(t)$ o vetor posição de um ponto móvel P. Esboce a trajetória C de P juntamente com $\mathbf{v}(t)$ e $\mathbf{a}(t)$ para o valor dado de t.

1 $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + (4t^2 + 1)\mathbf{j}$; $t = 1$

2 $\mathbf{r}(t) = (4 - 9t^2)\mathbf{i} + 3t\mathbf{j}$; $t = 1$

3 $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} t\mathbf{i} + 4\cos 2t\mathbf{j}$; $t = \pi/6$

4 $\mathbf{r}(t) = \cos^2 t\mathbf{i} + 2\operatorname{sen} t\mathbf{j}$; $t = 3\pi/4$

5 $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$; $t = \pi/2$

6 $\mathbf{r}(t) = 4\operatorname{sen} t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 9\cos t\mathbf{k}$; $t = 3\pi/4$

7 $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$; $t = 1$

8 $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + t\mathbf{k}$; $t = 2$

Exercs. 9-16: Se $\mathbf{r}(t)$ é o vetor posição de um ponto móvel P, ache a velocidade, a aceleração e o módulo da velocidade no instante dado t.

9 $\mathbf{r}(t) = \frac{2}{t}\mathbf{i} + \frac{3}{t+1}\mathbf{j}$; $t = 2$

10 $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\,\mathbf{i} + (1 + \sqrt{t})\mathbf{j}$; $t = 4$

11 $\mathbf{r}(t) = e^{2t}\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j}$; $t = 0$

12 $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + e^{-t^2}\mathbf{j}$; $t = 1$

13 $\mathbf{r}(t) = e^t(\cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j} + \mathbf{k})$; $t = \pi/2$

14 $\mathbf{r}(t) = t(\cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j} + t\mathbf{k})$; $t = \pi/2$

15 $\mathbf{r}(t) = (1 + t)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + (2 + 3t)\mathbf{k}$; $t = 2$

16 $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + \mathbf{j} + 9t^2\mathbf{k}$; $t = 2$

17 Se um ponto se move com velocidade constante, prove que os vetores velocidades e aceleração são ortogonais. (*Sugestão*: Ver Teorema (15.9).)

18 Se a aceleração de um ponto móvel é sempre 0, prove que o movimento se processa ao longo de uma reta.

Exercs. 19-20: Resolva, utilizando os resultados do Exemplo 2 e 6.300 quilômetros para o raio da Terra.

19 Um foguete está em órbita circular a 240 quilômetros acima da superfície da Terra. Aproxime: (a) sua velocidade, (b) o tempo necessário para uma revolução.

20 Um satélite está em órbita circular. Se o tempo necessário para uma revolução é 88 minutos, aproxime a altitude do satélite.

Exercs. 21-24: Resolva, usando os resultados do Exemplo 5.

21 Um projétil é lançado do solo com velocidade inicial de 456 m/s e ângulo de elevação de 30°. Determine:

(a) a velocidade no instante t

(b) a altitude máxima

(c) o alcance

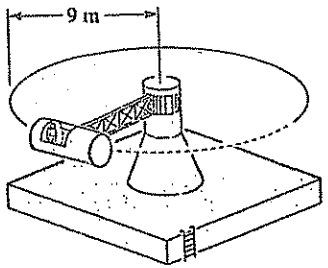
(d) a velocidade com que o projétil atinge o solo

22 Faça o Exercício 21 para um ângulo de elevação de 60°.

23 Um jogador de beisebol lança a bola a uma distância de 100 metros. Se a bola é liberada a um ângulo de 45° com a horizontal, ache sua velocidade inicial.

24 Um projétil é lançado horizontalmente com uma velocidade de 550 m/s, de uma altura de 300 metros acima do solo. Quando atingirá o solo?

25 Para testar a capacidade de resistir a forças-G, um astronauta é colocado na extremidade de um dispositivo centrífugo (ver figura) que gira a uma velocidade angular ω. Se o braço tem 9 metros de comprimento, ache o número de revoluções por segundo que resulte em uma aceleração oito vezes a da gravidade g. (Use $\|\mathbf{g}\| = 9{,}8\ \text{m/s}^2$.)



26 As órbitas da Terra, de Vênus e de Netuno são quase circulares. Com as informações abaixo, estime a velocidade (média) de cada planeta, a menos de 0,1 km/s.

Planeta	Período (dias)	Distância do sol (10^6 km)
Terra	365,3	149,6
Vênus	224,7	108,2
Netuno	60,188	4.498

27 Um satélite se move em órbita circular em torno da Terra a uma distância de d quilômetros da superfície da Terra. A magnitude da força de atração F entre o satélite e a Terra é

$$\|\mathbf{F}\| = G\frac{mM}{(R+d)^2},$$

onde m é a massa do satélite, M é a massa da Terra, R é o raio da Terra e G é uma constante gravitacional. Use os resultados do Exemplo 2 para estabelecer a terceira lei de Kepler para órbitas circulares:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}(R+d)^3$$

onde T é o período do satélite. (*Sugestão*: $\|\mathbf{F}\|$ também é dada por $m\|\mathbf{r}''(t)\|$.)

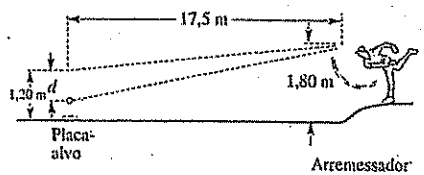
28 Ref. Exercício 27. Se o período de um satélite é medido em dias, a terceira lei de Kepler para órbitas circulares pode ser escrita $T^2 = 0{,}00346[1 + (d/R)]^3$.

(a) Um satélite se move em órbita circular a 1.600 km acima da superfície da Terra. Admitindo que o raio da Terra seja de 6.300 km, estime o período da órbita do satélite a menos de 0,01 hora.

(b) Em uma *órbita geossíncrona*, um satélite está sempre na mesma posição em relação à Terra, isto é, o período do satélite é de um dia. Estime, a menos de 1 km, a distância de tal satélite à superfície da Terra. (Informações deste tipo são necessárias para posicionar satélites de comunicação.)

Exercs. 29-30: Resolva, utilizando os resultados do Exemplo 6.

29 Um arremessador lança uma bola de um ponto a 1,80 m acima do solo e a 17,5 m da placa-alvo a uma velocidade de 160 km/h. Se a gravidade não influísse, a bola seguiria uma reta e passaria a 1,20 m acima da placa, conforme figura. Determine a queda d causada pela gravidade.



30 Um jogador de um time de *rugby* lança um passe, liberando a bola a um ângulo de 30° com a horizontal. Aproxime a velocidade com que a bola deve ser liberada para chegar ao recebedor 45 m campo abaixo. (Desprezar a resistência do ar.)

31 As tesouras verticais de vento nos primeiros 100 m da atmosfera são de grande importância para os aviões durante a decolagem ou a aterrissagem. Define-se a tesoura vertical de vento como $D_z\mathbf{v}$, onde v é a velocidade do vento e h é a altura acima do solo. Durante rajadas fortes de vento em certo aeroporto, a velocidade do vento (em milhas/hora) para altitudes h entre 0 e 60 metros é estimada em

$$\mathbf{v} = (12 + 0{,}006h^{3/2})\mathbf{i} + (10 + 0{,}005h^{3/2})\mathbf{j}$$

Calcule a magnitude (módulo) da tesoura vertical de vento a 45 metros acima do solo.

15.4 CURVATURA

Quando um ponto se move sobre uma curva C, pode mudar de direção mais, ou menos, rapidamente, dependendo de quanto a curva vire. Para medir a taxa à qual C vira, ou muda de forma, utilizamos a noção de *curvatura*. Se $\mathbf{r}$ é uma função vetorial e a curva C determinada por $\mathbf{r}(t)$ é suave, então $\mathbf{r}'(t)$ é um vetor tangente a C que aponta sempre na direção determinada pela orientação de C. Se $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$, define-se como segue o *vetor unitário tangente* $\mathbf{T}(t)$ a C:

Vetor tangente unitário (15.14)

$$\mathbf{T}(t) = \frac{1}{\|\mathbf{r}'(t)\|}\mathbf{r}'(t)$$

Como $\|\mathbf{T}(t)\| = 1$ para todo t, vemos, pelo Teorema (15.9), que, se $\mathbf{T}$ é diferenciável, então $\mathbf{T}'(t)$ é ortogonal a $\mathbf{T}(t)$. Define-se o *vetor unitário normal principal* $\mathbf{N}(t)$ a C como o vetor unitário de mesma direção que $\mathbf{T}'(t)$:

Vetor unitário normal principal (15.15)

$$\mathbf{N}(t) = \frac{1}{\|\mathbf{T}'(t)\|}\mathbf{T}'(t)$$

As fórmulas (15.14) e (15.15) aplicam-se tanto a curvas planas como a curvas no espaço.

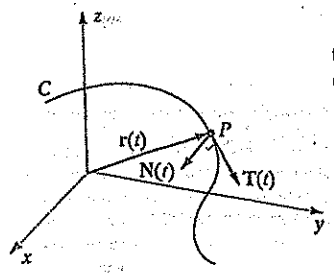


Figura 15.22

Ao representar $\mathbf{T}(t)$ ou $\mathbf{N}(t)$ por segmentos orientados, tomamos o ponto inicial no ponto P de C correspondente a t, conforme ilustrado na Figura 15.22, onde utilizamos o símbolo $\angle$ de ângulo reto para frizar que $\mathbf{N}(t)$ e $\mathbf{T}(t)$ são ortogonais. Como o vetor tangente $\mathbf{r}'(t)$ aponta na direção dos valores crescentes de t, o mesmo acontece com $\mathbf{T}(t)$.

EXEMPLO 1

Seja C a curva plana definida por $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j}$.

(a) Ache os unitários $\mathbf{T}(t)$ e $\mathbf{N}(t)$ da tangente e da normal.

(b) Esboce C, $\mathbf{T}(1)$ e $\mathbf{N}(1)$.

SOLUÇÃO

(a) Por (15.14) com $\mathbf{r}'(t) = 2t\mathbf{i} + \mathbf{j}$,

$$\mathbf{T}(t) = \frac{1}{(4t^2+1)^{1/2}}(2t\mathbf{i}+\mathbf{j}) = \frac{2t}{(4t^2+1)^{1/2}}\mathbf{i} + \frac{1}{(4t^2+1)^{1/2}}\mathbf{j}$$

Diferenciando os componentes de $\mathbf{T}(t)$, obtemos

$$\mathbf{T}'(t) = \frac{1}{(4t^2+1)^{3/2}}\mathbf{i} - \frac{4t}{(4t^2+1)^{3/2}}\mathbf{j} = \frac{2}{(4t^2+1)^{3/2}}(\mathbf{i}-2t\mathbf{j}).$$

É fácil verificar que

$$\|\mathbf{T}'(t)\| = \frac{2}{4t^2+1}$$

Aplicando (15.15) e simplificando, obtemos

$$\mathbf{N}(t) = \frac{1}{(4t^2+1)^{1/2}}(\mathbf{i} - 2t\mathbf{j})$$

(b) O ponto P correspondente a $t = 1$ é $(1, 1)$. Substituindo,

$$\mathbf{T}(1) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\mathbf{i}+\mathbf{j}) \quad \text{e} \quad \mathbf{N}(1) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\mathbf{i}-2\mathbf{j})$$

Para verificar a ortogonalidade de $\mathbf{T}(1)$ e $\mathbf{N}(1)$, mostramos que $\mathbf{T}(1)\cdot\mathbf{N}(1) = 0$. A Figura 15.23 é um esboço desses vetores e da curva (uma parábola).

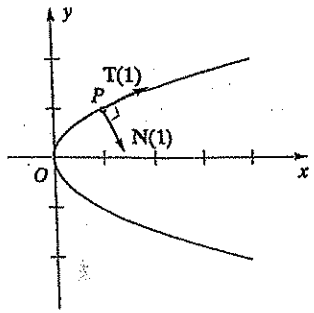


Figura 15.23

EXEMPLO 2

Seja C determinada por

$$\mathbf{r}(t) = 4\cos t\mathbf{i} + 4\operatorname{sen} t\mathbf{j} + 3t\mathbf{k},\ t \geq 0$$

Esboce C e ache $\mathbf{T}(t)$ e $\mathbf{N}(t)$.

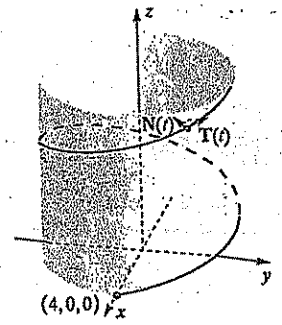


Figura 15.24

SOLUÇÃO

A curva é a hélice circular de raio 4 da Figura 15.24 (ver Exemplo 4, Seção 15.1). Diferenciando $\mathbf{r}(t)$ e aplicando a Definição (15.14), obtemos:

$$\mathbf{r}'(t) = -4\operatorname{sen} t\mathbf{i} + 4\cos t\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{16\operatorname{sen}^2 t + 16\cos^2 t + 9} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$$\mathbf{T}(t) = \frac{1}{\|\mathbf{r}'(t)\|}\mathbf{r}'(t) = -\frac{4}{5}\operatorname{sen} t\mathbf{i} + \frac{4}{5}\cos t\mathbf{j} + \frac{3}{5}\mathbf{k}$$

Diferenciando $\mathbf{T}(t)$ e utilizando a Definição (15.15), obtemos

$$\mathbf{T}'(t) = -\frac{4}{5}\cos t\mathbf{i} - \frac{4}{5}\operatorname{sen} t\mathbf{j}$$

$$\|\mathbf{T}'(t)\| = \sqrt{\tfrac{16}{25}\cos^2 t + \tfrac{16}{25}\operatorname{sen}^2 t} = \sqrt{\tfrac{16}{25}} = \tfrac{4}{5}$$

$$\mathbf{N}(t) = \frac{1}{\|\mathbf{T}'(t)\|}\mathbf{T}'(t) = -\cos t\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\mathbf{j}$$

Para verificar a ortogonalidade de $\mathbf{T}(t)$ e $\mathbf{N}(t)$, mostra-se que $\mathbf{T}(t)\cdot\mathbf{N}(t) = 0$.

A Figura 15.24 exibe vetores unitários típicos $\mathbf{T}(t)$ e $\mathbf{N}(t)$. Note-se que a normal principal $\mathbf{N}(t)$ à hélice circular é sempre paralela ao plano-xy e aponta para o eixo-z.

Para definir a curvatura, começaremos com as curvas planas. As curvas reversas, ou curvas no espaço, serão consideradas mais adiante.

Uma curva plana suave C admite muitas parametrizações diferentes. Às vezes é conveniente usar como parâmetro o comprimento de arco medido ao longo de C. Conforme Figura 15.25, seja A um ponto fixo de C e denotemos por s o comprimento do arco $\widehat{AP}$ de A a um ponto arbitrário $P(x, y)$ de C. Suponhamos C dada parametricamente por

$$x = f(s),\ y = g(s);\ s = \text{comprimento de } \widehat{AP}$$

Assim, a cada valor de s corresponde um ponto $P(f(s), g(s))$ em C que está a s unidades de A, medidas ao longo de C. A orientação de C é determinada pelos valores crescentes de s. Chamaremos s o *parâmetro comprimento de arco*, para a curva C.

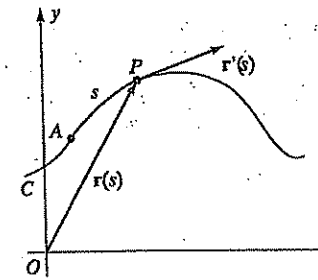


Figura 15.25

A próxima definição resume o que acabamos de dizer.

Definição (15.16)

Uma variável s é um **parâmetro comprimento de arco** para uma curva C se existe uma parametrização

$$x = f(s), y = g(s)$$

tal que s seja o comprimento de C de um ponto fixo A na curva ao ponto $P(x, y)$. As equações paramétricas constituem uma **parametrização por comprimento de arco** para a curva C.

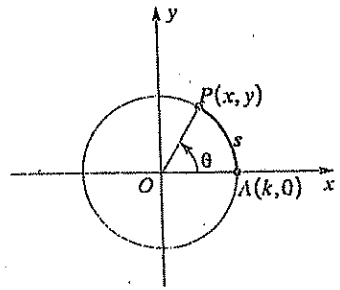


Figura 15.26

EXEMPLO 3

Ache uma parametrização por comprimento de arco para o círculo $x^2 + y^2 = k^2, k > 0$.

SOLUÇÃO

Sejam $A(k, 0)$ o ponto fixo da Definição (15.16) e $P(x, y)$ um ponto arbitrário do círculo. Denotemos por s o comprimento do arco circular $\overset{\frown}{AP}$, medido em sentido anti-horário de A a P (ver Figura 15.26). Se θ é a medida em radianos do ângulo AOP, então as equações paramátricas do círculo são

$$x = k\cos\theta, y = k\,\text{sen}\,\theta; 0 \le \theta \le 2\pi$$

Por (1.14),

$$s = k\theta, \quad \text{ou} \quad \theta = \frac{s}{k}$$

Como $0 \le s \le 2\pi k$ corresponde a $0 \le \theta \le 2\pi$, uma parametrização por comprimento de arco para o círculo é

$$x = k\cos\frac{s}{k}, \; y = \text{sen}\,\frac{s}{k}; \; 0 \; 2\pi k$$

Tomando um ponto fixo diferente, poderíamos obter outras parametrizações por comprimento de arco.

Nas instruções para os Exercícios 49-52 encontra-se um método geral para obter parametrizações de curvas por comprimento de arco. É um método bastante fastidioso, no mínimo. Entretanto, como veremos, há grande conveniência em trabalharmos com tais parametrizações.

Se uma curva C admite uma parametrização por comprimento de arco como na Definição (15.16), então o vetor posição do ponto $P(x, y)$ de C é

$$\mathbf{r}(s) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = f(s)\mathbf{i} + g(s)\mathbf{j}$$

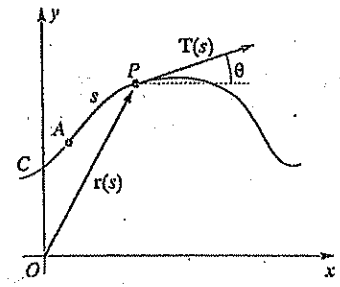


Figura 15.27

Diferenciando em relação ao parâmetro comprimento de arco s obtemos um vetor tangente a C,

$$\mathbf{r}'(s) = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} = f'(s)\mathbf{i} + g'(s)\mathbf{j}$$

O módulo de $\mathbf{r}'(s)$ é

$$\|\mathbf{r}'(s)\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{ds}{ds}\right)^2} = 1$$

onde aplicamos (13.6). Assim, *para uma dada parametrização por comprimento de arco, $\mathbf{r}'(s)$ é um vetor unitário tangente a C em P.* Tal como em (15.14), com $t = s$, denotaremos por $\mathbf{T}(s)$ este vetor tangente unitário.

Para cada valor de s, seja θ o ângulo entre $\mathbf{T}(s)$ e $\mathbf{i}$, conforme ilustrado na Figura 15.27. Note-se que o ângulo θ *é função de s*, pois $\mathbf{T}(s)$ é função de s. Podemos usar a taxa de variação $d\theta/ds$ de θ em relação a s para medir o quanto a curva C muda de direção nos vários pontos. Suponhamos um ponto P que se move ao longo da curva C na Figura 15.28. No ponto R, a curva muda de direção gradativamente, e o ângulo θ entre $\mathbf{T}(s)$ e $\mathbf{i}$ muda lentamente, isto é, $|d\theta/ds|$ é pequeno. Em Q a curva muda de direção bruscamente, e $|d\theta/ds|$ é grande. Com estas observações, motivamos a próxima definição.

Definição (15.17)

Suponhamos que uma curva plana suave C admita uma parametrização por comprimento de arco $x = f(s)$, $y = g(s)$, e seja θ o ângulo entre o vetor tangente unitário $\mathbf{T}(s)$ e $\mathbf{i}$. A curvatura K de C no ponto $P(x, y)$ é

$$K = \left|\frac{d\theta}{ds}\right|$$

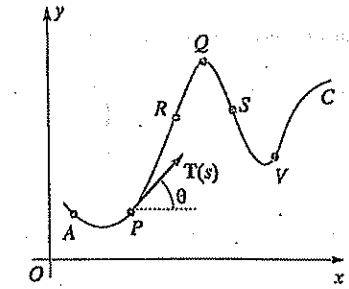


Figura 15.28

Para a curva da Figura 15.28, a curvatura é relativamente pequena nos pontos R e S, e é grande em Q e V. Os dois próximos exemplos constituem ilustrações da Definição (15.17).

EXEMPLO 4

Prove que a curvatura de uma reta l é zero em qualquer ponto de l.

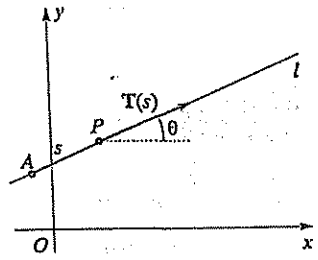


Figura 15.29

SOLUÇÃO

Conforme Figura 15.29, seja A um ponto fixo de l, e seja $s = d(A, P)$. Como o vetor tangente unitário $\mathbf{T}(s)$ a l está sempre em l, o ângulo θ é o mesmo para todo s, isto é, θ é constante. Logo,

$$K = \left| \frac{d\theta}{ds} \right| = |0| = 0$$

EXEMPLO 5

Prove que a curvatura em qualquer ponto de um círculo de raio k é $1/k$.

SOLUÇÃO

Conforme Figura 15.30, admitimos que o círculo tenha seu centro em O, que $A(k, 0)$ seja um ponto fixo, e que o ponto P esteja no primeiro quadrante. Seja s o comprimento do arco $\overset{\frown}{AP}$. Se α é a medida em radianos do ângulo POA, então

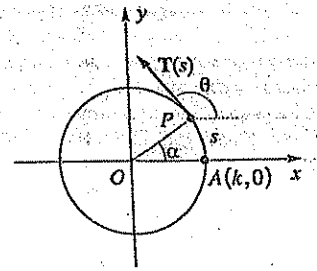


Figura 15.30

$$s = k\alpha \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{s}{k}$$

Referindo-nos à Figura 15.30, e levando em conta o fato de que $\mathbf{T}(s)$ é ortogonal a $\overrightarrow{OP}$, vemos que

$$\theta = \alpha + \frac{\pi}{2} = \frac{s}{k} + \frac{\pi}{2}$$

Diferenciando, obtemos

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{s}{k} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{k} + 0 \ \frac{1}{k}$$

Logo, $K = \left| \frac{d\theta}{ds} \right| = \frac{1}{k}$

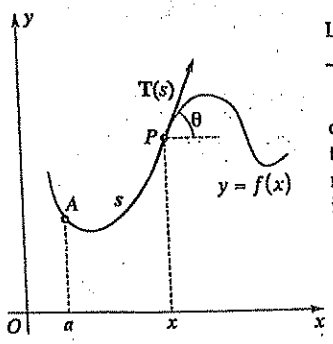


Figura 15.31

Note, pelo Exemplo 5, que, à medida que o raio k de um círculo aumenta, sua curvatura $K = 1/k$ diminui. Fazendo k tender para o infinito, K tende para 0, que é a curvatura de uma reta. Quando o raio k tende para 0, a curvatura K tende para infinito.

Vamos deduzir uma fórmula para achar a curvatura K em um ponto (x, y) do gráfico de $y = f(x)$, com f' contínua em um intervalo. Sejam $\mathbf{T}(s)$ e θ definidos como em (15.17) (ver Figura 15.31). Como y' é o coeficiente angular da reta tangente em P, vemos que

(1) $\quad \operatorname{tg}\theta = y' \quad$ ou $\quad \theta = \operatorname{arc\,tg}\, y'$

Pela Definição (6.16), a função comprimento de arco s pode definir-se por

(2) $$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

onde a é a coordenada-x de um ponto fixo A de C. Se y'' existe, então, pela regra da cadeia,

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{dx} \quad \text{ou} \quad \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta/dx}{ds/dx}$$

Logo, pela Definição (15.17),

(3) $$K = \left| \frac{d\theta}{ds} \right| = \left| \frac{d\theta/ds}{ds/dx} \right|$$

Referindo-nos às equações (1) e (2), temos

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d}{dx} \operatorname{arctg}\, y' = \frac{y''}{1 + (y')^2}$$

$$\frac{ds}{dx} = \frac{d}{dx}\int_a^x \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \sqrt{1 + (y')^2}$$

A substituição em (3) dá o seguinte teorema.

Teorema (15.18) Se uma curva suave C é o gráfico de $y = f(x)$, então a curvatura K em $P(x, y)$ é

$$K = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}}$$

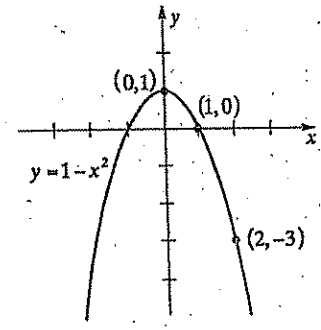


Figura 15.32

EXEMPLO 6

Esboce o gráfico de $y = 1 - x^2$, e ache a curvatura nos pontos (x, y), $(0, 1)$, $(1, 0)$ e $(2, -3)$.

SOLUÇÃO

A Figura 15.32 é um esboço do gráfico (uma parábola). Como $y' = -2x$ e $y'' = -2$, temos, pelo Teorema (15.18),

$$K = \frac{2}{(1 + 4x^2)^{3/2}}$$

Fazendo $x = 0$, 1 e 2, obtemos a seguinte tabela:

Ponto de C	(0,1)	(1,0)	(2, -3)
Curvatura K	2	$\frac{2}{5^{3/2}} \approx 0{,}18$	$\frac{2}{17^{3/2}} \approx 0{,}03$

Note que a curvatura máxima ocorre em (0, 1) e que, quando x aumenta (ou diminui) sem limite, a curvatura em $P(x, y)$ tende para 0.

Vamos agora deduzir uma fórmula para achar a curvatura K no caso de C ser definida em termos de um parâmetro arbitrário t. Suponhamos C dada parametricamente por

$$x = f(t), y = g(t)$$

e que f' e g'' existam para todo t em algum intervalo I. De acordo com o que precede o Teorema (15.18),

$$K = \left|\frac{d\theta}{ds}\right| = \left|\frac{d\theta/dt}{ds/dt}\right|$$

Como o coeficiente angular da tangente a $P(x, y)$ é $g'(t)/f'(t)$ (ver Teorema (13.3)),

$$\text{tg } \theta = \frac{g'(t)}{f'(t)} \quad \text{ou} \quad \theta = \text{arc tg } \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

desde que $f'(t) \neq 0$. Logo,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{1 + [g'(t)/f'(t)]^2} \frac{f'(t)g''(t) - g'(t)f''(t)}{[f'(t)]^2} =$$

$$= \frac{f'(t)g''(t) - g'(t)f''(t)}{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}$$

Além disso, por (13.6),

$$\left|\frac{ds}{dt}\right| = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}$$

Substituindo na fórmula $K = |(d\theta/dt)/(ds/dt)|$, obtemos:

Teorema (15.19)

Se uma curva plana C admite parametrização $x = f(t)$, $y = g(t)$ e se f' e g'' existem, então a curvatura K em $P(x, y)$ é

$$K = \frac{|f'(t)g''(t) - g'(t)f''(t)|}{[(f'(t))^2 + (g'(t))^2]^{3/2}}$$

No próximo exemplo aplicamos o Teorema (15.19) para fazer novamente o Exemplo 5.

EXEMPLO 7

Prove que a curvatura em qualquer ponto de um círculo de raio k é $1/k$.

SOLUÇÃO

As equações paramétricas de um círculo de raio k e centro na origem são

$$x = k \cos t = f(t), y = k \operatorname{sen} t = g(t); 0 \leq t \leq 2\pi$$

Diferenciando, obtemos

$$f'(t) = -k \operatorname{sen} t \; f''(t) = -k \cos t$$

$$g'(t) = k \cos t \; g''(t) = -k \operatorname{sen} t$$

Substituindo em (15.19), obtemos

$$K = \frac{|(-k \operatorname{sen} t)(-k \operatorname{sen} t) - (k \cos t)(-k \cos t)|}{[(-k \operatorname{sen} t)^2 + (k \cos t)^2]^{3/2}}$$

$$= \frac{k^2 \operatorname{sen}^2 t + k^2 \cos^2 t}{(k^2 \operatorname{sen}^2 t + k^2 \cos^2 t)^{3/2}}$$

$$= \frac{k^2}{(k^2)^{3/2}} = \frac{k^2}{k^3} = \frac{1}{k}$$

Se a curvatura K em um ponto P de uma curva C não é 0, então o círculo de raio $\rho = 1/K$, cujo centro está no lado côncavo de C e que tem a mesma tangente que C em P, é o **círculo de curvatura** para P. Seu raio ρ e seu centro são o **raio de curvatura** e o **centro de curvatura** para P, respectivamente. De acordo com os Exemplos 5 e 7, a curvatura do círculo de curvatura é $1/\rho$, ou K e, assim, é a mesma que a curvatura de C. Por esta razão, *o círculo de curvatura pode ser encarado como o círculo que melhor coincide com C em P*. A Figura 15.33 exibe um círculo de curvatura.

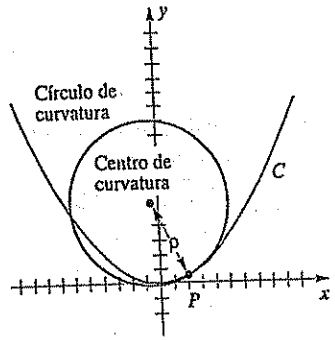


Figura 15.33

EXEMPLO 8

Uma curva C admite a parametrização $x = t^2$, $y = t^3$, t em $\mathbb{R}$. Ache a curvatura no ponto P correspondente a $t = \frac{1}{2}$. Esboce o gráfico de C e do círculo de curvatura para P.

SOLUÇÃO

Fazendo $f(t) = t^2$, $g(t) = t^3$ e diferenciando, temos

$$f'(t) = 2t, f''(t) = 2, g'(t) = 3t^2, g''(t) = 6t$$

Substituindo no Teorema (15.19), temos

$$K = \frac{|(2t)(6t) - (3t^2)(2)|}{[(2t)^2 + (3t^2)^2]^{3/2}} = \frac{6t^2}{(4t^2 + 9t^4)^{3/2}}$$

Se $t = \frac{1}{2}$, então

$$K = \frac{6/4}{(25/16)^{3/2}} = \frac{96}{125} \approx 0{,}768$$

O ponto correspondente a $t = \frac{1}{2}$ tem coordenadas $(\frac{1}{4}, \frac{1}{8})$, e o raio de curvatura ρ nesse ponto é $1/K$, ou $\frac{125}{96} \approx 1{,}3$. O gráfico de C e o círculo de curvatura aparecem na Figura 15.34. Note que a curvatura na origem não existe, pois K não é definido se $t = 0$.

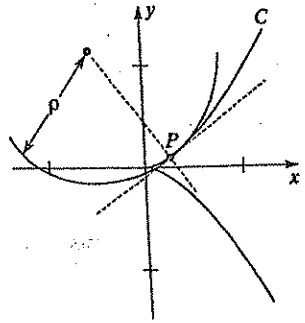


Figura 15.34

A definição de curvatura $K = |d\theta/ds|$ para curvas planas não tem análogo imediato em três dimensões, porque o vetor tangente unitário $\mathbf{T}(s)$ não pode ser definido em termos de um único ângulo θ. É, assim, necessário adotar um método diferente para curvas no espaço. Naturalmente, particularizada para vetores no plano, a nova definição de curvatura deve coincidir com (15.17).

Para obter uma chave para uma definição adequada, notemos primeiro que, em duas dimensões, o vetor tangente unitário $\mathbf{T}(s)$ pode escrever-se como

$$\mathbf{T}(s) = \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}$$

onde θ é o ângulo entre $\mathbf{T}(s)$ e $\mathbf{i}$ (ver Figura 15.28). Encarando θ como função de s e diferenciando, obtemos

$$\mathbf{T}'(s) = \left(-\operatorname{sen}\theta\frac{d\theta}{ds}\right)\mathbf{i} + \left(\cos\theta\frac{d\theta}{ds}\right)\mathbf{j}$$

$$= \frac{d\theta}{ds}(-\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j})$$

$$\text{Logo, } \|\mathbf{T}'(s)\| = \left|\frac{d\theta}{ds}\right| \|-\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}\| = \left|\frac{d\theta}{ds}\right| = K$$

Com isto passemos à definição de curvatura em três dimensões. Nosso esquema consiste em descrever o vetor tangente unitário $\mathbf{T}(s)$ *sem* qualquer referência ao ângulo θ e então *definir* K como $\|\mathbf{T}'(s)\|$.

Suponhamos que uma curva C admita a parametrização por comprimento de arco

$$x = f(s), y = g(s), z = h(s)$$

e que f'', g'' e h'' existam. De acordo com a Figura 15.35, s é o comprimento de arco ao longo de C de um ponto fixo A ao ponto $P(f(s), g(s), h(s))$. Tal como em duas dimensões, se $\mathbf{r}(s) = f(s)\mathbf{i} + g(s)\mathbf{j} + h(s)\mathbf{k}$ é o vetor posição de P, então $\mathbf{r}'(s)$ é o vetor tangente unitário a C em P, denotado por $\mathbf{T}(s)$. Como $\|\mathbf{T}(s)\|$ é uma constante, segue-se que $\mathbf{T}'(s)$ é ortogonal a $\mathbf{T}(s)$ (ver Teorema (15.9)). Se $\mathbf{T}'(s) \neq \mathbf{0}$, fazemos

$$\mathbf{N}(s) = \frac{1}{\|\mathbf{T}'(s)\|}\mathbf{T}'(s)$$

O vetor $\mathbf{N}(s)$ é um vetor unitário ortogonal a $\mathbf{T}(s)$ e é chamado **vetor unitário normal principal** de C em P. A Figura 15.35 ilustra estes conceitos.

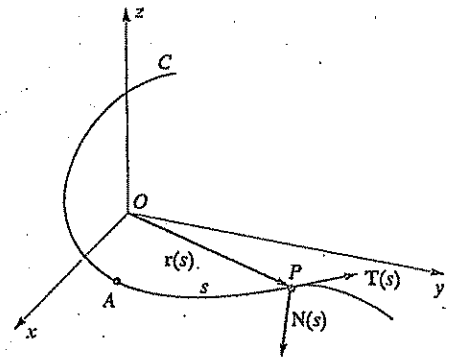


Figura 15.35

Tendo obtido um vetor tangente unitário conveniente $\mathbf{T}(s)$ e admitindo a existência de $\mathbf{T}'(s)$, seguimos nosso plano e definimos como segue a curvatura em três dimensões.

Definição (15.20)

Suponhamos uma curva suave no espaço C com parametrização por comprimento de arco

$$x = f(s),\ y = g(s),\ z = h(s)$$

Sejam $\mathbf{r}(s) = f(s)\mathbf{i} + g(s)\mathbf{j} + h(s)\mathbf{k}$ e $\mathbf{T}(s) = \mathbf{r}'(s)$. A curvatura K de C no ponto $P(x, y, z)$ é

$$K = \|\mathbf{T}'(s)\|$$

Como já provamos, a definição precedente se reduz a (15.17) se C é uma curva plana. Note que

$$\mathbf{N}(s) = \frac{1}{K}\mathbf{T}'(s), \quad \text{ou} \quad \mathbf{T}'(s) = K\mathbf{N}(s)$$

A fórmula de K na Definição (15.20) é em geral de aplicação trabalhosa em problemas específicos. Na próxima seção estabeleceremos uma fórmula mais prática para calcular a curvatura.

EXERCÍCIOS 15.4

Exercs. 1-6: Ache os unitários da tangente $\mathbf{T}(t)$ e da normal $\mathbf{N}(t)$ para a curva C definida por $\mathbf{r}(t)$. (b) esboce o gráfico de C, e exiba $\mathbf{T}(t)$ e $\mathbf{N}(t)$ para o valor de t dado.

1 $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} - \frac{1}{2}t^2\mathbf{j}$; $t = 1$

2 $\mathbf{r}(t) = -t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$; $t = 1$

3 $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{j} + 3t\mathbf{j}$; $t = 1$

4 $\mathbf{r}(t) = (4 + \cos t)\mathbf{i} - (3 - \operatorname{sen} t)\mathbf{j}$; $t = \pi/6$

5 $\mathbf{r}(t) = 2 \operatorname{sen} t\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\cos t\mathbf{k}$; $t = \pi/4$

6 $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$; $t = 1$

Exercs. 7-18: Ache a curvatura em P de:

7 $y = 2 - x^3$; $P(1, 1)$

8 $y = x^4$; $P(1, 1)$

9 $y = e^{(x^2)}$; $P(0, 1)$

10 $y = \ln(x - 1)$; $P(2, 0)$

11 $y = \cos 2x$; $P(0, 1)$

12 $y = \sec x$; $P(\pi/3, 2)$

13 $x = t - 1$, $y = \sqrt{t}$; $P(3, 2)$

14 $x = t + 1$, $y = t^2 + 4t + 3$; $P(1, 3)$

15 $x = t - t^2$, $y = 1 - t^3$; $P(0, 1)$

16 $x = t - \operatorname{sen} t$, $y = 1 - \cos t$; $P(\pi/2 - 1, 1)$

17 $x = 2 \operatorname{sen} t$, $y = 3\cos t$; $P(1, \frac{3}{2}\sqrt{3})$

18 $x = \cos^3 t$, $y = \operatorname{sen}^3 t$; $P(\frac{1}{4}\sqrt{2}, \frac{1}{4}\sqrt{2})$

Exercs. 19-22: Para a curva e o ponto P dados, (a) ache o raio de curvatura, (b) ache o centro de curvatura e (c) esboce o gráfico da curva e o círculo de curvatura em P.

19 $y = \operatorname{sen} x$; $P(\pi/2, 1)$

20 $y = \sec x$; $P(0, 1)$

21 $y = e^x$; $P(0, 1)$

22 $xy = 1$; $P(1, 1)$

Exercs. 23-28: Ache os pontos da curva dada em que a curvatura é máxima.

23 $y = e^{-x}$

24 $y = \cosh x$

25 $9x^2 + 4y^2 = 36$

26 $9x^2 - 4y^2 = 36$

27 $y = \ln x$

28 $y = \operatorname{sen} x$

Exercs. 29-32: Ache os pontos do gráfico da equação em que a curvatura é 0.

29 $y = x^4 - 12x^2$

30 $y = \operatorname{tg} x$

31 $y = \operatorname{senh} x$

32 $y = e^{-x^2}$

33 Suponha que uma curva C seja o gráfico de uma equação polar $r = f(\theta)$. Se $r' = dr/d\theta$ e $r'' = d^2r/d\theta^2$, mostre que a curvatura K em $P(r, \theta)$ é

$$K = \frac{|2(r')^2 - rr'' + r^2|}{[(r')^2 + r^2]^{3/2}}$$

(*Sugestão:* Use $x = r\cos\theta$ e $y = r \operatorname{sen}\theta$ para expressar C em forma paramétrica.)

Exercs. 34-36: Aplique a fórmula do Exercício 33 para achar a curvatura da curva polar em $P(r, \theta)$.

34 $r = a(1 - \cos\theta)$; $0 < \theta < 2\pi$

35 $r = \operatorname{sen} 2\theta$; $0 < \theta < 2\pi$

36 $r = e^{a\theta}$

37 Seja $P(x, y)$ um ponto do gráfico de $y = f(x)$ em que $K \neq 0$. Se (h, k) é o centro de curvatura em P, mostre que

$$h = x - \frac{y'[1 + (y')^2]}{y''}, \quad k = y + \frac{[1 + (y')^2]}{y''}$$

Exercs. 38-42: Use as fórmulas do Exercício 37 para achar o centro de curvatura para o ponto P do gráfico da equação. (Ref. Exercícios 7-11).

38 $y = 2 - x^3$; $P(1, 1)$

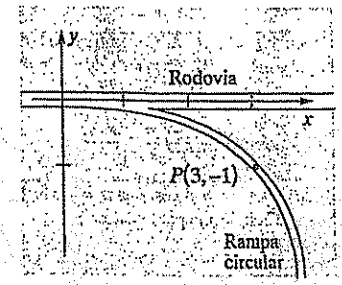
39 $y = x^4$; $P(1, 1)$

40 $y = e^{(x^2)}$; $P(0, 1)$

41 $y = \ln(x - 1)$; $P(2, 0)$

42 $y = \cos 2x$; $P(0, 1)$

43 O trajeto de uma rodovia e de uma rampa de saída estão referidos a um mesmo sistema de eixos coordenados, de modo que a rodovia coincide com o eixo-x. A rampa de saída começa na origem O. Após seguir o gráfico de $y = -\frac{1}{27}x^3$ de O ao ponto $P(3, -1)$, o trajeto percorre o arco de círculo conforme figura. Se $K(x)$ é a curvatura da rampa de saída em (x, y), ache o centro de curvatura do arco de círculo que torna a curvatura em $P(3, -1)$ contínua em $x = 3$.



44 Use a equação $y = mx + b$ para provar que a curvatura em qualquer ponto de uma reta é 0 (ver Exemplo 4).

45 Prove que a curvatura máxima de uma parábola ocorre no vértice.

46 Prove que as curvaturas máxima e mínima de uma elipse estão nas extremidades dos eixos maior e menor, respectivamente.

47 Prove que a curvatura máxima de uma hipérbole ocorre nas extremidades do eixo transverso.

48 Prove que retas e círculos são as únicas curvas *planas* que têm curvatura constante. (O Exercício 17 da Seção 15.5 mostra que este resultado não é válido para curvas no espaço.)

Exercs. 49-52: Se a curva C da Figura 15.22 admite uma parametrização suave $x = f(t)$, $y = g(t)$, então, pelo Teorema (13.5), a relação entre t e o parâmetro comprimento de arco s é dada por

$$s = \int_a^t \sqrt{[f'(u)]^2 + [g'(u)]^2}\, du$$

onde a é o valor de t correspondente ao ponto fixo A. Use esta relação para expressar a curva dada em termos do parâmetro s se o ponto fixo A corresponde a $t = 0$. (*Sugestão*: Calcule primeiro a integral para achar a relação entre t e s, e substitua então o valor de t nas equações paramétricas.)

49 $x = 4t - 3$, $y = 3t + 5$; $t \geq 0$

50 $x = 3t^2$, $y = 2t^3$; $t \geq 0$

51 $x = 4\cos t$, $y = 4\operatorname{sen} t$; $0 \leq t \leq 2\pi$

52 $x = e^t \cos t$, $y = e^t \operatorname{sen} t$; $t \geq 0$

53 Prove que se k é uma função não-negativa que não se anula e é contínua em um intervalo $[0, a]$, então existe uma curva plana C tal que k representa a curvatura de C como função do comprimento de arco. (*Sugestão:* Se s está em $[0, a]$, defina

$$h(s) = \int_0^s k(t)\, dt, \quad x = f(s) = \int_0^s \cos h(t)\, dt,$$

$$\text{e} \qquad y = g(s) = \int_0^s \operatorname{sen} h(t)\, dt$$

54 Use o Exercício 53 para fazer o Exercício 48.

15.5 COMPONENTES TANGENCIAL E NORMAL DA ACELERAÇÃO

Nesta seção utilizaremos o conceito de curvatura para auxiliar na análise do movimento de objetos.

Teorema (15.21) Seja $\mathbf{r}(t)$ o vetor posição de um ponto móvel P no instante t, e seja s o parâmetro comprimento de arco para a curva C determinada por $\mathbf{r}(t)$. Se $\mathbf{T}(s)$ e $\mathbf{N}(s)$ são os vetores unitários tangente e normal principal e se K é a curvatura de C no ponto correspondente a s, então a velocidade e a aceleração de P podem escrever-se:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{ds}{dt}\mathbf{T}(s)$$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T}(s) + K\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \mathbf{N}(s)$$

DEMONSTRAÇÃO

A Figura 15.36 é uma interpretação geométrica da fórmula de $\mathbf{a}(t)$ no enunciado do teorema. Recordemos que o vetor tangente unitário $\mathbf{T}(s)$ a C é dado por

$$\mathbf{T}(s) = \frac{1}{\|\mathbf{r}'(t)\|}\mathbf{r}'(t)$$

e então $$\mathbf{r}'(t) = \|\mathbf{r}'(t)\|\,\mathbf{T}(s)$$

Como $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{v}(t)$ e $\|\mathbf{r}'(t)\| = \|\mathbf{v}(t)\| = ds/dt$, temos a fórmula da velocidade

$$\mathbf{v}(t) = \frac{ds}{dt}\mathbf{T}(s)$$

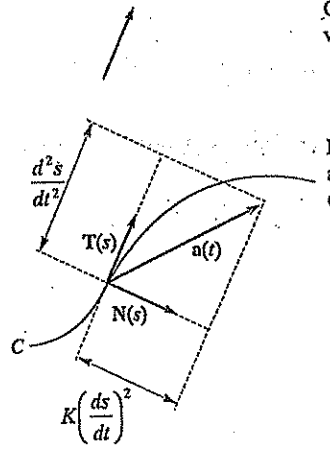


Figura 15.36

Diferenciando a equação precedente em relação a t e utilizando as regras da cadeia dos Exercícios 45 e 46 da Seção 15.2, obtemos

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T}(s) + \frac{ds}{dt}\frac{d}{dt}\mathbf{T}(s)$$

$$= \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T}(s) + \frac{ds}{dt}\frac{ds}{dt}\mathbf{T}'(s)$$

Pela observação que segue a Definição (15.20), $\mathbf{T}'(s) = K\mathbf{N}(s)$. Assim, a última fórmula pode ser escrita

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T}(s) + K\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \mathbf{N}(s)$$

Denotando por v a velocidade (módulo) $\|\mathbf{v}(t)\| = ds/dt$ de P, então as fórmulas do Teorema (15.21) são

$$\mathbf{v}(t) = v\mathbf{T}(s) \quad \text{e} \quad \mathbf{a}(t) = \frac{dv}{dt}\mathbf{T}(s) + Kv^2\mathbf{N}(s)$$

A segunda fórmula expressa a aceleração $\mathbf{a}(t)$ em termos de uma *componente tangencial* a_T e um *componente normal* a_N, isto é,

$$\mathbf{a}(t) = a_T\mathbf{T}(s) + a_N\mathbf{N}(s),$$

onde $$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \text{ e } a_N = Kv^2 = K\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

Os componentes tangencial e normal da aceleração são úteis no estudo das forças que atuam sobre um objeto móvel que percorre uma curva C. Note que o componente normal $a_N = Kv^2$ depende somente da velocidade de P e da curvatura de C. Se a velocidade ou a curvatura é grande, então também o é o componente normal da aceleração. Este resultado, obtido teoricamente, comprova o fato bem conhecido de que um motorista deve reduzir a velocidade do carro ao fazer uma curva fechada.

Podemos também deduzir, para os componentes tangencial e normal da aceleração, fórmulas que dependem somente de $\mathbf{r}(t)$. Tomando o produto escalar de $\mathbf{v}(t)$ e $\mathbf{a}(t)$ no Teorema (15.21), obtemos

$$\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{a}(t) = \left[\frac{ds}{dt}\mathbf{T}(s)\right] \cdot \left[\frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T}(s) + K\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \mathbf{N}(s)\right]$$

$$= \left(\frac{ds}{dt}\right)\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)[\mathbf{T}(s) \cdot \mathbf{T}(s)] + K\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 [\mathbf{T}(s) \cdot \mathbf{N}(s)]$$

Como $\mathbf{T}(s)$ tem módulo 1 e é ortogonal a $\mathbf{N}(s)$, esta fórmula se reduz a

$$\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{a}(t) = \left(\frac{ds}{dt}\right)\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)$$

ou, em termos de $\mathbf{r}$,

$$\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t) = \|\mathbf{r}'(t)\|\frac{d^2s}{dt^2} = \|\mathbf{r}'(t)\|\, a_T$$

Se $\mathbf{r}'(t) \neq 0$, temos a fórmula

$$a_T = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$$

Componente tangencial da aceleração (15.22)

Tomando o produto vetorial de $\mathbf{a}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$, em lugar do produto escalar, obtemos

$$\mathbf{v}(t) \times \mathbf{a}(t) = \left(\frac{ds}{dt}\right)\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)[\mathbf{T}(s) \times \mathbf{T}(s)] + K\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 [\mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s)]$$

Como o produto vetorial de um vetor por si mesmo é $\mathbf{0}$, $\mathbf{T}(s) \times \mathbf{T}(s) = \mathbf{0}$. Como $\mathbf{T}(s)$ e $\mathbf{N}(s)$ são vetores unitários ortogonais, $\|\mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s)\| = 1$ (ver (14.30)). Logo, a fórmula de $\mathbf{v}(t) \times \mathbf{a}(t)$ nos dá

$$\|\mathbf{v}(t) \times \mathbf{a}(t)\| = K\left(\frac{ds}{dt}\right)^3$$

e, portanto,

$$a_N = K\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{\|\mathbf{v}(t) \times \mathbf{a}(t)\|}{ds/dt}$$

Em termos de $\mathbf{r}$ temos o seguinte:

Componente normal da aceleração (15.23)

$$a_N = K\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$$

EXEMPLO 1

O vetor posição de um ponto móvel no instante t é

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}, \ 1 \leq t \leq 4$$

(a) Ache os componentes tangencial e normal da aceleração no instante t.

(b) Determine aproximações, com duas casas decimais, de a_N, a_T, e $\|\mathbf{v}(t)\|$ nos instantes $t = 1, 2, 3$, e 4, descrevendo o movimento do ponto.

SOLUÇÃO

(a) Diferenciando, temos

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = 2\mathbf{j} + 6t\mathbf{k}$$

$$\|\mathbf{v}(t)\| = \|\mathbf{r}'(t)\| = (1 + 4t^2 + 9t^4)^{1/2}$$

Por (15.22)

$$a_T = \frac{\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{4t + 18t^3}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^{1/2}}$$

Para achar a_N, calculamos primeiro

$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} = 6t^2\mathbf{i} - 6t\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

Aplicando (15.23) temos

$$a_N = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{(36t^4 + 36t^2 + 4)^{1/2}}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^{1/2}}$$

$$= 2\left(\frac{9t^4 + 9t^2 + 1}{9t^4 + 4t^2 + 1}\right)^{1/2}$$

(b) A trajetória do ponto, ou seja, a curva C determinada por $\mathbf{r}(t)$, é a porção da cúbica reversa estudada no Exemplo 3 da Seção 15.5 que está entre (1, 1, 1) e (4, 16, 64). A substituição nas fórmulas obtidas na parte (a) dá a seguinte tabela de aproximações:

t	1	2	3	4
Posição de P	(1, 1, 1)	(2, 4, 8)	(3, 9, 27)	(4, 16, 64)
a_N	2,33	2,12	2,06	2,03
a_T	5,88	11,98	17,99	24,00
$\|\mathbf{v}(t)\|$	3,74	12,69	27,68	48,67

Assim, quando t cresce de 1 a 4, o ponto se move ao longo de C de (1, 1, 1) a (4, 16, 64), ganhando velocidade rapidamente.

O componente normal da aceleração a_N tende para 2 (note que $\lim_{t\to\infty} a_N = 2$). Vemos, pela tabela, que o componente tangencial a_T cresce aproximadamente 6 unidades por unidade de tempo.

Podemos obter uma fórmula alternativa para o componente normal da aceleração. Para simplificar a notação, denotaremos por T, N e a, respectivamente, os vetores $\mathbf{T}(s)$, $\mathbf{N}(s)$ e $\mathbf{a}(t)$ do Teorema (15.21). Assim,

$$\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}$$

Como T e N são vetores unitários mutuamente ortogonais, $\mathbf{T} \cdot \mathbf{N} = 0$, $\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = 1$, e $\mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = 1$. Conseqüentemente,

$$\|\mathbf{a}\|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = (a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}) \cdot (a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N})$$

$$= a_T^2(\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}) + 2a_Na_T(\mathbf{N} \cdot \mathbf{T}) + a_N^2(\mathbf{N} \cdot \mathbf{N})$$

$$= a_T^2 + a_N^2$$

Pode-se também obter esta relação aplicando o teorema de Pitágoras a um dos triângulos retângulos com hipotenusa $\|\mathbf{a}(t)\|$ na Figura 15.36. Resolvendo em relação a a_N obtemos:

Teorema (15.24)

$$a_N = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - a_T^2}$$

Deve-se utilizar o Teorema (15.24) se o componente normal é difícil de achar por meio de (15.23).

EXEMPLO 2

Ache a_N no Exemplo 1 utilizando o Teorema (15.24).

SOLUÇÃO

Tal como na solução do Exemplo 1, obtemos

$$a_T = \frac{4t + 18t^3}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^{1/2}} \quad \text{e} \quad \mathbf{a} = \mathbf{r}''(t) = 2\mathbf{j} + 6t\mathbf{k}$$

Aplicando (15.24), obtemos

$$a_N = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - a_T^2}$$

$$= \sqrt{(4 + 36t^2) - \frac{(4t + 18t^3)^2}{1 + 4t^2 + 9t^4}}$$

Isto se reduz à expressão de a_N obtida no Exemplo 1.

EXEMPLO 3

Se um ponto P se move sobre um círculo de raio k com velocidade constante v, ache os componentes tangencial e normal da aceleração.

SOLUÇÃO

Como $v = ds/dt$ é constante, o componente tangencial $a_T = d^2s/dt^2$ é 0.

Pelo Exemplo 5 da seção anterior, a curvatura do círculo é $1/k$. Logo o componente normal da aceleração (ver (15.23)) é $(1/k)v^2$. Isto mostra que a aceleração é um vetor de módulo constante v^2/k dirigido de P para o centro do círculo, conforme se viu no Exemplo 2 da Seção 15.3.

Pode-se aplicar (15.23) para obter uma fórmula para a curvatura de uma curva no espaço C. Se C admite a parametrização

$$x = f(t), y = g(t), z = h(t)$$

então C é definida pelo vetor posição

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

Resolvendo a equação (15.23) em relação a K e considerando que $ds/dt = \|\mathbf{r}'(t)\|$, obtemos o próximo teorema.

Teorema (15.25) Seja C uma curva no espaço com parametrização $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, onde f'', g'', h'' existem. A curvatura K no ponto $P(x, y, z)$ de C é dada por

$$K = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3} = a_N \frac{1}{\|\mathbf{r}'(t)\|^2}$$

Esta fórmula também se aplica a curvas planas (ver Exercício 16).

EXEMPLO 4

(a) Ache a curvatura K da cúbica reversa $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ no ponto (x, y, z).

(b) Ache aproximações de K com quatro decimais nos pontos correspondentes a $t = 1, 2, 3$ e 4.

SOLUÇÃO

(a) Fazendo

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$$

a curva é a mesma que a considerada no Exemplo 1. Substituindo $\mathbf{r}'(t)$ e $\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)$ pelas expressões achadas ali na fórmula de K no Teorema (15.25), obtemos

$$K = \frac{2(9t^4 + 9t^2 + 1)^{1/2}}{(9t^4 + 4t^2 + 1)^{3/2}}$$

Poderíamos também achar K fazendo substituições para a_N e $\|\mathbf{r}'(t)\|$ no Teorema (15.25).

(b) Fazendo $t = 1, 2, 3$ e 4 na fórmula de K obtida na parte (a), temos as seguintes aproximações para K (compare com a tabela na página 334).

t	1	2	3	4
(x, y, z)	(1, 1, 1)	(2, 4, 8)	(3, 9, 27)	(4, 16, 64)
K	0,1664	0,0132	0,0027	0,0009

Por meio de teoremas sobre limites, pode-se mostrar que $\lim_{t \to \infty} K = 0$, isto é, a curvatura da curva tende para a de uma reta quando t aumenta.

EXERCÍCIOS 15.5

Exercs. 1-8: Estabeleça fórmulas gerais para os componentes tangencial e normal da aceleração e para a curvatura da curva C definida por $\mathbf{r}(t)$.

1 $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + (3t + 2)\mathbf{j}$

2 $\mathbf{r}(t) = (2t^2 - 1)\mathbf{i} + 5t\mathbf{j}$

3 $\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$

4 $\mathbf{r}(t) = 4t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k}$

5 $\mathbf{r}(t) = t(\cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j})$

6 $\mathbf{r}(t) = \cosh t\,\mathbf{i} + \operatorname{senh} t\,\mathbf{j}$

7 $\mathbf{r}(t) = 4\cos t\,\mathbf{i} + 9\operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

8 $\mathbf{r}(t) = e^t(\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \mathbf{k})$

9 Um ponto se move ao longo da parábola $y = x^2$ de modo que o componente horizontal da velocidade é sempre 3. Ache os componentes tangencial e normal da aceleração em $P(1, 1)$.

10 Faça o Exercício 9 se o ponto se move ao longo do gráfico de $y = 2x^3 - x$.

11 Prove que, se um ponto percorre uma curva C com velocidade constante, então a aceleração é sempre normal a C.

12 Use o Teorema (15.25) para provar que se um ponto se move no espaço com aceleração sempre igual a 0, então o movimento é retilíneo.

13 Se um ponto P se move ao longo de uma curva C com velocidade constante, mostre que o módulo da aceleração é diretamente proporcional à curvatura da curva.

14 No Exercício 13, se um segundo ponto Q se move ao longo de C com velocidade igual ao dobro da de P, mostre que o módulo da aceleração de Q é quatro vezes maior que o de P.

15 Mostre que se um ponto se move ao longo do gráfico de $y = f(x)$ para $a \le x \le b$, então o componente normal da aceleração é 0 em um ponto de inflexão.

16 Se uma curva plana é dada parametricamente por $x = f(t)$, $y = g(t)$ e se f'' e g'' existem, use o Teorema (15.25) para provar que a curvatura no ponto $P(x, y)$ é dada pelo Teorema (15.19).

17 Mostre que a curvatura em qualquer ponto da hélice circular $x = a\cos t$, $y = a\operatorname{sen} t$, $z = bt$ (com $a > 0$), é dada por $K = a/(a^2 + b^2)$.

18 Uma *hélice elíptica* tem equações paramétricas $x = a\cos t$, $y = b\operatorname{sen} t$, $z = ct$, com a, b e c números reais positivos e $a \neq b$. Determine a curvatura em (x, y, z).

15.6 LEIS DE KEPLER

É oportuno concluir este capítulo evidenciando o poder e a beleza dos métodos vetoriais quando aplicados à dedução de três leis físicas clássicas. O assunto não é simples, pois não temos a intenção de considerar um problema simples. Não há exercícios propostos no fim desta seção. A razão é que não estamos interessados em cálculos numéricos que envolvam as leis a serem estudadas. Você deverá ler cuidadosamente e entender cada tópico da discussão, caminhando sem pressa. O estudo do material que segue proporcionará considerável visão dos métodos vetoriais.

Após muitos anos de análise de uma enorme quantidade de dados empíricos, o astrônomo alemão Johannes Kepler (1571-1630) formulou três leis que descrevem o movimento dos planetas em torno do Sol. Estas leis podem ser enunciadas como a seguir.

Leis de Kepler (15.26)

Primeira lei: A órbita de cada planeta é uma elipse que tem o Sol como um dos focos.

Segunda lei: As áreas varridas pelo raio vetor que une o centro do Sol ao centro do planeta são proporcionais ao tempo gasto em percorrê-las.

Terceira lei: Se o tempo necessário para um planeta percorrer uma vez sua órbita elíptica é T e se o eixo maior da elipse é $2a$, então $T^2 = ka^3$ para alguma constante k.

Cerca de 50 anos mais tarde, Sir Isaac Newton (1642-1727) provou que as leis de Kepler eram conseqüência da lei da gravitação universal de Newton e da segunda lei do movimento. Os resultados obtidos por ambos foram monumentais, porque as leis como que justificavam todas as observações astrônomicas feitas até então.

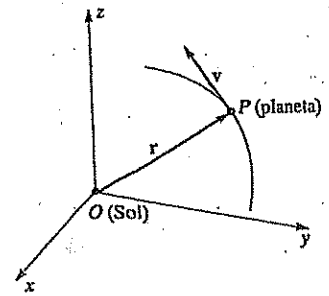


Figura 15.37

Nesta seção demonstraremos as leis de Kepler utilizando vetores. Como a força da gravidade exercida pelo Sol sobre um planeta excede de muito a força exercida por outros corpos celestes, desprezaremos todas as outras forças que atuam sobre um planeta. Deste ponto de vista, temos apenas dois objetos a considerar: o Sol e um planeta que se move em torno dele.

É conveniente introduzir um sistema de coordenadas com o centro e massa do Sol na origem, O, conforme ilustrado na Figura 15.37. O ponto P representa o centro de massa do planeta. Para simplificar a notação, denotaremos o vetor posição de P por $\mathbf{r}$, e não por $\mathbf{r}(t)$, e representaremos por $\mathbf{v}$ e $\mathbf{a}$ a velocidade $\mathbf{r}'(t)$ e a aceleração $\mathbf{r}''(t)$, respectivamente.

Antes de provar as leis de Kepler, mostraremos que o movimento de um planeta se processa em um plano (isto é, a órbita é uma curva plana). Fazendo $r = \|\mathbf{r}\|$, então $\mathbf{u} = (1/r)\mathbf{r}$ é um vetor unitário de mesma direção que $\mathbf{r}$. De acordo com a lei da gravitação de Newton, a força $\mathbf{F}$ da atração gravitacional sobre o planeta é dada por

$$\mathbf{F} = -G\frac{Mn}{r^2}\mathbf{u}$$

onde M é a massa do Sol, m é a massa do planeta, e G é uma constante gravitacional. A segunda lei de Newton (15.13) afirma que

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

Igualando essas duas expressões de $\mathbf{F}$ e resolvendo em relação a $\mathbf{a}$, obtemos

$$\mathbf{a} = -\frac{GM}{r^2}\mathbf{u} \tag{1}$$

Isto mostra que $\mathbf{a}$ é paralelo a $\mathbf{r} = r\mathbf{u}$ e, então, $\mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$. Além disso, como $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$, vemos que

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{v}$$

$$= \mathbf{r} \times \mathbf{a} + \mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Segue-se que

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{c} \tag{2}$$

para um vetor constante $\mathbf{c}$. O vetor $\mathbf{c}$ desempenhará um papel importante na prova das leis de Kepler.

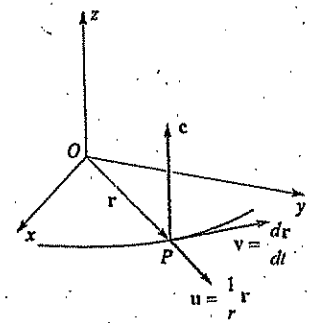


Figura 15.38

Como $\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{c}$, o vetor $\mathbf{r}$ é ortogonal a $\mathbf{c}$ para todo valor de t. Isto implica que a curva descrita por P jaz em um plano; isto é, *a órbita do planeta é uma curva plana*, conforme ilustrado na Figura 15.38.

Vamos agora provar a primeira lei de Kepler. Podemos supor que o movimento do planeta ocorre no plano-xy. Neste caso, o vetor $\mathbf{c}$ é perpendicular ao plano-xy; admitimos ainda que $\mathbf{c}$ tenha a mesma direção do eixo-z positivo, conforme Figura 15.38.

Como $\mathbf{r} = r\mathbf{u}$, vemos que

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = r\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{dr}{dt}\mathbf{u}$$

A substituição em $\mathbf{c} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ e a aplicação de propriedades do produto vetorial dá

$$\mathbf{c} = r\mathbf{u} \times \left(r\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{dr}{dt}\mathbf{u} \right)$$

$$= r^2 \left(\mathbf{u} \times \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right) + r\frac{dr}{dt}(\mathbf{u} \times \mathbf{u})$$

Como $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$, isto se reduz a

$$\mathbf{c} = r^2 \left(\mathbf{u} \times \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right) \tag{3}$$

Utilizando (3) e (1) juntamente com (ii) e (vi) do Teorema (14.33), vemos que

$$\mathbf{a} \times \mathbf{c} = \left(-\frac{GM}{r^2}\mathbf{u} \right) \times \left[r^2 \left(\mathbf{u} \times \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right) \right]$$

$$= -GM \left[\mathbf{u} \times \left(\mathbf{u} \times \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right) \right]$$

$$= -GM \left[\left(\mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right)\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})\frac{d\mathbf{u}}{dt} \right]$$

Como $\|\mathbf{u}\| = 1$, decorre do Teorema (15.9) que $\mathbf{u} \cdot (d\mathbf{u}/dt) = 0$. Além disso, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2 = 1$, e, então, a última fórmula de $\mathbf{a} \times \mathbf{c}$ se reduz a

$$\mathbf{a} \times \mathbf{c} = GM\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d}{dt}(GM\mathbf{u})$$

Pode-se escrever também

$$\mathbf{a} \times \mathbf{c} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{c} = \frac{d}{dt}(\mathbf{v} \times \mathbf{c})$$

e, conseqüentemente,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v} \times \mathbf{c}) = \frac{d}{dt}(GM\mathbf{u})$$

Integrando ambos os membros desta equação, temos

$$\mathbf{v} \times \mathbf{c} = GM\mathbf{u} + \mathbf{b} \tag{4}$$

onde $\mathbf{b}$ é um vetor constante.

O vetor $\mathbf{v} \times \mathbf{c}$ é ortogonal a $\mathbf{c}$ e, assim, está no plano-xy. Como $\mathbf{u}$ também está no plano-xy, segue-se, de (4), que $\mathbf{b}$ está no plano-xy.

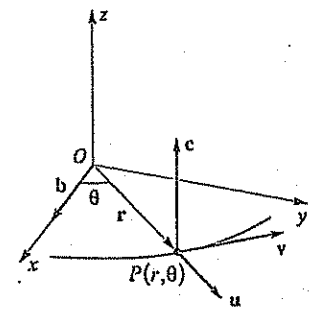


Figura 15.39

Até aqui, nossa demonstração não tem dependido das posições dos eixos x e y. Escolhamos agora um sistema coordenado tal que o eixo-x positivo tenha a direção do vetor constante $\mathbf{b}$, conforme Figura 15.39.

Sejam (r, θ) as coordenadas polares do ponto P, com $r = \|\mathbf{r}\|$. Segue-se que

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{b}\| \cos\theta = b\cos\theta$$

onde $b = \|\mathbf{b}\|$. Fazendo $c = \|\mathbf{c}\|$, e usando (2), juntamente com propriedades dos produtos escalar e vetorial, e também (4), obtemos

$$c^2 = \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{c})$$

$$= (r\mathbf{u}) \cdot (GM\mathbf{u} + \mathbf{b})$$

$$= rGM(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) + r(\mathbf{u} \cdot \mathbf{b})$$

$$= rGM + rb\cos\theta$$

Resolvendo a última equação em relação a r, obtemos

$$r = \frac{c^2}{GM + b\cos\theta}$$

Dividindo numerador e denominador por GM, obtemos

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \tag{5}$$

com $p = c^2/(GM)$ e $e = b/(GM)$. Pelo Teorema (13.16), o gráfico desta equação polar é uma cônica com excentricidade e e foco na origem. Como a órbita é uma curva fechada, segue-se que $0 < e < 1$, e que a cônica é uma elipse. Com isto completamos a prova da primeira lei de Kepler.

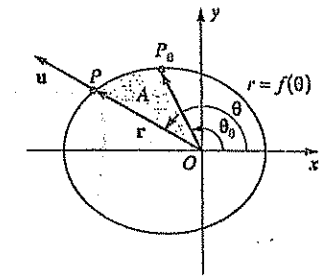


Figura 15.40

Provemos agora a segunda lei de Kepler. Podemos admitir que a órbita do planeta seja uma elipse no plano-xy. Seja $r = f(\theta)$ a equação polar da órbita, com o centro do Sol no foco O. Denotemos por P_0 a posição do planeta no instante t_0 e P sua posição no instante $t \geq t_0$. Conforme Figura 15.40, θ_0 e θ denotarão os ângulos medidos do eixo-x positivo para $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OP}$, respectivamente.

Pelo Teorema (13.11), a área A varrida por $\overrightarrow{OP}$ no intervalo de tempo $[t_0, t]$ é

$$A = \int_{\theta_0}^{\theta} \tfrac{1}{2} r^2\, d\theta$$

e então $$\frac{dA}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\int_{\theta_0}^{\theta} \tfrac{1}{2} r^2\, d\theta = \tfrac{1}{2} r^2$$

Isto é a regra da cadeia nos dão

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \tfrac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} \tag{6}$$

Notemos em seguida que, como $\mathbf{r} = r\cos\theta\mathbf{i} + r\,\text{sen}\,\theta\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$, o vetor unitário $\mathbf{u} = (1/r)\mathbf{r}$ pode expressar-se na forma

$$\mathbf{u} = \cos\theta\mathbf{i} + \text{sen}\,\theta\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

Conseqüentemente,

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\text{sen}\,\theta\frac{d\theta}{dt}\mathbf{i} + \cos\theta\frac{d\theta}{dt}\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

Por um cálculo direto pode-se mostrar que

$$\mathbf{u} \times \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\mathbf{k}$$

Se $\mathbf{c}$ é o vetor obtido na prova da primeira lei de Kepler, então, por (3) e pela última equação,

$$\mathbf{c} = r^2\left(\mathbf{u} \times \frac{d\mathbf{u}}{dt}\right) = r^2\frac{d\theta}{dt}\mathbf{k}$$

e então

$$c = |\mathbf{c}| = r^2\frac{d\theta}{dt} \tag{7}$$

Combinando (6) e (7), vemos que

$$\frac{dA}{dt} = \tfrac{1}{2}c \tag{8}$$

isto é, a taxa à qual A é varido por $\overline{OP}$ é constante. Isto estabelece a segunda lei de Kepler.

Para provar a terceira lei de Kepler, conservaremos a notação usada nas demonstrações das duas primeiras leis. Em particular, admitiremos que a órbita planetária seja dada pela equação polar

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

com $p = c^2/(GM)$ e $e = b/(GM)$.

Seja T o tempo necessário para que o planeta complete uma revolução em torno do Sol. Por (8), a área varrida no intervalo de tempo $[0, T]$ é dada por

$$A = \int_0^T \frac{dA}{dt}\,dt = \int_0^T \tfrac{1}{2}c\,dt = \tfrac{1}{2}cT$$

Isto é também igual à área da região plana delimitada pela elipse. Entretanto, no Exemplo 6 da Seção 12.2, obtivemos $A = \pi ab$ para uma elipse cujos eixos maior e menor têm comprimentos $2a$ e $2b$, respectivamente. Conseqüentemente,

$$\tfrac{1}{2}cT = \pi ab \quad \text{ou} \quad T = \frac{2\pi ab}{c}$$

Por (12.8),

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

e então

$$a^2e^2 = a^2 - b^2 \quad \text{ou} \quad b^2 = a^2(1 - e^2)$$

Assim,

$$T^2 = \frac{4\pi^2a^2b^2}{c^2} = \frac{4\pi^2a^4(1 - e^2)}{c^2}$$

Pela demonstração do Teorema (13.15) (onde $p = de$) sabemos que

$$a^2 = \frac{p^2}{(1 - e^2)^2} \quad \text{ou} \quad a = \frac{p}{1 - e^2}$$

e então

$$T^2 = \frac{4\pi^2a^4}{c^2}\left(\frac{p}{a}\right)$$

Como $p = c^2/(GM)$, isto se reduz a

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}a^3 = ka^3$$

com $k = 4\pi^2/(GM)$. Está, assim, completa a prova.

Não esqueçamos que, em nossa demonstração das leis de Kepler, admitimos que a única força gravitacional atuando sobre um planeta era a do Sol. Se levarmos em conta forças exercidas por outros planetas, então podem ocorrer irregularidades nas órbitas elípticas. As irregularidades observadas no movimento de Urano levaram o astrônomo inglês J. Adams (1819-1892) e

o astrônomo francês U. Leverrier (1811-1877) a predizerem a presença de um planeta desconhecido, que estaria causando tais irregularidades. Com base nessas predições, o planeta, posteriormente chamado Netuno, foi observado pela primeira vez em 1846 pelo astrônomo alemão J. Galle.

15.7 EXERCÍCIOS DE REVISÃO

Exercs. 1-2: Seja $\mathbf{r}(t)$ o vetor posição de um ponto móvel P. Esboce a trajetória C de P juntamente com $\mathbf{v}(t)$ e $\mathbf{a}(t)$ para o valor dado de t.

1 $\mathbf{r}(t) = \operatorname{tg} t\,\mathbf{i} - \sec t\,\mathbf{j}$; $\quad t = \pi/4, |t| < \pi/2$

2 $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + 3\cos t\,\mathbf{j} + 5\operatorname{sen} t\mathbf{k}$; $\quad t = \pi$

Exercs. 3-4: A posição de um ponto móvel em um plano coordenado é dada por $\mathbf{r}(t)$. Ache sua velocidade, aceleração e módulo da velocidade no instante t.

3 $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + (4t^2 - t^4)\mathbf{j}$

4 $\mathbf{r}(t) = (2 - \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (1 - \cos t)\mathbf{j}$

5 Seja C a curva definida por

$$\mathbf{r}(t) = (e^t \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (e^t \cos t)\mathbf{j} + e^t\mathbf{k},\ 0 \le t \le 1.$$

(a) Ache um vetor unitário tangente a C no ponto correspondente a $t = 0$.

(b) Ache a equação da tangente a C no ponto correspondente a $t = 0$.

6 Ache o comprimento da curva C do Exercício 5.

Exercs. 7-8: Sejam

$$\mathbf{u}(t) = t^2\mathbf{i} + 6t\mathbf{j} + t\mathbf{k} \text{ e } \mathbf{v}(t) = t\mathbf{i} - 5t\mathbf{j} + 4t^2\mathbf{k}.$$

7 Ache os valores de t para os quais $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{v}'(t)$ são ortogonais.

8 Calcule $D_t[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)]$ e $D_t[\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)]$.

9 O vetor posição de um ponto no instante t é

$$\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + t^4\mathbf{k},\ t \text{ em } \mathbb{R}.$$

Ache a velocidade, a aceleração e o módulo da velocidade em t e em $t = 1$.

Exercs. 10-11: Calcule a integral.

10 $\int (\operatorname{sen} 3t\mathbf{i} + e^{-2t}\mathbf{j} + \cos t\mathbf{k})\,dt$

11 $\int_0^1 (4t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} - \mathbf{k})\,dt$

12 Ache $\mathbf{u}(t)$ se $\mathbf{u}'(t) = e^{-t}\mathbf{i} - 4\operatorname{sen} 2t\mathbf{j} + 3\sqrt{t}\,\mathbf{k}$ e $\mathbf{u}(0) = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.

13 Um ponto P se move com aceleração $12t\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ no instante t. Se, em $t = 1$, as coordenadas de P são $(-1, 3, \frac{3}{2})$ e sua velocidade é $3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, determine seu vetor posição $\mathbf{r}(t)$.

Exercs. 14-15: Verifique a identidade, *sem utilizar componentes*.

14 $D_t[\|\mathbf{u}(t)\|^2] = 2\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{u}'(t)$

15 $D_t[\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{u}''(t)] = \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{u}''(t)$

Exercs. 16-18: Ache a curvatura da curva no ponto P.

16 $y = xe^x$; $\quad P(0, 0)$

17 $x = \dfrac{1}{1+t}, y = \dfrac{1}{1-t}$; $\quad P(\frac{2}{3}, 2)$

18 $x = 2t^2, y = t^4, z = 4t$; $\quad P(x, y, z)$

19 Ache as coordenadas-x dos pontos do gráfico de $y = x^3 - 3x$ em que a curvatura é máxima.

20 Se C é o gráfico de $y = \cosh x$, ache a equação do círculo de curvatura para o ponto $P(0, 1)$.

21 Ache o raio de curvatura no ponto $P(\pi, 2)$ do gráfico da equação polar $r = 2 + \operatorname{sen}\theta$.

22 Seja C a curva definida por $\mathbf{r}(t) = (t^2 + 1)\mathbf{i} + 4t\mathbf{j}$, para t em $\mathbb{R}$.

(a) Ache os vetores unitários tangente e normal $\mathbf{T}(t)$ e $\mathbf{N}(t)$.

(b) Esboce o gráfico de C, exibindo $\mathbf{T}(1)$ e $\mathbf{N}(1)$.

Exercs. 23-24: Se $\mathbf{r}(t)$ é o vetor posição de um ponto, ache os componentes tangencial e normal da aceleração no instante t.

23 $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} 2t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}$

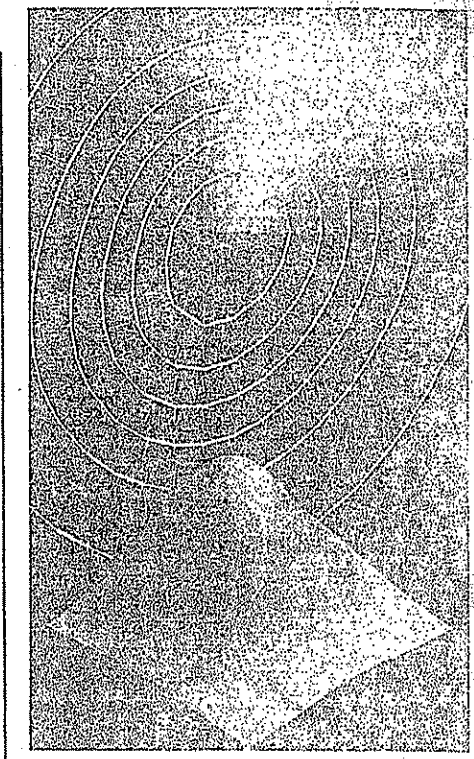
24 $\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

MAKRON Books

Capítulo 16

DIFERENCIAÇÃO PARCIAL

INTRODUÇÃO



Um fabricante pode constatar que o custo de produção C de um artigo depende da qualidade do material usado, do salário-hora dos operários, do tipo de maquinaria necessário, das despesas de manutenção e da supervisão. Dizemos então que C é *função de cinco variáveis*, porque depende de cinco quantidades diferentes. Neste capítulo estudaremos essas funções escalares, começando com o caso de duas variáveis independentes e passando então a um número arbitrário de variáveis.

Em primeiro lugar mostraremos como representar graficamente funções de duas ou três variáveis. Em seguida generalizaremos os conceitos de uma variável de limite, função contínua, derivada e diferencial. (As integrais de funções de diversas variáveis serão definidas no próximo capítulo.) Entre as aplicações consideradas nos exemplos e exercícios estão: determinação da taxa de variação da temperatura de sólidos, avaliação da taxa à qual um poluente emitido por uma chaminé se dissipa, a mensuração da intensidade dos ventos em um furacão, planejamento de *chips* para computador, pesquisas sobre a relação entre o preço de mercado de um produto e a procura pelo consumidor.

Na Seção 16.6 introduzimos um importante instrumento para análise de valores de uma função de várias variáveis – o *gradiente*. Utilizaremos o gradiente para achar a taxa de variação de uma quantidade escalar, como temperatura ou pressão, quando um ponto se move em determinada direção. Outra aplicação importante é a determinação dos valores extremos de uma função.

16.1 FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS

As funções estudadas nos capítulos anteriores envolvem apenas uma variável independente. Tais funções têm muitas aplicações. Entretanto, em não poucos problemas, ocorrem *diversas* variáveis independentes.

ILUSTRAÇÃO

— A área de um retângulo depende de *duas* quantidades – comprimento e largura.

— Se um objeto está localizado no espaço, a temperatura em um ponto P do objeto pode depender de *três* coordenadas retangulares x, y, z de P.

— Se a temperatura de um objeto no espaço varia com o tempo t, então estão em jogo *quatro* variáveis, x, y, z e t.

Nesta seção definiremos funções de diversas variáveis e estudaremos algumas de suas propriedades. Relembremos que uma função f é uma correspondência que associa a cada elemento de seu domínio D exatamente um elemento do seu contradomínio E. Se D é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ (o conjunto de todos os pares ordenados (x, y) de números reais) e E é um subconjunto de $\mathbb{R}$, então f é uma *função de duas variáveis (reais)*. Outra maneira de definir este conceito é:

Definição (16.1)

> Seja D um conjunto de pares ordenados de números reais. Uma função f de duas variáveis é uma correspondência que associa a cada par (x, y) em D exatamente um número real, denotado por $f(x, y)$. O conjunto D é o domínio de f. O contradomínio de f consiste em todos os números reais $f(x, y)$, com (x, y) em D.

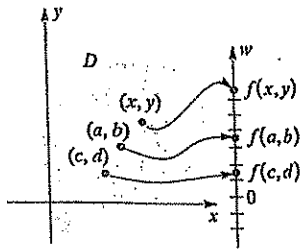


Figura 16.1

Podemos representar o domínio D da Definição (16.1) por pontos em um plano-xy e o contradomínio por pontos de uma reta real, digamos um eixo-w, conforme Figura 16.1. Setas curvas associam pares ordenados em D aos números correspondentes no contradomínio. A título de aplicação, suponhamos uma chapa plana de metal com a forma de D. A cada ponto (x, y) da chapa corresponde uma temperatura $f(x, y)$ que pode ser registrada em um termômetro, representado pelo eixo-w. Podemos também considerar D como a superfície de um lago e representar por $f(x, y)$ a profundidade da água no ponto (x, y). Há inúmeras outras interpretações físicas da Definição (16.1).

Em geral utilizamos uma expressão em x e y para especificar $f(x, y)$ e admitimos que o domínio seja o conjunto de todos os pares (x, y) para os quais a expressão tem sentido. Dizemos então que **f é uma função de x e y.**

EXEMPLO 1

Seja $f(x, y) = \dfrac{xy - 5}{2\sqrt{y - x^2}}$.

(a) Esboce o domínio D de f.

(b) Represente os números $f(2, 5)$, $f(1, 2)$ e $f(-1, 2)$ em um eixo-w, conforme Figura 16.1.

SOLUÇÃO

(a) Considerando o radical $\sqrt{y - x^2}$ no denominador de $f(x, y)$, vemos que o domínio D é o conjunto de todos os pares (x, y) tais que $y - x^2$ seja positivo, isto é, $y > x^2$. O gráfico de D é o conjunto de todos os pontos que estão acima da parábola $y = x^2$, conforme Figura 16.2.

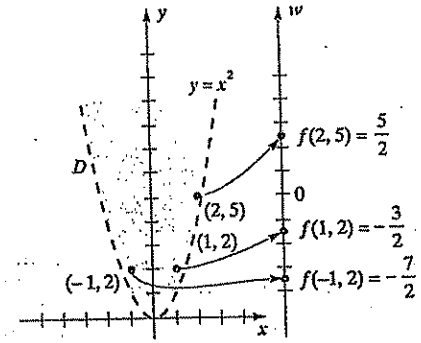


Figura 16.2

(b) Por substituição

$$f(2, 5) = \frac{(2)(5) - 5}{2\sqrt{5 - 4}} = \frac{5}{2}$$

Analogamente, $f(1, 2) = -\frac{3}{2}$ e $f(-1, 2) = -\frac{7}{2}$. Estes valores funcionais estão indicados no eixo-w da Figura 16.2.

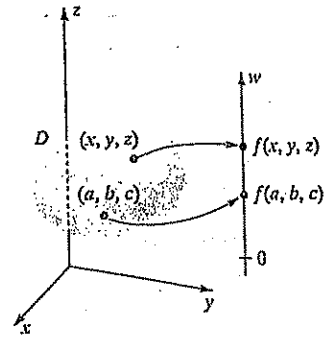


Figura 16.3

Podemos empregar fórmulas para definir funções de duas variáveis. Por exemplo, a fórmula $V = \pi r^2 h$ exprime o volume V de um cilindro circular reto como função da altura h e do raio da base r. Os símbolos r e h são chamados **variáveis independentes**, e V é a **variável dependente**.

Uma função f de três variáveis (reais) se define como em (16.1), com a diferença que o domínio D é agora um subconjunto de $\mathbb{R}^3$. Neste caso, a cada terno ordenado (x, y, z) em D está associado exatamente um número real $f(x, y, z)$. Representando D por uma região em três dimensões, conforme ilustrado na Figura 16.3, a cada ponto (x, y, z) de D corresponde um único ponto $f(x, y, z)$ no eixo-w. Como aplicação, podemos considerar D como um objeto sólido e $f(x, y, z)$ como a temperatura em (x, y, z).

Geralmente as funções de três variáveis são definidas por expressões. Por exemplo,

$$f(x, y, z) = \frac{xe^y + \sqrt{z^2 + 1}}{xy \operatorname{sen} z}$$

define uma função de x, y e z. Podem-se também usar fórmulas, como $V = lwh$ do volume de uma caixa retangular de dimensões l, w e h, para definir funções de três variáveis.

Voltemos a uma função f de duas variáveis x e y. O gráfico de f é, por definição, o gráfico da equação $z = f(x, y)$ em um sistema coordenado xyz e é, em geral, uma superfície S de algum tipo. Representando o domínio D por uma região do plano-xy, então o par (x, y) em D é representado pelo ponto $(x, y, 0)$. Os valores funcionais $f(x, y)$ são as distâncias (com sinal) do plano-xy a S, conforme ilustrado na Figura 16.4.

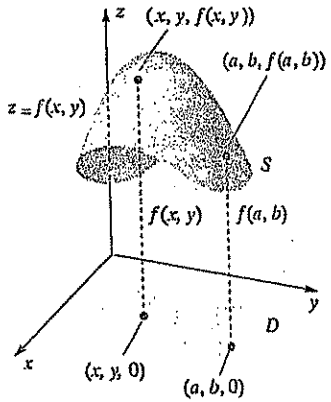


Figura 16.4

EXEMPLO 2

Seja f a função com domínio D dada por

$$f(x, y) = 9 - x^2 - y^2 \text{ e } D = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 9\}$$

Esboce o gráfico de f e exiba os traços nos planos $z = 0$, $z = 2$, $z = 4$, $z = 6$ e $z = 8$.

SOLUÇÃO

O domínio D pode ser representado por todos os pontos do círculo $x^2 + y^2 = 9$, inclusive sua circunferência, no plano-xy. O gráfico de f é a porção do gráfico de

$$z = 9 - x^2 - y^2$$

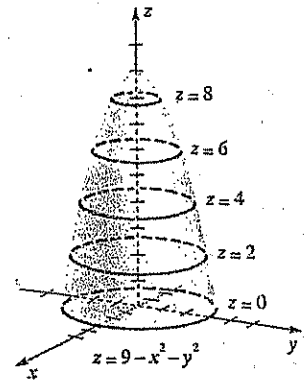


Figura 16.5 Traços circulares nos planos $z = k$.

(um paraboloide) que está no plano-xy ou acima dele (ver Figura 16.5).

Para achar o traço no plano $z = k$, consideremos

$$k = 9 - x^2 - y^2 \qquad \text{ou} \qquad x^2 + y^2 = 9 - k$$

Fazendo $k = 0$, 2, 4, 6 e 8, obtemos os círculos de raios 3, $\sqrt{7}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{3}$ e 1, respectivamente, exibidos na Figura 16.5.

Seja f uma função de duas variáveis e consideremos o traço do gráfico de f no plano $z = k$, ilustrado na Figura 16.6. Projetando este traço no plano-xy, obtemos uma curva C de equação $f(x, y) = k$. Note que, se um ponto $(x, y, 0)$ se move ao longo de C, os valores funcionais $f(x, y)$ correspondentes são sempre iguais a k. C é chamada uma **curva de nível** de f.

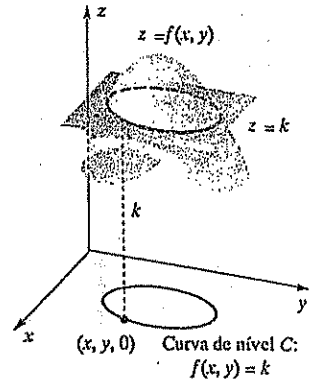


Figura 16.6

EXEMPLO 3

Esboce algumas curvas de nível da função f do Exemplo 2.

SOLUÇÃO

As curvas de nível são gráficos, no plano-xy, de equações da forma $f(x, y) = k$ – isto é,

$$9 - x^2 - y^2 = k \qquad \text{ou} \qquad x^2 + y^2 = 9 - k$$

Essas curvas são círculos, desde que $0 \leq k < 9$. A Figura 16.7 exibe curvas de nível correspondentes a $k = 0$, 2, 4, 6 e 8. Essas curvas de nível são as projeções, no plano-xy, dos traços circulares exibidos na Figura 16.5.

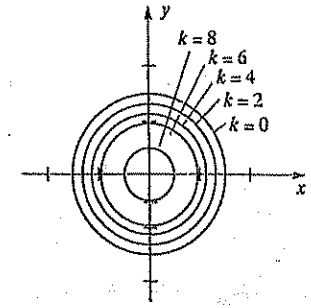


Figura 16.7 Curvas de nível: $9 - x^2 - y^2 = k$.

Se f é uma função de duas variáveis e esboçamos as curvas de nível $f(x, y) = k$ para valores eqüiespaçados de k, como $k = 0$, 2, 4, 6 e 8 no Exemplo 3, então a proximidade de curvas sucessivas nos dá informação sobre a atividade do gráfico de f. Na Figura 16.7, as curvas de nível correspondentes a $k = 0$ e $k = 2$ estão mais próximas uma da outra do que as correspondentes a $k = 2$ e $k = 8$, o que indica que a atividade da superfície da Figura 16.5 é maior nas proximidades do plano-xy.

EXEMPLO 4

Se $f(x, y) = y^2 - x^2$, esboce algumas curvas de nível de f.

SOLUÇÃO O gráfico de f é o paraboloide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ que se obtém fazendo-se $a = b = c = 1$ em (14.46). A Figura 16.8 é um esboço do gráfico.

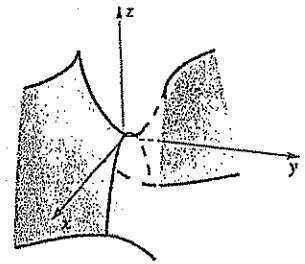


Figura 16.8

As curvas de nível no plano-xy são os gráficos das equações $f(x, y) = k$ – isto é, de

$$y^2 - x^2 = k, k \text{ em } \mathbb{R}$$

O quadro a seguir descreve estas curvas.

Valor de k	Equação da curva de nível C	Descrição de C no plano-xy
$k > 0$	$y^2 - x^2 = k$	Hipérbole com vértices $(0, \pm\sqrt{k})$
$k = 0$	$y^2 - x^2 = 0$, ou $y = \pm x$	Duas retas pela origem com coeficientes angulares ± 1
$k < 0$	$x^2 - y^2 = k$, ou $y^2 - x^2 = -k$	Hipérbole com vértices $(\pm\sqrt{-k}, 0)$

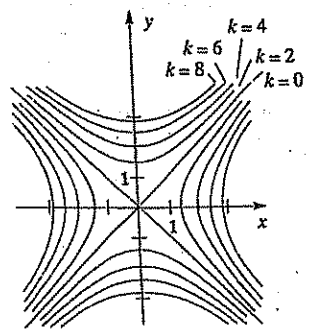


Figura 16.9 Curvas de nível: $y^2 - x^2 = k$.

A Figura 16.9 apresenta as curvas de nível correspondentes a $k = 0, \pm 2, \pm 4, \pm 6$ e ± 8.

As curvas de nível são utilizadas para a elaboração de **mapas topográfico, ou mapas de contorno**. Por exemplo, suponhamos que $f(x, y)$ represente a elevação (em metros) em um ponto (x, y) de latitude x e longitude y. Na colina da Figura 16.10 esboçamos curvas (em três dimensões) correspondentes às elevações de 0, 100, 200, 300 e 400 metros. Podemos encarar essas curvas como tendo sido obtidas cortando-se a colina em fatias paralelas à base. Uma pessoa caminhando ao longo de uma dessas curvas permaneceria sempre na mesma elevação. A Figura 16.11 exibe as curvas de nível (bidimensionais) correspondentes às mesmas elevações. Elas representam a visão que teríamos olhando para a colina de um avião acima dela.

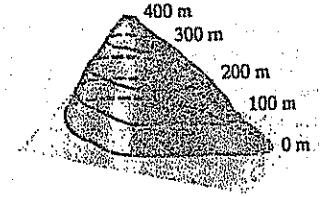


Figura 16.10 Elevações.

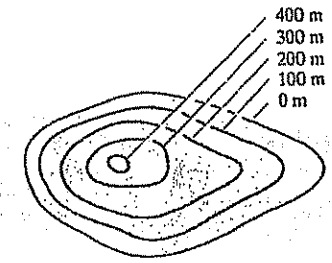


Figura 16.11 Mapa topográfico da coluna.

Mapa análogo é utilizado para indicar a profundidade da água em um lago. Um exemplo é o da Figura 16.12, em que $f(x, y)$ é a profundidade da água no ponto (x, y). Que partes do lago devem ser evitadas por esquiadores aquáticos?

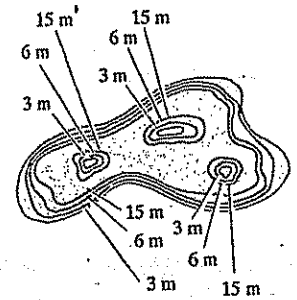


Figura 16.12 Profundidade da água em um lago.

Como outra ilustração das curvas de nível, a Figura 16.13 exibe um mapa meteorológico dos Estados Unidos, em que $f(x, y)$ denota a temperatura elevada em (x, y) durante certo dia. Ao longo das curvas e do nível, chamadas **curvas isotérmicas**, a temperatura é constante. Em outro mapa meteorológico $f(x, y)$ representaria a pressão barométrica em (x, y); as curvas de nível neste caso seriam chamadas **isobáricas**.

Se f é uma função de três variáveis x, y e z, então, por definição, as **superfícies de nível** de f são os gráficos de $f(x, y, z) = k$ para valores convenientes de k. Fazendo $k = w_0$, w_1 e w_2, os gráficos resultantes serão superfícies S_0, S_1 e S_2, ilustradas na Figura 16.14. $f(x, y, z)$ não se altera quando um ponto (x, y, z) se move ao longo de uma dessas superfícies. Se $f(x, y, z)$ é a temperatura em (x, y, z), as superfícies de nível são **superfícies isotérmicas**, e a temperatura é constante em cada superfície. Se $f(x, y, z)$ representa o potencial elétrico, as superfícies de nível são **superfícies eqüipotenciais**, e a voltagem não se altera se (x, y, z) permanece em uma dessas superfícies.

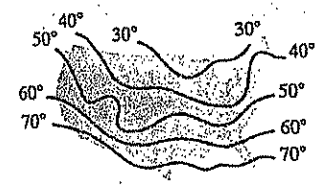


Figura 16.13 Curvas isotérmicas.

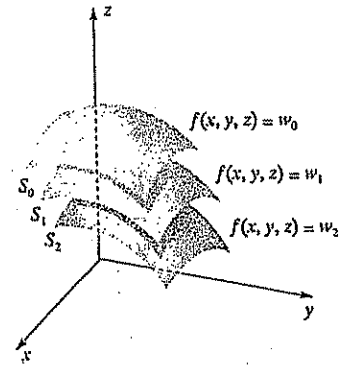


Figura 16.14 Superfícies de nível de $f(x, y, z)$.

EXEMPLO 5

Se $f(x, y, z) = z - \sqrt{x^2 + y^2}$, esboce algumas superfícies de nível de f.

SOLUÇÃO

As superfícies de nível são gráficos de $f(x, y, z) = k$ – isto é, se

$$z - \sqrt{x^2 + y^2} = k \quad \text{ou} \quad z = \sqrt{x^2 + y^2} + k$$

em que k é um número real arbitrário. Para cada k obtemos um cone circular reto com eixo ao longo do eixo-z. A Figura 16.15 ilustra os casos $k = -1, 0, 1$ e 2.

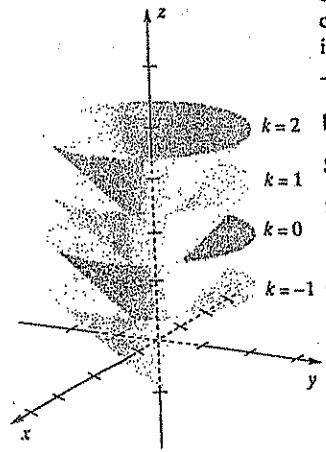


Figura 16.15 Superfícies de nível: $z - \sqrt{x^2 + y^2} = k$.

EXEMPLO 6

Se $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$, descreva as superfícies de nível de f.

SOLUÇÃO

As superfícies de nível são gráficos de equações da forma $f(x, y, z) = k$ – isto é, de

$$x^2 - y^2 + z^2 = k$$

em que k é um número real. A tabela a seguir descreve essas superfícies.

Valor de k	Equação da superfície de nível	Descrição da superfície
$k > 0$	$x^2 - y^2 + z^2 = k$	Hiperbolóide de uma folha com eixo ao longo do eixo-y.
$k = 0$	$x^2 - y^2 + z^2 = 0$	Cone com eixo ao longo do eixo-y.
$k < 0$	$-x^2 + y^2 - z^2 = -k$	Hiperbolóide de duas folhas com eixo ao longo do eixo-y.

A Figura 16.16 ilustra uma superfície de nível de cada tipo.

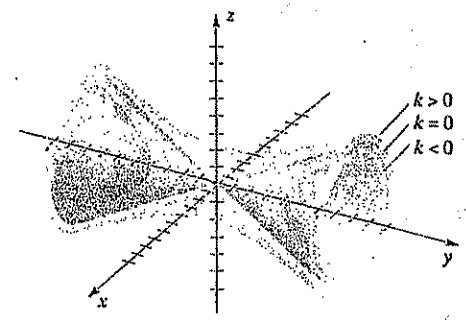


Figura 16.16

Os computadores podem ser programados para exibir curvas de nível e traços de superfícies em vários planos, e para representar superfícies de diversas perspectivas. Os esboços desses tipos são chamados *gráficos de computador* ou *gráficos gerados por computador*. A Figura 16.17 e os Exercícios 29-45 mostrados a seguir ilustram vários casos obtidos por meio de um computador.

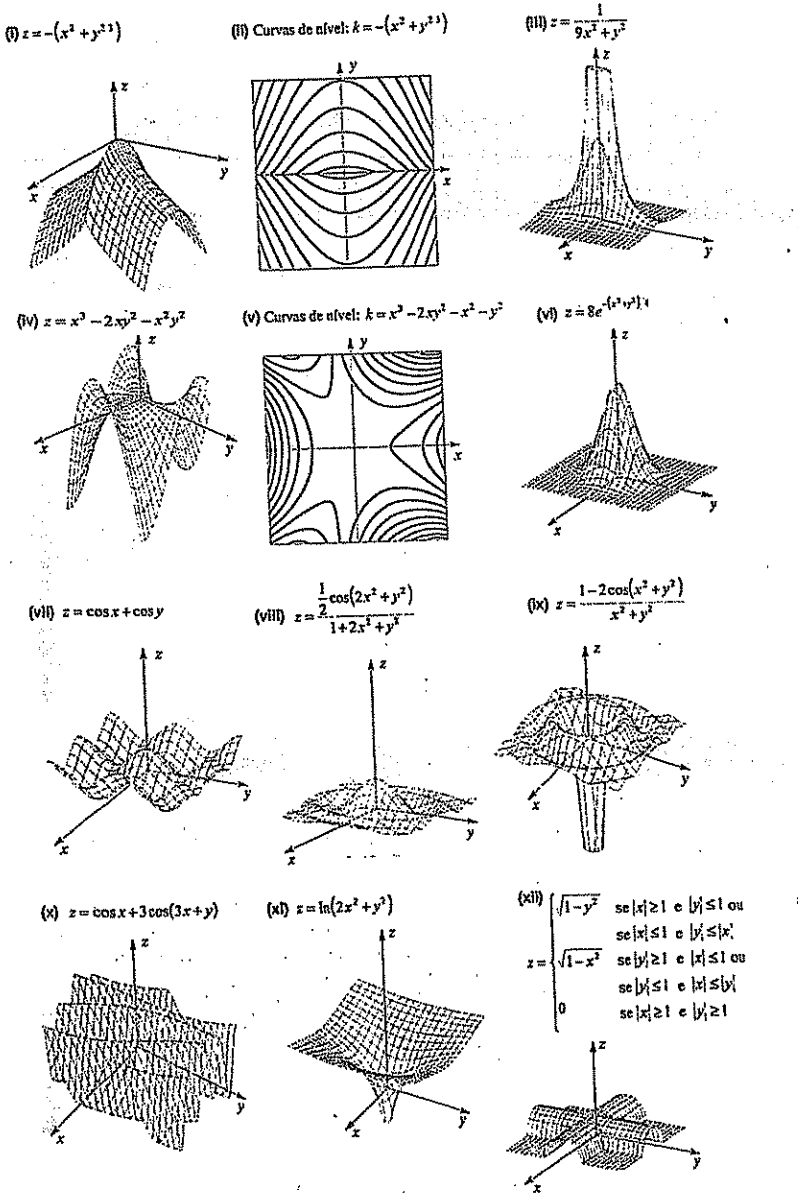


Figura 16.17

EXERCÍCIOS 16.1

Exercs. 1-6: Descreva o domínio de f e ache os valores funcionais indicados.

1 $f(x,y)=2x-y^2$; $f(-2,5)$, $f(5,-2)$, $f(0,-2)$

2 $f(x,y)=\dfrac{y+2}{x}$; $f(3,1)$, $f(1,3)$, $f(2,0)$

3 $f(u,v)=\dfrac{uv}{u-2v}$; $f(2,3)$, $f(-1,4)$, $f(0,1)$

4 $f(r,s)=\sqrt{1-r}-e^{r/s}$; $f(1,1)$, $f(0,4)$, $f(-3,3)$

5 $f(x,y,z)=\sqrt{25-x^2-y^2-z^2}$; $f(1,-2,2)$, $f(-3,0,2)$

6 $f(x,y,z)=2+\operatorname{tg} x+y \operatorname{sen} z$; $f(\pi/4,4,\pi/6)$, $f(0,0,0)$

Exercs. 7-14: Esboce o gráfico de f.

7 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$

8 $f(x,y)=4-x^2-4y^2$

9 $f(x,y)=x^2+y^2-1$

10 $f(x,y)=\frac{1}{6}\sqrt{9x^2+4y^2}$

11 $f(x,y)=6-2x-3y$

12 $f(x,y)=\sqrt{72+4x^2-9y^2}$

13 $f(x,y)=\sqrt{y^2-4x^2-16}$

14 $f(x,y)=\sqrt{x^2+4y^2+25}$

Exercs. 15-20: Esboce as curvas de nível de f para os valores dados de k.

15 $f(x,y)=y^2-x^2$; $k=-4,0,9$

16 $f(x,y)=3x-2y$; $k=-4,0,6$

17 $f(x,y)=x^2-y$; $k=-2,0,3$

18 $f(x,y)=xy$; $k=-4,1,4$

19 $f(x,y)=(x-2)^2+(y+3)^2$; $k=1,4,9$

20 $f(x,y)=4x^2+y^2$; $k=4,9,16$

Exercs. 21-22: Ache a equação da curva de nível de f que contém o ponto P.

21 $f(x,y)=y \operatorname{arctg} x$; $P(1,4)$

22 $f(x,y)=(2x+y^2)e^{xy}$; $P(0,2)$

Exercs. 23-24: Ache a equação da superfície de nível de f que contém o ponto P.

23 $f(x,y,z)=x^2+4y^2-z^2$; $P(2,-1,3)$

24 $f(x,y,z)=z^2y+x$; $P(1,4,-2)$

Exercs. 25-28: Descreva as curvas de nível, quando existirem, para a superfície da figura indicada, se

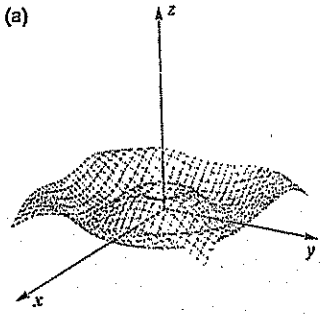
(a) $k>0$, (b) $k=0$ e (c) $k<0$.

25 Figura 16.17(iii) 26 Figura 16.17(xi)

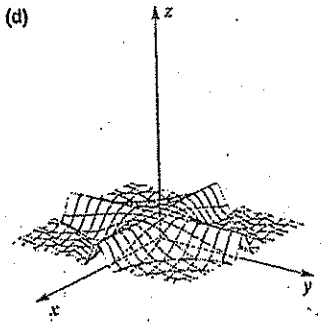
27 Figura 16.17(vi) 28 Figura 16.17(xii)

Exercs. 29-34: Estabeleça a correspondência correta entre os gráficos (a)-(f) e o sistema de curvas de nível da função dada por $z=f(x,y)$.

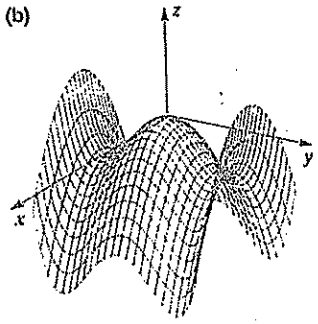
(a)



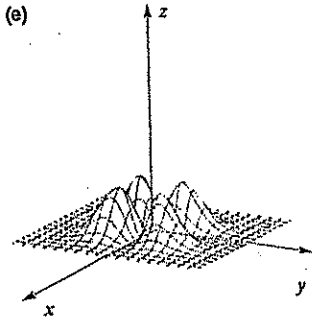
(d)



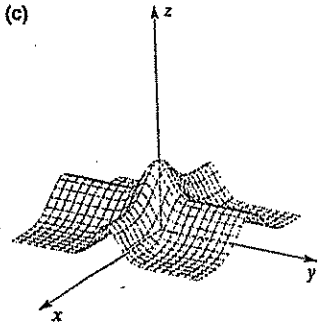
(b)



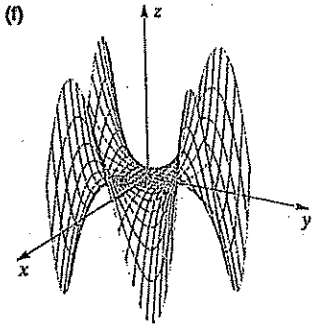
(e)



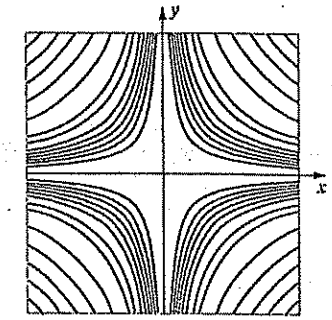
(c)



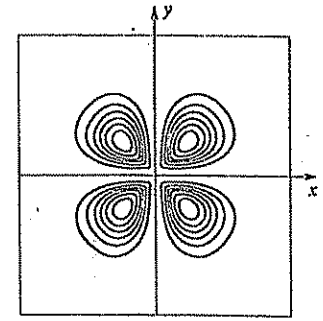
(f)



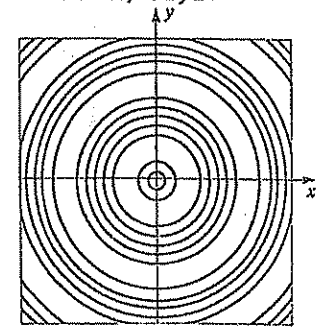
29 $z = \dfrac{\operatorname{sen} xy}{xy}$



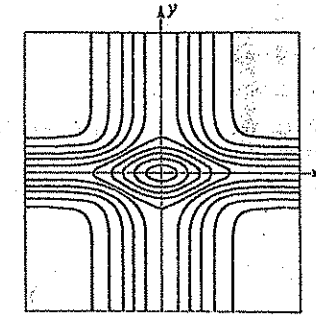
30 $z = \dfrac{15x^2y^2e^{-x^3-y^3}}{x^2+y^2}$



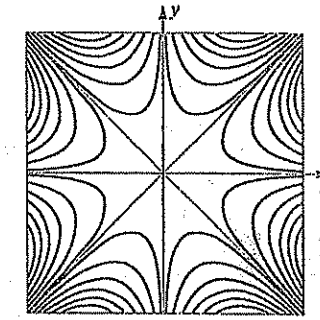
31 $z = \operatorname{sen}\sqrt{x^2+y^2}$; $-7 \le x \le 7$, $-7 \le y \le 7$



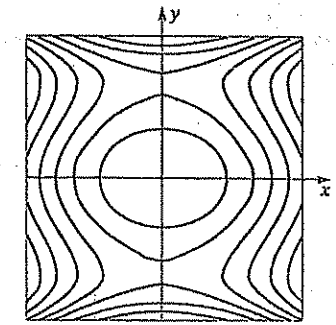
32 $z = e^{-x^2} + e^{-4y^2}$; $-2 \le x \le 2$, $-2 \le y \le 2$



33 $z = \dfrac{xy^3 - x^3y}{2}$; $-2 \le x \le 2$, $-2 \le y \le 2$



34 $z = y^4 - 8y^2 - 4x^2$; $-3 \le x \le 3$, $-3 \le y \le 3$



Exercs. 35-36: Grafe, no mesmo plano coordenado, as curvas de nível para $k = 1, 2$ e 3, usando coordenadas polares.

35 $f(x, y) = x^4 + 8x^2y^2 + y^4$

36 $f(x, y) = 3x^4 + x^2y^2 + y^4$

Exercs. 37-42: Descreva as superfícies de nível f para os valores dados de k.

37 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; $k = -1, 0, 4$

38 $f(x, y, z) = z + x^2 + 4y^2$; $k = -1, 0, 2$

39 $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$; $k = -6, 6, 12$

40 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$; $k = -1, 0, 1$

41 $f(x, y, z) = x^2 + y^2$; $k = -1, 0, 4$

42 $f(x, y, z) = z$; $k = -2, 0, 3$

43 Uma chapa plana de metal está situada em um plano-xy, de modo que a temperatura T (em °C) no ponto (x, y) é inversamente proporcional à distância da origem.

(a) Descreva as isotérmicas.

(b) Se a temperatura no ponto $P(4, 3)$ é de 40°C, ache a equação da isotérmica para uma temperatura de 20°C.

44 Se a voltagem V no ponto $P(x, y, z)$ é dada por $V = 6/(x^2 + 4y^2 + 9z^2)^{1/2}$,

(a) descreva as superfícies eqüipotenciais.

(b) ache a equação da superfície eqüipotencial $V = 120$.

45 De acordo com a lei da gravitação universal de Newton, se uma partícula de massa m_0 está na origem de um sistema coordenado xyz, então o módulo F da força exercida sobre uma partícula de massa m situada no ponto (x, y, z) é dada por

$$F = \frac{Gm_0m}{x^2 + y^2 + z^2}$$

em que G é a constante de gravitação universal. Quantas variáveis independentes estão presentes? Se m_0 e m são constantes, descreva as superfícies de nível da função de x, y, z resultante. Qual o significado físico dessas superfícies de nível?

46 De acordo com a *lei dos gases ideais*, a pressão P, o volume V e a temperatura T de um gás confinado estão relacionados pela fórmula $PV = kT$, para uma constante k. Expresse P como função de V e T e descreva as curvas de nível associadas a esta função. Qual o significado físico dessas curvas de nível?

47 A força P gerada por um rotor eólico é proporcional ao produto da área A varrida pelas pás do rotor e à terceira potência da velocidade v do vento.

(a) Expresse P como função de A e v.

(b) Descreva as curvas de nível de P e explique seu significado físico.

(c) Quando o diâmetro da área circular varrida pelas pás é 2 metros e a velocidade do vento é de 30 km/h, então $P = 3.000$ watts. Ache a equação da curva de nível $P = 4.000$.

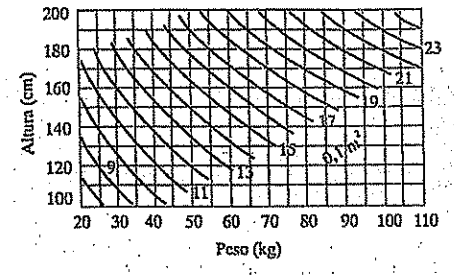
48 Se x é a velocidade do vento (em m/seg) e y é a temperatura (em °C), então o *fator de resfriamento eólico* F (em (kcal/m²)/hr) é dado por $F = (33 - y)(10\sqrt{x} - x + 10{,}5)$.

(a) Ache as velocidades e temperaturas para as quais F é 0. (Admita que $0 \le x \le 50$ e $-50 \le y \le 50$.)

(b) Se $F \ge 1.400$, pode ocorrer o congelamento em partes expostas do corpo humano. Esboce o gráfico da curva de nível $F = 1.400$.

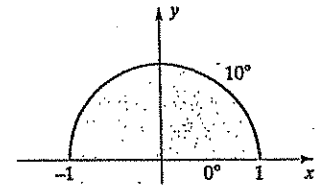
49 A figura da página seguinte exibe curvas de nível para a área da superfície do corpo humano (em décimos de metro quadrado) como função do peso x (em quilogramas) e altura y (em centímetros). Use este sistema de curvas de nível para estimar a área da superfície do seu próprio corpo. Compare esta estimativa com a estimativa mais precisa dada pela *fórmula de Dubois e Dubois*

$$S = 0{,}007184x^{0{,}425}y^{0{,}725}$$



50 A fronteira superior da região semicircular da figura é mantida à temperatura de 10°C, enquanto a fronteira inferior é mantida em 0°C. A temperatura de *estado estacionário* T em um ponto (x, y) interior à região é dada por

$$T(x, y) = \frac{20}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{2y}{1 - x^2 - y^2}\right)$$



Mostre que as isotérmicas são arcos de círculos com centros no eixo-y negativo e que passam pelos pontos $(-1, 0)$ e $(1, 0)$. Esboce a isotérmica correspondente à temperatura de 5°C.

51 Deve-se construir uma usina de incineração de lixo para atender a duas cidades. Cada cidade gostaria de maximizar sua distância à usina, mas, por motivos econômicos, a soma das distâncias de cada cidade à usina não pode exceder M quilômetros. Mostre que as curvas de nível para a localização da usina são elipses.

52 A pressão atmosférica nas proximidades do solo em certa região é dada por

$$p(x, y) = ax^2 + by^2 + c$$

em que a, b e c são constantes positivas.

(a) Descreva as isobáricas nessa região para pressões superiores a c.

(b) Trata-se de uma região de alta ou baixa pressão?

16.2 LIMITES E CONTINUIDADE

Se f é uma função de duas variáveis, podem interessar-nos as mudanças nos valores funcionais $f(x, y)$ quando (x, y) varia no domínio D de f. Como ilustração física, suponha que uma chapa metálica plana tenha a forma da região D da Figura 16.18. A cada ponto (x, y) da chapa corresponde uma temperatura $f(x, y)$, que é registrada em um termômetro representado pelo eixo-w. Quando o ponto (x, y) se move na chapa, a temperatura pode aumentar, diminuir ou permanecer constante; portanto, o ponto do eixo-w que corresponde a $f(x, y)$ se moverá numa direção positiva, ou numa direção negativa, ou permanecerá fixo, respectivamente. Se a temperatura $f(x, y)$ se aproxima de um valor fixo L quando (x, y) se aproxima de um ponto fixo (a, b), utilizamos a seguinte notação.

Notação de limite (16.2)

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L \text{ ou } f(x,y) \to L \text{ quando } (x,y) \to (a,b)$$

Lê-se: *O limite de $f(x, y)$, quando (x, y) tende para (a, b), é L.*

Para dar precisão matemática a (16.2), procedamos como segue. Para $\in > 0$ arbitrário, consideremos o intervalo aberto $(L - \in, L + \in)$ no eixo-w, conforme ilustrado na Figura 16.19. Se (16.2) é verdadeira, existe um $\delta > 0$ tal que para todo ponto (x, y) interior ao círculo de raio δ com centro em (a, b), exceto possivelmente o próprio (a, b), o valor funcional $f(x, y)$ está no intervalo $(L - \in, L + \in)$.

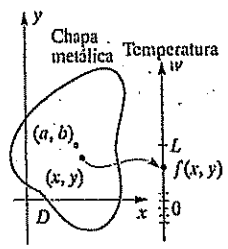


Figura 16.18

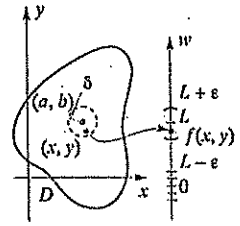


Figura 16.19

Isto equivale à seguinte afirmação:

$$\text{Se } 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta, \text{ então } |f(x,y) - L| < \in.$$

Temos, assim, o seguinte:

Definição de limite (16.3)

Seja f uma função de duas variáveis definida em todo o interior de um círculo de centro (a, b), exceto possivelmente no próprio (a, b). A afirmação

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

significa que, para todo $\in > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta, \ |f(x,y) - L| < \in.$$

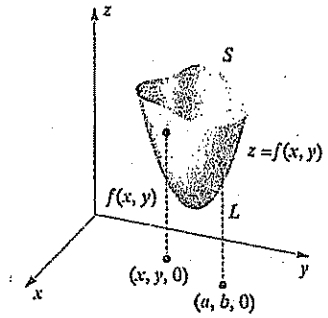


Figura 16.20

Consideremos o gráfico S de f ilustrado na Figura 16.20. Intuitivamente sabemos que a Definição (16.3) significa que, quando o ponto $(x, y, 0)$ se aproxima de $(a, b, 0)$ no plano-xy, o ponto correspondente $(x, y, f(x, y))$ em S se aproxima de (a, b, L) (que pode estar, ou não, em S). Pode-se mostrar que, se *o limite L existe, ele é único.*

Se f e g são funções de duas variáveis, então $f + g$, $f - g$, fg e f/g se definem na maneira usual, podendo-se aplicar o Teorema (2.8) relativo a limites de somas, produtos e quocientes. Por exemplo, se f e g têm limites quando (x, y) tende para (a, b), então

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} [f(x,y) + g(x,y)] = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) + \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y),$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)}{\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)} \text{ se } \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) \neq 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \sqrt{f(x,y)} = \sqrt{\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)} \text{ se } \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) > 0$$

etc.

Uma função f de duas variáveis é uma **função polinomial** se $f(x, y)$ pode ser expressa como soma de termos da forma $cx^m y^n$, em que c é um número real e m e n são inteiros não-negativos. Uma **função racional** é o quociente de duas funções polinomiais. Tal como no caso de funções de uma variável, podem-se achar limites de funções polinomiais e racionais em duas variáveis mediante substituição em relação a x e y.

EXEMPLO 1

Ache

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-3)} (x^3 - 4xy^2 + 5y - 7)$

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(3,4)} \dfrac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

SOLUÇÃO

(a) Como $x^3 - 4xy^2 + 5y - 7$ é um polinômio, podemos achar o limite substituindo x por 2 e y por -3. Assim,

$$\lim_{(x,y)\to(2,-3)} (x^3 - 4xy^2 + 5y - 7) = 2^3 - 4(2)(-3)^2 + 5(-3) - 7$$

$$= 8 - 72 - 15 - 7 = -86$$

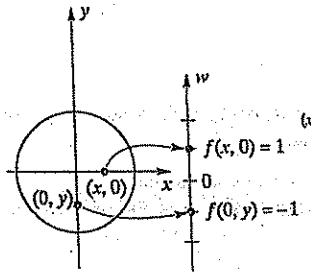


Figura 16.21

(b) Podemos proceder como segue:

$$\lim_{(x,y)\to(3,4)} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\lim\limits_{(x,y)\to(3,4)} (x^2-y^2)}{\lim\limits_{(x,y)\to(3,4)} \sqrt{x^2+y^2}} = \frac{9-16}{\sqrt{\lim\limits_{(x,y)\to(3,4)} (x^2+y^2)}}$$

$$= \frac{-7}{\sqrt{9+16}} = -\frac{7}{5}$$

EXEMPLO 2

Mostre que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ não existe.

SOLUÇÃO

Seja $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

A função f é racional; mas não podemos substituir x por 0 e y por 0, pois obteríamos um zero no denominador.

Considerando um ponto arbitrário $(x, 0)$ no eixo-x, então

$$f(x, 0) = \frac{x^2 - 0}{x^2 + 0} = 1, \text{ desde que } x \neq 0$$

Para um ponto arbitrário $(0, y)$ no eixo-y, temos

$$f(0, y) = \frac{0 - y^2}{0 + y^2} = -1, \text{ desde que } y \neq 0$$

Conseqüentemente, conforme Figura 16.21, *todo* círculo de centro $(0, 0)$ contém pontos em que o valor de f é 1 e pontos em que o valor de f é -1. Segue-se que o limite não existe, pois, se tomarmos $\in = 1$ na Definição (16.3), não há nenhum intervalo aberto $(L - \in, L + \in)$ no eixo-w que contenha 1 e -1. Logo, é impossível achar um $\delta > 0$ que satisfaça as condições da definição.

A Figura 16.22 é um gráfico de f gerado por computador. Note que, para $x \neq 0$ e $y \neq 0$, o gráfico contém todos os pontos $(x, 0, 1)$ e $(0, y, -1)$, como já observamos. Pode-se mostrar que o gráfico está inteiramente entre os planos $z = -1$ e $z = 1$.

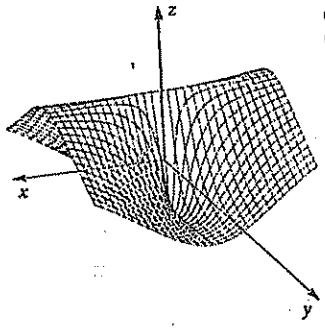


Figura 16.22

No Capítulo 2, para uma função de uma variável com descontinuidade tipo salto em $x = a$, provamos que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ não existe mostrando que $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ não são iguais. Ao

considerar tais limites laterais, podemos admitir o ponto de coordenada x no eixo-x tendendo para o ponto de coordenada a seja pela direita, seja pela esquerda, respectivamente. A situação análoga para funções de duas variáveis já é mais complicada, pois em um plano há um número infinito de curvas, ou caminhos, ao longo dos quais (x, y) pode tender para (a, b), conforme ilustrado na Figura 16.23. Todavia, se o limite na Definição (16.3) existe, então $f(x, y)$ deve ter o limite L, independentemente do caminho considerado. Isto justifica a seguinte regra para investigar limites.

Regra dos dois caminhos (16.4)

> Se dois caminhos diferentes para um ponto (a, b) resulta em dois limites diferentes, então $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ não existe.

Refaremos agora o Exemplo 2 utilizando (16.4).

EXEMPLO 3

Mostre que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ não existe.

SOLUÇÃO

Se $P(x, y)$ tende para $(0, 0)$ ao longo do eixo-x (ver Figura 16.24(i)), a coordenada-y de P é sempre zero e a expressão $(x^2-y^2)/(x^2+y^2)$ se reduz a x^2/x^2 ou 1. Logo, o valor limite ao longo deste caminho é 1.

Se $P(x, y)$ tende para $(0, 0)$ ao longo do eixo-y (ver Figura 16.24(ii)), a coordenada-x de P é 0 e $(x^2-y^2)/(x^2+y^2)$ se reduz a $-y^2/y^2$, ou -1. Como obtivemos dois valores diferentes, o limite não existe, de acordo com a regra dos dois caminhos (16.4).

Poderíamos, naturalmente, ter escolhido outros caminhos até a origem $(0, 0)$. Por exemplo, fazendo $P(x, y)$ tender para $(0, 0)$ ao longo da reta $y = 2x$ (ver Figura 16.24(iii)), então

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 - (2x)^2}{x^2 + (2x)^2} = \frac{-3x^2}{5x^2} = -\frac{3}{5}$$

e o limite ao longo da reta $y = 2x$ é $-\frac{3}{5}$.

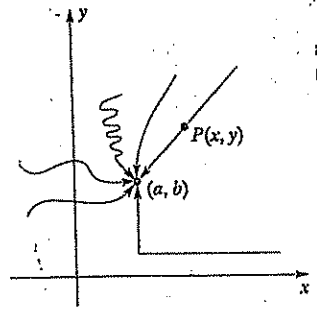


Figura 16.23

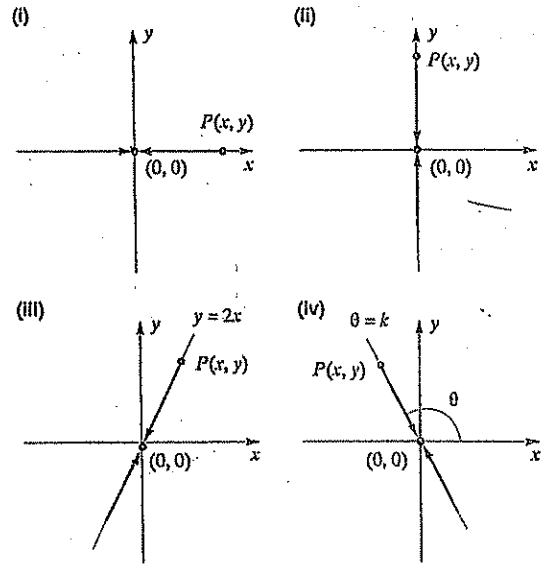


Figura 16.24

Como solução alternativa, poderíamos escrever a expressão em x e y em coordenadas polares:

$$\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{r^2\cos^2\theta - r^2\operatorname{sen}^2\theta}{r^2} = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \cos 2\theta$$

Ao tender $P(x, y)$ para $(0, 0)$ ao longo de qualquer raio $\theta = k$ (ver Figura 16.24(iv)), o valor da função é sempre $\cos 2k$ e, então, $f(x, y)$ teria este valor limite. Escolhendo valores convenientes de k, poderíamos fazer $f(x, y)$ tender para qualquer valor entre -1 e 1. Logo, de acordo com (16.4), o limite não existe.

EXEMPLO 4

Mostre que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ não existe.

SOLUÇÃO

Fazendo $P(x, y)$ tender para $(0, 0)$ ao longo de qualquer reta $y = mx$ que passe pela origem (ver Figura 16.25(i)), vemos que, se $m \neq 0$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2(mx)}{x^4+(mx)^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{mx^3}{x^4+m^2x^2}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{mx}{x^2+m^2} = \frac{0}{0+m^2} = 0$$

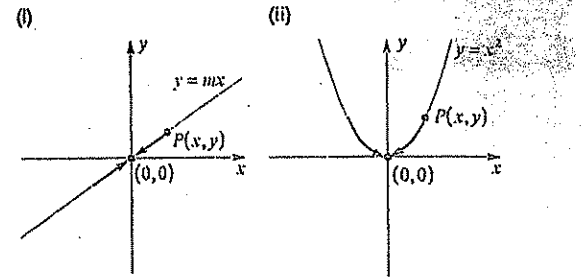


Figura 16.25

Poderíamos ser tentados a concluir que o limite é 0 quando (x, y) tende para $(0, 0)$; entretanto, se fizermos $P(x, y)$ tender para $(0, 0)$ ao longo da parábola $y = x^2$ (ver Figura 16.25(ii)), então

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2(x^2)}{x^4+(x^2)^2}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{2x^4} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Assim, nem todo caminho para $(0, 0)$ conduz ao mesmo limite e, portanto, pela regra (16.4), o limite não existe.

Se, na solução precedente, tivéssemos obtido o limite 0 seguindo o caminho $y = x^2$, ainda assim não poderíamos concluir que o limite fosse 0 quando $P(x, y) \to (0, 0)$, porque poderia haver *outro* caminho que levasse a um número diferente de zero. Tenha em mente que a regra dos dois caminhos não pode ser usada para provar a existência de um limite – ela prova apenas que um limite *não* existe.

Ao estudar propriedades de uma função de duas variáveis, em geral restringimos o domínio a pontos (x, y) que estejam em certos tipos de região do plano-xy. Em particular, um disco aberto consiste em todos os pontos *interiores* a um círculo. Um

disco fechado contém tanto os pontos interiores como os pontos fronteira do círculo. Um ponto (a, b) é **ponto interior** de uma região R se existe um disco aberto com centro em (a, b) inteiramente contido em R. A Figura 16.26(i) ilustra um ponto interior. Um ponto (a, b) é **ponto-fronteira** de R se todo disco de centro (a, b) contém pontos que estão em R e pontos que não estão em R, conforme ilustrado na Figura 16.26(ii). Define-se de maneira análoga o conceito de ponto interior (ou fronteira) (a, b, c) em uma região *tridimensional* R, utilizando-se regiões esféricas em lugar de discos.

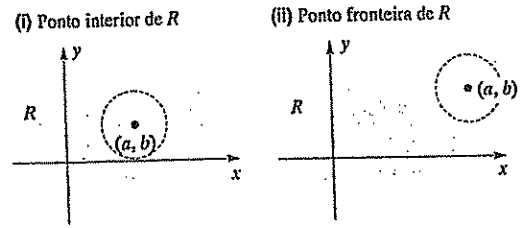


Figura 16.26

Uma região **fechada** é uma região que contém todos os seus pontos-fronteira. Uma região é **aberta** se não contém *nenhum* de seus pontos-fronteira – isto é, todo ponto da região é ponto interior. Uma região que contém apenas alguns dos seus pontos-fronteira não é aberta nem fechada. Estes conceitos são análogos aos de intervalo fechado, aberto e semi-aberto de números reais.

Suponhamos uma função f de duas variáveis definida para todo (x, y) em uma região R, exceto possivelmente em (a, b). Se (a, b) é um ponto interior, então pode-se usar a Definição (16.3) para investigar o limite de f quando (x, y) tende para (a, b). *Se (a, b) é um ponto-fronteira, utilizaremos a Definição (16.3) com a restrição adicional que (x, y) deve estar tanto em R como dentro de um círculo de raio δ.* Os teoremas sobre limites podem ser estendidos a pontos fronteira.

A definição de continuidade de uma função f de duas variáveis é análoga à de uma função de uma variável (ver Definição (2.20)).

Definição (16.5)

Uma função f de duas variáveis é **contínua em um ponto interior** (a, b) de seu domínio se

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

Para definir continuidade em um ponto-fronteira (a, b), devemos acrescentar a restrição que (x, y) deve estar no domínio D de f. Intuitivamente, sabemos que $f(x, y) \to f(a, b)$ somente se $(x, y) \to (a, b)$ ao longo de todo caminho C inteiramente contido em D. A função f é **contínua em seu domínio** D se é contínua em todo par (a, b) em D. Se f é contínua em D, então uma pequena variação em (x, y) acarretará uma pequena variação em $f(x, y)$. Olhando o gráfico S de f (ver Figura (16.20)), notamos que, se $f(x, y)$ está próxima de (a, b), então o ponto $(x, y, f(x, y))$ em S está próximo de $(a, b, f(a, b))$. Assim, não há buracos, nem saltos verticais, no gráfico de uma função contínua de duas variáveis.

Podemos provar teoremas sobre a continuidade de funções de duas variáveis, análogos aos relativos a funções de uma variável. Assim é que somas, produtos e quocientes de funções contínuas são contínuas, desde que o denominador não seja zero no caso do quociente. Em particular, as funções polinomiais são contínuas em todos os pontos; são-no também as funções racionais, exceto em pontos onde o denominador se anula.

O que acima se diz sobre limites e continuidade pode ser estendido a funções de três ou mais variáveis. Por exemplo, se f é uma função de três variáveis, temos a definição seguinte.

Definição (16.6)

Seja uma função f de três variáveis definida em todo o interior de uma esfera com centro (a, b, c), exceto possivelmente no próprio ponto (a, b, c). A afirmação

$$\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x, y, z) = L$$

significa que, para todo $\in > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que se

$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} < \delta$$

então $$|f(x, y, z) - L| < \in$$

Podemos dar uma ilustração gráfica da Definição (16.6) análoga à ilustrada na Figura 16.19. A diferença é que, em lugar do *círculo* no plano-xy, utilizamos uma *esfera* de raio δ em um sistema coordenado xyz. Especificamente, para $\in > 0$ arbitrário,

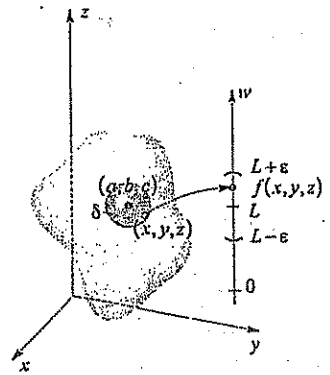


Figura 16.27

consideremos o intervalo aberto $(L-\in, L+\in)$ no eixo-w, como na Figura 16.27. Se (16.6) é verdadeira, então existe um $\delta > 0$ tal que, para todo ponto (x, y, z) interior à esfera de raio δ e centro (a, b, c) exceto possivelmente o próprio (a, b, c), $f(x, y, z)$ está no intervalo $(L-\in, L+\in)$.

A definição de limite (16.6) pode ser estendida a um ponto fronteira (a, b, c) de uma região R acrescentando-se a restrição que (x, y, z) esteja tanto em R como no interior de uma esfera de raio δ.

A regra dos dois caminhos (16.4) pode ser estendida a funções de três variáveis. No próximo exemplo utilizaremos esta regra para mostrar a inexistência de um limite.

EXEMPLO 5

Mostre que $\lim_{(x,y,z)\to(1,2,-1)} \dfrac{(x+y+3z)^3}{(x-1)(y-2)(z+1)}$ não existe.

SOLUÇÃO

Suponhamos que $P(x, y, z)$ tenda para $(1, 2, -1)$ ao longo da reta l paralela ao vetor $\langle a, b, c\rangle$, em que a, b e c são números reais. Por (14.34), as equações paramétricas de l são

$$x = 1 + at,\ y = 2 + bt,\ z = -1 + ct;\ t \text{ em } \mathbb{R}$$

Logo, para qualquer $P(x, y, z)$ em l diferente de $(1, 2, -1)$,

$$\frac{(x+y+3z)^3}{(x-1)(y-2)(z+1)} = \frac{(at+bt+3ct)^3}{(at)(bt)(ct)}$$

$$= \frac{(a+b+3c)^3t^3}{abct^3} = \frac{(a+b+3c)^3}{abc}$$

Atribuindo diferentes valores a a, b e c – isto é, caminhando para $(1, 2, -1)$ ao longo de diferentes trajetos – obtemos limites diferentes. Logo, pela regra dos dois caminhos, o limite não existe.

Uma função f de três variáveis é **contínua** em um ponto interior (a, b, c) de uma região se

$$\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x, y, z) = f(a, b, c)$$

A continuidade em um ponto fronteira se define por meio da extensão da Definição (16.6) a pontos fronteira.

Pode-se estender a definição de limite a funções de quatro ou mais variáveis; todavia, aqui não damos interpretações geométricas.

Na Seção 16.5 estudaremos funções compostas de diversas variáveis. Com ilustração simples, sejam f uma função de duas variáveis x e y e g uma função de uma variável t. Pode-se obter uma função h de duas variáveis substituindo t por $f(x, y)$ – isto é, fazendo $h(x, y) = g(f(x, y))$ – desde que o contradomínio de f esteja no domínio de g. O próximo exemplo ilustra o assunto.

EXEMPLO 6

Expresse $g(f(x, y))$ em termos de x e y e ache o domínio da função composta resultante.

(a) $f(x, y) = xe^y$, $g(t) = 3t^2 + t + 1$

(b) $f(x, y) = y - 4x^2$, $g(t) = \operatorname{sen}\sqrt{t}$

SOLUÇÃO

Em cada caso, substituímos t por $f(x, y)$ na expressão de $g(t)$:

(a) $g(f(x, y)) = g(xe^y) = 3x^2e^{2y} + xe^y + 1$

(b) $g(f(x, y)) = g(y - 4x^2) = \operatorname{sen}\sqrt{y - 4x^2}$

O domínio em (a) é $\mathbb{R}^2$, e o domínio em (b) consiste em todos os pares ordenados (x, y) tais que $y \geq 4x^2$.

Pode-se provar o seguinte análogo do Teorema (2.24) para funções do tipo ilustrado no Exemplo 6.

Teorema (16.7) Se uma função f de duas variáveis é contínua em (a, b) e uma função g de uma variável é contínua em $f(a, b)$, então a função h definida por $h(x, y) = g(f(x, y))$ é contínua em (a, b).

O Teorema (16.7) permite estabelecer a continuidade de funções compostas de diversas variáveis, conforme ilustrado no próximo exemplo.

EXEMPLO 7

Se $h(x, y) = e^{x^2 + 5xy + y^3}$, mostre que h é contínua em todo par (a, b).

SOLUÇÃO

Fazendo $f(x, y) = x^2 + 5xy + y^3$ e $g(t) = e^t$, segue-se que $h(x, y) = g(f(x, y))$. Como f é uma função polinomial, é contínua em todo par (a, b). Além disso, g é contínua em todo $t = f(a, b)$. Assim, pelo Teorema (16.7), h é contínua em (a, b).

EXERCÍCIOS 16.2

Exercs. 1-10: Ache o limite.

1 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-2}{3+xy}$

2 $\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{4+x}{2-y}$

3 $\lim_{(x,y)\to(\pi/2,1)} \frac{y+1}{2-\cos x}$

4 $\lim_{(x,y)\to(-1,3)} \frac{y^2+x}{(x-1)(y+2)}$

5 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$

6 $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{xy-y}{x^2-x+2xy-2y}$

7 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^3-2x^2y+3y^2x-2y^3}{x^2+y^2}$

8 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-x^2y+xy^2x-y^3}{x^2+y^2}$

9 $\lim_{(x,y,z)\to(2,3,1)} \frac{y^2-4y+3}{x^2z(y-3)}$

10 $\lim_{(x,y,z)\to(2,1,2)} \frac{x^2-z^2}{x^3-z^3}$

Exercs. 11-20: Mostre que o limite não existe.

11 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2-y^2}{x^2+2y^2}$

12 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-2xy+5y^2}{3x^2+4y^2}$

13 $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{xy-2x-y+2}{x^2+y^2-2x-4y+5}$

14 $\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{x^2-4x+4}{xy-2y-x+2}$

15 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y^3}{2y^5-2x^5}$

16 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy}{5x^4+2y^4}$

17 $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy+yz+xz}{x^2+y^2+z^2}$

18 $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{2x^2+3y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}$

19 $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^3+y^3+z^3}{xyz}$

20 $\lim_{(x,y,z)\to(2,1,0)} \frac{(x+y+z-3)^5}{z^3(x-2)(y-1)}$

Exercs. 21-24: Use coordenadas polares para achar o limite, caso exista.

21 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$

22 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$

23 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}$

24 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{senh}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

Exercs. 25-28: Descreva o conjunto dos pontos do plano xy em que f é contínua.

25 $f(x,y) = \ln(x+y-1)$

26 $f(x,y) = \frac{xy}{x^2-y^2}$

27 $f(x,y) = \sqrt{x}\,e^{\sqrt{1-y^2}}$

28 $f(x,y) = \sqrt{25-x^2-y^2}$

Exercs. 29-32: Descreva o conjunto de pontos em um sistema coordenado xyz em que f é contínua.

29 $f(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2-z^2}$

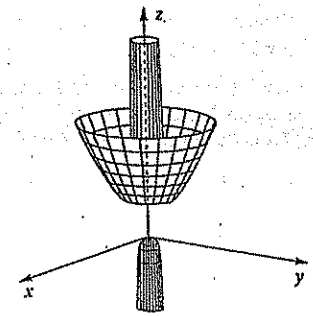
30 $f(x,y,z) = \sqrt{xy}\ \operatorname{tg} z$

31 $f(x,y,z) = \sqrt{x-2}\ \ln(yz)$

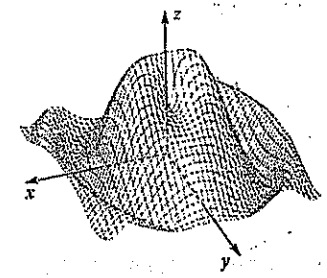
32 $f(x,y,z) = \sqrt{4-x^2-y^2-z^2}$

Exercs. 33-34: A figura exibe o gráfico de f. Use coordenadas polares para investigar $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

33 $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{\ln(x^2+y^2)}$



34 $f(x,y) = \frac{\operatorname{sen}(2x^2+y^2)}{x^2+y^2}$



Exercs. 35-38: Ache $h(x,y) = g(f(x,y))$ e use o Teorema (16.7) para determinar onde h é contínua.

35 $f(x,y) = x^2 - y^2$; $g(t) = (t^2-4)/t$

36 $f(x,y) = 3x + 2y - 4$; $g(t) = \ln(t+5)$

37 $f(x,y) = x + \operatorname{tg} y$; $g(z) = z^2 + 1$

38 $f(x,y) = y \ln x$; $g(w) = e^w$

39 Se $f(x,y) = x^2 + 2y$, $g(t) = e^t$, e $h(t) = t^2 - 3t$, ache $g(f(x,y))$, $h(f(x,y))$, e $f(g(t), h(t))$.

40 Se $f(x,y,z) = 2x + ye^z$ e $g(t) = t^2$, ache $g(f(x,y,z))$.

41 Se $f(u,v) = uv - 3u + v$, $g(x,y) = x - 2y$, e $k(x,y) = 2x + y$, ache $f(g(x,y), k(x,y))$.

42 Se $f(x,y) = 2x + y$, ache $f(f(x,y), f(x,y))$.

43 Estenda a Definição (16.3) a funções de quatro variáveis.

44 Prove que se f é uma função contínua de duas variáveis e $f(a,b) > 0$, então existe um círculo C no plano-xy com centro (a,b) tal que $f(x,y) > 0$ para todo par (x,y) no domínio de f e interior a C.

45 Prove diretamente pela Definição (16.3) que

(a) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a$

(b) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} y = b$

46 Se $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ e c é um número real, prove, diretamente pela Definição (16.3), que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} cf(x,y) = cL$$

16.3 DERIVADAS PARCIAIS

No Capítulo 3 definimos a derivada $f'(x)$ de uma função de *uma* variável como

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Podemos interpretar esta fórmula como segue. Primeiro, damos um acréscimo h à variável independente x; em seguida, dividimos a variação correspondente de f, $f(x+h) - f(x)$, por h; e, finalmente, fazemos h tender para 0. Podemos aplicar procedimento análogo às funções de diversas variáveis. Dada $f(x,y)$,

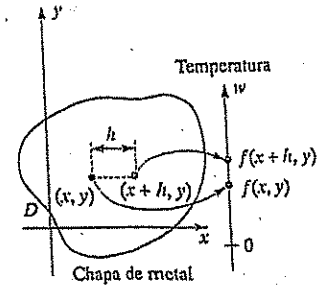


Figura 16.28

EXEMPLO 2

Ache $\frac{\partial w}{\partial y}$ se $w = xy^2e^{xy}$.

SOLUÇÃO

Escrevemos $w = (xy^2)(e^{xy})$ e aplicamos a regra do produto:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = (xy^2)\frac{\partial}{\partial y}(e^{xy}) + (e^{xy})\frac{\partial}{\partial y}(xy^2)$$

$$= xy^2(xe^{xy}) + e^{xy}(2xy) = xy(xy + 2)e^{xy}$$

Apliquemos a Definição (16.8) à ilustração física dada no começo da seção anterior: $f(x, y)$ é a temperatura no ponto (x, y) de uma chapa plana de metal no plano-xy. Note que os pontos (x, y) e $(x + h, y)$ estão numa horizontal, como se vê na Figura 16.28. Se um ponto se move horizontalmente de (x, y) a $(x + h, y)$, então a diferença $f(x + h, y) - f(x, y)$ é a variação líquida da temperatura, e temos

$$\text{Variação média da temperatura: } \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

Por exemplo, se a temperatura varia de 2 graus e a distância h é 4, então a variação média da temperatura de (x, y) a $(x + h, y)$ é $\frac{2}{4}$ ou $\frac{1}{2}$. Assim, *em média*, a temperatura varia à taxa de $\frac{1}{2}$ grau por unidade de variação na distância. Tomando o limite da variação média quando h tende para 0, vemos que *$f_x(x, y)$ é a taxa (instantânea) de variação da temperatura em relação à distância, quando o ponto (x, y) se move em direção horizontal.*

Analogamente, se um ponto se move segundo uma reta vertical de (x, y) a $(x, h + y)$, conforme Figura 16.29, obtemos

$$\text{Variação média da temperatura: } \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

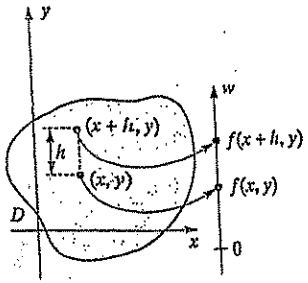


Figura 16.29

Fazendo h tender para 0, vê-se que $f_y(x, y)$ é a *taxa (instantânea) de variação da temperatura quando o ponto (x, y) se move em direção vertical.*

Como outra aplicação, suponhamos que D represente a superfície de um lago e que $f(x, y)$ seja a profundidade da água sob o ponto (x, y) da superfície. Neste caso, $f_x(x, y)$ é a taxa à qual a profundidade varia quando o ponto se afasta de (x, y) paralelamente ao eixo-x. Analogamente, $f_y(x, y)$ é a taxa de variação da profundidade na direção do eixo-y.

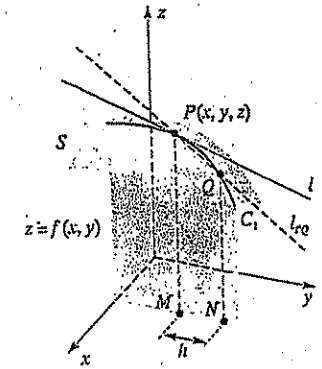


Figura 16.30

Utilizaremos a seguir o gráfico S de f para obter uma interpretação geométrica da Definição (16.8). Para ilustrar $f_y(x, y)$, consideremos os pontos $M(x, y, 0)$ e $N(x, y + h, 0)$. O plano paralelo ao plano-yz e que passa por M e N intercepta S segundo uma curva C_1 (ver Figura 16.30). Sejam P e Q os pontos de C_1 que têm projeções M e N no plano-xy.

Introduzindo um sistema retangular de coordenadas no plano que contém M, N, P e Q, o coeficiente angular m_{PQ} da secante l_{PQ} por P e Q é

$$m_{PQ} = \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

O limite de m_{PQ} quando h tende para 0 – isto é, a derivada parcial $f_y(x, y)$ – é o coeficiente angular da tangente l a C_1 em P.

Analogamente, se C_2 é o traço de S no plano paralelo ao plano-xz que passa por M, então $f_x(x, y)$ é o coeficiente angular da tangente a C_2 em P.

O teorema seguinte resume o assunto.

Teorema (16.10)

Sejam S o gráfico de $z = f(x, y)$ e $P(a, b, f(a, b))$ um ponto de S onde f_x e f_y existem. Sejam C_1 e C_2 os traços de S nos planos $x = a$ e $y = b$, respectivamente, e sejam l_1 e l_2 as tangentes a C_1 e C_2 em P (ver Figura 16.31).

(i) O coeficiente angular de l_1 no plano-$x = a$ é $f_y(a, b)$.

(ii) O coeficiente angular de l_2 no plano-$y = b$ é $f_x(a, b)$.

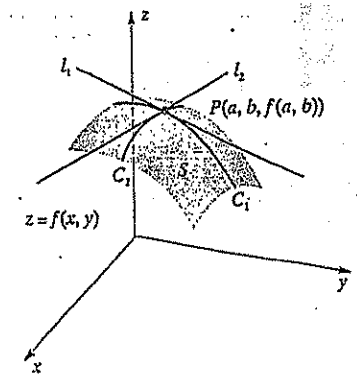


Figura 16.31

primeiro damos a uma das variáveis – digamos, x – um acréscimo h; em seguida, dividimos a variação correspondente de f, $f(x+h, y) - f(x, y)$, por h; e, finalmente, fazemos h tender para 0. Isto nos leva ao conceito de *derivada parcial* $f_x(x, y)$ de f *em relação a* x, definido em (16.8). Procedimento análogo aplica-se à variável y.

Definição (16.8)

Seja f uma função de duas variáveis. As **derivadas parciais primeiras** de f em relação a x e a y são as funções f_x e f_y tais que

$$f_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

Na Definição (16.8), x e y são fixos (mas arbitrários) e h é a única variável; daí utilizarmos a notação de limite de funções de uma variável em lugar da notação $(x, y) \to (a, b)$ introduzida na seção anterior. Podemos achar derivadas parciais sem utilizar limites, como segue. Fazendo $y = b$ e definindo uma função g de uma variável por $g(x) = f(x, b)$, então $g'(x) = f_x(x, b) = f_x(x, y)$. Assim, *para achar* $f_x(x, y)$, *consideramos* y *como constante e diferenciamos* $f(x, y)$ *em relação a* x. Da mesma forma, *para achar* $f_y(x, y)$, *consideramos a variável* x *como constante e diferenciamos* $f(x, y)$ *em relação a* y. O Exemplo 1 ilustra esta técnica.

Dão-se a seguir outras notações comumente usadas para derivadas parciais.

Notações para derivadas parciais (16.9)

Se $w = f(x, y)$, então

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial w}{\partial x} = w_x$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial w}{\partial y} = w_y$$

$\partial f/\partial x$ e $\partial f/\partial y$ são as *derivadas parciais de* f *em relação a* x *e a* y, respectivamente.

EXEMPLO 1

Se $f(x, y) = x^3y^2 - 2x^2y + 3x$, ache

(a) $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$

(b) $f_x(2, -1)$ e $f_y(2, -1)$

SOLUÇÃO

(a) Considerando y como constante e diferenciando em relação a x:

$$f_x(x, y) = 3x^2y^2 - 4xy + 3$$

Considerando x como constante e diferenciando em relação a y:

$$f_y(x, y) = 2x^3y - 2x^2$$

(b) Fazendo $x = 2$ e $y = -1$ em (a), temos

$$f_x(2, -1) = 3(2)^2(-1)^2 - 4(2)(-1) + 3 = 23,$$

$$f_y(2, -1) = 2(2)^3(-1) - 2(2)^2 = -24$$

Valem para derivadas parciais fórmulas análogas às das funções de uma variável. Por exemplo, se $u = f(x, y)$ e $v = g(x, y)$, então a regra do produto e a regra do quociente para derivadas são

$$\frac{\partial}{\partial x}(uv) = u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\dfrac{\partial u}{\partial x} - u\dfrac{\partial v}{\partial x}}{v^2}$$

ou, em notação inicial,

$$(fg)_x = fg_x + gf_x, \quad \left(\frac{f}{g}\right)_x = \frac{gf_x - fg_x}{g^2}$$

A regra da potência para diferenciação parcial é

$$\frac{\partial}{\partial x}(u^n) = nu^{n-1}\frac{\partial u}{\partial x},$$

em que n é um número real. Analogamente,

$$\frac{\partial}{\partial x}\cos u = -\operatorname{sen} u\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial x}e^u = e^u\frac{\partial u}{\partial x}$$

etc.

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} (3x^2y^2 - 4xy + 3) = 6x^2y - 4x$$

$$f_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} (2x^3y - 2x^2) = 6x^2y - 4x$$

$$f_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} (2x^3y - 2x^2) = 2x^3$$

Definem-se de modo análogo derivadas parciais terceiras ou de ordens mais elevadas. Por exemplo,

$$\frac{\partial}{\partial x} f_{xx} = f_{xxx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f_{xy} = f_{xyx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial x} \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \, \partial y \, \partial x}$$

e assim por diante. Se as derivadas parciais primeiras, segundas e terceiras são contínuas, então a ordem de diferenciação não importa, ou seja,

$$f_{xyx} = f_{yxx} = f_{xxy} \quad \text{e} \quad f_{yxy} = f_{xyy} = f_{yyx}$$

Obviamente, podem-se usar outras letras que são x e y. Se f é função de r e s, então empregam-se para as derivadas parciais os símbolos

$$f_r(r, s), \quad f_s(r, s), \quad f_{rs}, \quad \frac{\partial f}{\partial r}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$$

Notação e resultados análogos aplicam-se a derivadas parciais de funções de mais de duas variáveis.

EXERCÍCIOS 16.3

Exercs. 1-18: Ache as derivadas parciais primeiras de f.

1 $f(x, y) = 2x^4y^3 - xy^2 + 3y + 1$

2 $f(x, y) = (x^3 - y^2)^5$

3 $f(r, s) = \sqrt{r^2 + s^2}$

4 $f(s, t) = \frac{t}{s} - \frac{s}{t}$

5 $f(x, y) = xe^y + y \operatorname{sen} x$

6 $f(x, y) = e^x \ln xy$

7 $f(t, v) = \ln \sqrt{\frac{t + v}{t - v}}$

8 $f(u, w) = \operatorname{arctg} \frac{u}{w}$

9 $f(x, y) = x \cos \frac{x}{y}$

10 $f(x, y) = \sqrt{4x^2 - y^2} \sec x$

11 $f(x, y, z) = 3x^2z + xy^2$

12 $f(x, y, z) = x^2y^3z^4 + 2x - 5yz$

13 $f(r, s, t) = r^2e^{2s} \cos t$

14 $f(x, y, t) = \frac{x^2 - t^2}{1 + \operatorname{sen} 3y}$

15 $f(x, y, z) = xe^t - ye^x + ze^{-y}$

16 $f(r, s, v, p) = r^3 \operatorname{tg} s + \sqrt{s} e^{(v^2)} - v \cos 2p$

17 $f(q, v, w) = \operatorname{arc\,sen} \sqrt{qv} + \operatorname{sen} vw$

18 $f(x, y, z) = xyze^{xyz}$

Exercs. 19-24: Verifique que $w_{xy} = w_{yx}$.

19 $w = xy^4 - 2x^2y^3 + 4x^2 - 3y$

20 $\frac{x^2}{x + y}$

21 $w = x^3e^{-2y} + y^{-2} \cos x$

22 $w = y^2e^{(x^2)} + \frac{1}{x^2y^3}$

23 $w = x^2 \cosh \frac{z}{y}$

24 $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

25 Se $w = 3x^2y^3z + 2xy^4z^2 - yz$, ache w_{xyz}.

26 Se $w = u^4v^2 - 3uv^2t^3$, ache w_{uut}.

27 Se $u = v \sec rt$, ache u_{rvr}.

28 Se $v = y \ln (x^2 + z^4)$, ache v_{zzy}.

29 Se $w = \operatorname{sen} xyz$, ache $\frac{\partial^3 w}{\partial z \, \partial y \, \partial x}$.

30 Se $w = \frac{x^2}{y^2 + z^2}$, ache $\frac{\partial^3 w}{\partial z \, \partial y^2}$.

31 Se $w = r^4s^3t - 3s^2e^{rt}$, verifique que $w_{rts} = w_{rst} = w_{str}$.

32 Se $w = \operatorname{tg} uv + 2 \ln (u + v)$, verifique que $w_{uvv} = w_{vuv} = w_{vvu}$.

Exercs. 33-36: Uma função f de x e y é *harmônica* se

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

em todo o domínio de f. Prove que a função dada é harmônica.

33 $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$

34 $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$

35 $f(x, y) = \cos x \operatorname{senh} y + \operatorname{sen} x \cosh y$

36 $f(x, y) = e^{-x} \cos y + e^{-y} \cos x$

37 Se $w = \cos (x - y) + \ln (x + y)$, mostre que

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

38 Se $w = (y - 2x)^3 - \sqrt{y - 2x}$, mostre que $w_{xx} - 4w_{yy} = 0$.

39 Se $w = e^{-c^2t} \operatorname{sen} cx$, mostre que $w_{xx} = w_t$ para todo número real c.

40 A lei dos gases ideais pode ser enunciada como $PV = knT$, em que n é o número de moléculas do gás, V é o volume, T a temperatura, P a pressão e k é uma constante. Mostre que

$$\frac{\partial V}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial V} = -1$$

Exercs. 41-42: Mostre que v satisfaz a *equação da onda*

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

41 $v = (\operatorname{sen} akt)(\operatorname{sen} kx)$

42 $v = (x - at)^4 + \cos (x + at)$

Exercs. 43-46: Mostre que as funções u e v verificam *as equações de Cauchy-Riemann* $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$.

43 $u(x, y) = x^2 - y^2$; $v(x, y) = 2xy$

44 $u(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$; $v(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$

45 $u(x, y) = e^x \cos y$; $v(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$

46 $u(x, y) = \cos x \cosh y + \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$;
$v(x, y) = \cos x \cosh y - \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$

47 Escreva todas as derivadas parciais segundas possíveis de $w = f(x, y, z)$.

48 Se $w = f(x, y, z, t, v)$, defina w_t como um limite.

49 Uma chapa de metal plana jaz em um plano-xy, de modo que a temperatura T em (x, y) seja dada por $T = 10(x^2 + y^2)^2$, em que T é expresso em graus e x e y em centímetros. Ache a taxa instantânea de variação de T em relação à distância em $(1, 2)$ na direção do

(a) eixo-x (b) eixo-y

Definem-se da mesma maneira que em (16.8) as derivadas parciais primeiras de funções de três ou mais variáveis. Isto é, consideram-se constantes todas as variáveis menos uma, diferenciando-se em relação à variável restante. Dada $f(x, y, z)$, podemos calcular f_x, f_y e f_z (ou, equivalentemente, $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ e $\partial f/\partial z$). Por exemplo,

$$f_z(x, y, z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y, z+h) - f(x, y, z)}{h}$$

Como aplicação, seja $f(x, y, z)$ a temperatura no ponto $P(x, y, z)$. A derivada parcial $f_z(x, y, z)$ é a taxa instantânea de variação da temperatura em relação à distância ao longo de uma reta por P paralela ao eixo-z. As derivadas parciais $f_x(x, y, z)$ e $f_y(x, y, z)$ dão as taxas de variação nas direções dos eixos x e y, respectivamente.

EXEMPLO 3

Se $w = x^2y^3 \operatorname{sen} z + e^{xz}$, ache $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$ e $\partial w/\partial z$.

SOLUÇÃO

Procedamos como segue:

Considerando y e z constantes: $\dfrac{\partial w}{\partial x} = 2xy^3 \operatorname{sen} z + ze^{xz}$

Considerando x e z constantes: $\dfrac{\partial w}{\partial y} = 3x^2y^2 \operatorname{sen} z$

Considerando x e y constantes: $\dfrac{\partial w}{\partial z} = x^2y^3 \cos z + xe^{xz}$

Se f é uma função de duas variáveis x e y, então f_x e f_y são também funções de duas variáveis; podemos, assim, considerar *suas* derivadas parciais primeiras, que são as derivadas parciais segundas de f, denotadas como segue.

Derivadas parciais segundas (16.11)

$$\frac{\partial}{\partial x} f_x = (f_x)_x = f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f_x = (f_x)_y = f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f_y = (f_y)_x = f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f_y = (f_y)_y = f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Se $w = f(x, y)$, escrevemos

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) = f_{xx}(x, y) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = w_{xx},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x} f(x, y) = f_{xy}(x, y) = \frac{\partial^2 w}{\partial y\, \partial x} = w_{xy}$$

etc.

Note que f_{xy} significa que diferenciamos primeiro em relação a x e em seguida em relação a y, e f_{yx} significa que diferenciamos primeiro em relação a y e em seguida em relação a x. Com a notação "∂" a ordem é contrária, isto é, $\partial^2 f/\partial x\, \partial y$ indica que diferenciamos primeiro em relação a y e em seguida em relação a x.

Referimo-nos a f_{xy} e a f_{yx} como derivadas parciais segundas mistas de f. O próximo teorema afirma que, em condições convenientes, essas derivadas mistas (ou derivadas *cruzadas*) são iguais, isto é, a ordem de diferenciação é indiferente. A prova pode ser encontrada em textos de cálculo avançado.

Teorema (16.12)

Seja f uma função de duas variáveis x e y. Se f, f_x, f_y, f_{xy} e f_{yx} são contínuas em uma região aberta R, então $f_{xy} = f_{yx}$ em toda R.

A hipótese do Teorema (16.12) é satisfeita na maioria dos casos no cálculo e suas aplicações. Analogamente, se $w = f(x, y, z)$ e f tem derivadas parciais primeiras e segundas contínuas, então valem as seguintes igualdades para as derivadas parciais mistas:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial z\, \partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial z}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial z\, \partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y\, \partial z}$$

EXEMPLO 4

Ache as derivadas parciais segundas de f se

$$f(x, y) = x^3y^2 - 2x^2y + 3x$$

SOLUÇÃO

Esta função já foi considerada no Exemplo 1, em que obtivemos

$$f_x(x, y) = 3x^2y^2 - 4xy + 3 \quad \text{e} \quad f_y(x, y) = 2x^3y - 2x^2$$

Logo, as derivadas parciais segundas são:

$$f_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2 - 4xy + 3) = 6xy^2 - 4y$$

16.4 INCREMENTOS E DIFERENCIAIS

Se f é uma função de duas variáveis x e y, então os símbolos Δx e Δy denotam incrementos de x e y. Note que Δy é um incremento da variável *independente* y e não é o mesmo que o definido em (3.26) para uma variável *dependente* y. Em termos desta notação, a Definição (16.8) pode ser escrita

$$f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Define-se como segue o incremento da variável *dependente* $w = f(x, y)$.

Definição (16.13) Seja $w = f(x, y)$, e sejam Δx e Δy incrementos de x e y, respectivamente. O incremento Δw de $w = f(x, y)$ é

$$\Delta w = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

O incremento Δw representa a variação no valor funcional se (x, y) varia para $(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Considerando $f(x, y)$ como a temperatura no ponto (x, y) em uma chapa de metal, conforme Figura 16.32, então Δw é a variação final na temperatura ao passar de (x, y) para $(x + \Delta x, y + \Delta y)$.

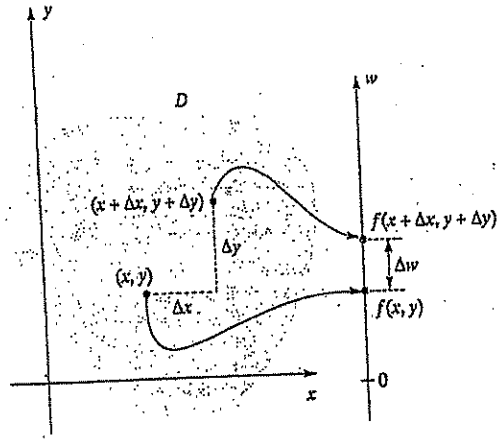


Figura 16.32

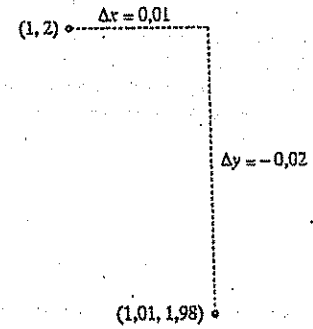


Figura 16.33

EXEMPLO 1

Seja $w = f(x, y) = 3x^2 - xy$.

(a) Se Δx e Δy são incrementos de x e y determine Δw.

(b) Use Δw para calcular a variação de $f(x, y)$ quando (x, y) varia de $(1, 2)$ para $(1{,}01; 1{,}98)$.

SOLUÇÃO

(a) Aplicando a Definição (16.13), temos

$$\begin{aligned}\Delta w &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)\\ &= [3(x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x)(y + \Delta y)] - (3x^2 - xy)\\ &= [3x^2 + 6x\,\Delta x + 3(\Delta x)^2 -\\ &\quad (xy + x\,\Delta y + y\,\Delta x + \Delta x\,\Delta y)] - 3x^2 + xy\\ &= 6x\,\Delta x + 3(\Delta x)^2 - x\,\Delta y - y\,\Delta x - \Delta x\,\Delta y\end{aligned}$$

(b) Se (x, y) varia de $(1, 2)$ para $(1{,}01, 1{,}98)$, temos a situação da Figura 16.33. Fazendo $x = 1$, $y = 2$, $\Delta x = 0{,}01$ e $\Delta y = -0{,}02$ na fórmula de Δw, temos

$$\begin{aligned}\Delta w &= 6(1)(0{,}01) + 3(0{,}01)^2 - (1)(-0{,}02) -\\ &\quad 2(0{,}01) - (0{,}01)(-0{,}02)\\ &= 0{,}0605\end{aligned}$$

Pode-se também achar este número calculando $f(1{,}01; 1{,}98) - f(1, 2)$.

A fórmula de Δw na Definição (16.13) é usada apenas para calcular diferenças de valores funcionais entre dois pontos. Não é adequada para estabelecer outros resultados sobre a variação de $f(x, y)$. O teorema seguinte dá uma fórmula mais útil para aplicações. Para simplificar, usaremos as abreviações $\in_1$ e $\in_2$ para certas funções de Δx e Δy, assim como para seus *valores* $\in_1(\Delta x, \Delta y)$ e $\in_2(\Delta x, \Delta y)$ em $(\Delta x, \Delta y)$.

50 A superfície de um lago é representada por uma região D em um plano-xy, de modo que a profundidade sob o ponto correspondente a (x, y) é dada por $f(x, y) = 300 - 2x^2 - 3y^2$, em que x, y e $f(x, y)$ são expressos em metros. Se um esquiador aquático está na água no ponto $(4, 9)$, ache a taxa instantânea à qual a profundidade varia na direção do

(a) eixo-x (b) eixo-y

51 Suponhamos que o potencial elétrico V no ponto (x, y, z) seja dado por $V = 100/(x^2 + y^2 + z^2)$, onde V é dado em volts e x, y, z em centímetros. Ache a taxa instantânea de variação de V em relação à distância em $(2, -1, 1)$ na direção do (a) eixo-x, (b) eixo-y, (c) eixo-z.

52 Um objeto está situado em um sistema coordenado retangular tal que a temperatura T no ponto $P(x, y, z)$ seja dada por $T = 4x^2 - y^2 + 16z^2$, em que T é expressa em graus e x, y, z em centímetros. Ache a taxa instantânea de variação de T em relação à distância no ponto $P(4, -2, 1)$ na direção do

(a) eixo-x (b) eixo-y (c) eixo-z

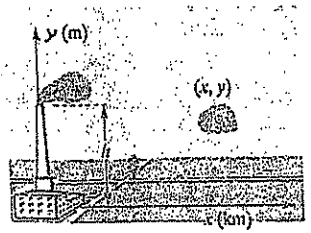
53 Quando um poluente tal como óxido nítrico é emitido por uma chaminé de h metros de altura, a concentração $C(x, y)$ (em $\mu g/m^3$) do poluente em um ponto a x quilômetros da chaminé e à altura de y metros (ver figura) pode ser representada por

$$C(x, y) = \frac{a}{x^2}\left[e^{-b(y-h)^2/x^2} + e^{-b(y+h)^2/x^2}\right]$$

em que a e b são constantes positivas que dependem das condições atmosféricas e da taxa de emissão do poluente. Suponha que

$$C(x, y) = \frac{200}{x^2}\left[e^{-0{,}02(y-10)^2/x^2} + e^{-0{,}02(y+10)^2/x^2}\right]$$

Calcule e interprete $\partial C/\partial x$ e $\partial C/\partial y$ no ponto $(2, 5)$.



54 A análise de certos circuitos elétricos envolve a fórmula $I = V/\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$, em que I é a corrente, V a voltagem, R a resistência, L a indutância e ω uma constante positiva. Ache e interprete $\partial I/\partial R$ e $\partial I/\partial L$.

55 A maioria dos computadores tem apenas um processador que pode ser utilizado para cálculos. Os supercomputadores modernos, entretanto, têm entre dois e vários milhares de processadores. Um supercomputador multiprocessador é comparado a um computador uniprocessador em termos de *speedup*. A *speedup* S é o número de vezes mais rápido que um cálculo pode ser feito com um multiprocessador, do que com um uniprocessador. A *lei de Amdahl* é uma fórmula usada para determinar S

$$S(p, q) = \frac{p}{q + p(1 - q)}$$

em que p é o número de processadores e q é a fração do cálculo que pode ser realizada utilizando todos os processadores disponíveis em paralelo – isto é, usando-os de maneira que os dados sejam processados concomitantemente por unidades separadas. A situação ideal, *paralelismo completo*, ocorre quando $q = 1$.

(a) Se $q = 0{,}8$, ache a *speedup* quando $p = 10$, 100 e 1.000. Mostre que a *speedup* S não pode exceder 5, independentemente do número de processadores disponíveis.

(b) Ache a taxa instantânea de variação de S em relação a q.

(c) Qual a taxa de variação em (b) se há paralelismo completo, e como o número de processadores afeta esta taxa de variação?

56 Ref. Exercício 55. A eficiência E de um cálculo por multiprocessador pode ser calculada pela equação

$$E = \frac{S(p, q)}{p} = \frac{1}{q + p(1 - q)}$$

Mostre que, se $0 \le q < 1$, E é uma função decrescente de p e, portanto, sem paralelismo completo, o aumento do número de processadores não aumenta a eficiência do cálculo.

57 No estudo da penetração da geada em uma rodovia, a temperatura T no instante t horas e à profundidade x pode ser dada aproximadamente por

$$T = T_0 e^{-\lambda x} \operatorname{sen}(\omega t - \lambda x),$$

em que T_0, ω e λ são constantes. O período do $\operatorname{sen}(\omega t - \lambda x)$ é 24 horas.

(a) Calcule e interprete $\partial T/\partial t$ e $\partial T/\partial x$.

(b) Mostre que T verifica a equação unidimensional do calor

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

em que k é uma constante.

58 Mostre que qualquer função dada por

$$w = (\operatorname{sen} ax)(\cos by)\, e^{-\sqrt{a^2 + b^2}\, z}$$

satisfaz a equação de Laplace em três dimensões

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$$

59 A capacidade vital V dos pulmões é o maior volume de ar que pode ser exalado após uma inalação de ar. Para um indivíduo do sexo masculino x anos de idade e y centímetros de altura, V pode ser aproximada pela fórmula $V = 27{,}63y - 0{,}112xy$. Calcule e interprete (a) $\dfrac{\partial V}{\partial x}$ (b) $\dfrac{\partial V}{\partial y}$.

60 Em um dia claro, a intensidade de luz solar (em velas-pé) às t horas após o nascente e à profundidade oceânica de x metros, pode ser aproximada por

$$I(x, t) = I_0 e^{-kx} \operatorname{sen}^3(\pi t/D)$$

em que I_0 é a intensidade ao meio-dia, D é a extensão do dia (em horas) e k é uma constante positiva. Se $I_0 = 1.000$, $D = 12$ e $k = 0{,}10$, calcule e interprete $\partial I/\partial t$ e $\partial I/\partial x$ quando $t = 6$ e $x = 5$.

61 Em economia, a *elasticidade de preço de procura* de um artigo indica a reação dos consumidores a uma alteração no preço de mercado do artigo. Suponhamos que n artigos $C_1, C_2, \ldots, C_n$ tenham preços $p_1, p_2, \ldots, p_n$, respectivamente, e que a demanda por C_k seja uma função q_k de $p_1, p_2, \ldots, p_n$. A elasticidade de preço de C_k é a função e_k definida por

$$e_k = \frac{p_k}{q_k}\frac{\partial q_k}{\partial p_k}$$

Se, para cada k,

$$q_k = b_k p_1^{-a_{k1}} p_2^{-a_{k2}} \cdots p_n^{-a_{kn}}$$

em que $a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn}$ e b_k são constantes não negativas, mostre que e_k é uma função constante.

62 Ref. Exercício 61. Diz-se que o artigo C_k é *independente* do artigo C_j se uma variação no preço p_k não afeta a demanda q_j. Isto equivale à condição $\partial q_j/\partial p_k = 0$. Se q_k tem a forma do Exercício 61, mostre que C_k é independente de C_j se e somente se $a_{jk} = 0$.

Exercs. 63-64: Use o Teorema (16.10).

63 Seja C o traço do parabolóide $z = 9 - x^2 - y^2$ no plano $x = 1$. Escreva as equações paramétricas da tangente l a C no ponto $P(1, 2, 4)$. Esboce o parabolóide, C e l.

64 Seja C o traço do gráfico de $z = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$ no plano $y = 2$. Escreva as equações paramétricas da tangente l a C no ponto $P(1, 2, \sqrt{11})$. Esboce a superfície, C e l.

Exercs. 65-66: Use as seguintes fórmulas com $h = 0{,}01$ para aproximar $f_x(0{,}5, 0{,}2)$ e $f_y(0{,}5, 0{,}2)$, e compare os resultados com os valores obtidos de $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$.

$$f_x(x, y) \approx \frac{f(x - 2h, y) - 4f(x - h, y) + 3f(x, y)}{2h}$$

$$f_y(x, y) \approx \frac{f(x, y - 2h) - 4f(x, y - h) + 3f(x, y)}{2h}$$

65 $f(x, y) = y^2 \operatorname{sen}(xy)$

66 $f(x, y) = xy^3 + 4x^3y^2$

Exercs. 67-68: Use as seguintes fórmulas com $h = 0{,}01$ para aproximar $f_{xx}(0{,}6, 0{,}8)$ e $f_{yy}(0{,}6, 0{,}8)$.

$$f_{xx}(x, y) \approx \frac{f(x + h, y) - 2f(x, y) + f(x - h, y)}{h^2}$$

$$f_{yy}(x, y) \approx \frac{f(x, y + h) - 2f(x, y) + f(x, y - h)}{h^2}$$

67 $f(x, y) = \sec^2[\operatorname{tg}(xy^2)] \operatorname{sen}(xy)$

68 $f(x, y) = \dfrac{x^3 + xy^2}{\operatorname{tg}(xy) + 4x^2y^3}$

SOLUÇÃO

Da solução do Exemplo 1,

$$\Delta w = 6x\,\Delta x + 3(\Delta x)^2 - x\,\Delta y - y\,\Delta x - \Delta x\,\Delta y,$$

ou, equivalentemente,

$$\Delta w = (6x - y)\,\Delta x + (-x)\,\Delta y + (3\,\Delta x)(\Delta x) + (-\Delta x)\,\Delta y$$

o que está na forma dada no Teorema (16.14) com

$$f_x(x, y) = 6x - y, f_y(x, y) = -x, \in_1 = 3\,\Delta x, \in_2 = -\Delta x$$

Note que $\in_1$ e $\in_2$ não são únicos, pois podemos também escrever

$$\Delta w = (6x - y)\,\Delta x + (-x)\,\Delta y + (3\,\Delta x - \Delta y)\,\Delta x + (0)\,\Delta y$$

em que $\in_1 = 3\,\Delta x - y$ e $\in_2 = 0$.

No Capítulo 3 definimos diferenciais de funções de uma variável. Lembremos, de (3.27), que se $u = f(x)$ e Δx é um incremento de x, então $dx = \Delta x$ e $du = f'(x)\,dx$. A próxima definição estende este conceito a funções de duas variáveis.

Definição (16.15)

Seja $w = f(x, y)$, e sejam Δx e Δy incrementos de x e y, respectivamente.

(i) As diferenciais dx e dy das variáveis independentes x e y são

$$dx = \Delta x \quad \text{e} \quad dy = \Delta y$$

(ii) A diferencial dw da variável dependente w é

$$dw = f_x(x, y)\,dx + f_y(x, y)\,dy = \frac{\partial w}{\partial x}\,dx + \frac{\partial w}{\partial y}\,dy$$

Se f satisfaz as hipóteses do Teorema (16.14), então, usando a conclusão daquele teorema, com o par (x_0, y_0) substituído por (x, y), vemos que

$$\Delta w = dw + \in_1 \Delta x + \in_2 \Delta y$$

Logo, $$\Delta w - dw = \in_1 \Delta x + \in_2 \Delta y$$

em que tanto $\in_1$ como $\in_2$ tendem para 0 quando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$. Segue-se que se Δx e Δy são pequenos, então $w - dw \approx 0$, isto é, $dw \approx \Delta w$. Isto nos permite aproximar a variação de w correspondente a pequenas variações x e y.

EXEMPLO 3

Se $w = 3x^2 - xy$, calcule dw e aplique-o para aproximar a variação de w se (x, y) varia de (1,2) para (1,01; 1,98). Compare o resultado com a variação exata de w.

SOLUÇÃO

Esta função é a mesma considerada nos Exemplos 1 e 2. Aplicando a Definição (16.15), temos

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}\,dx + \frac{\partial w}{\partial y}\,dy$$

$$= (6x - y)\,dx + (-x)\,dy$$

Fazendo $x = 1, y = 2, dx = \Delta x = 0{,}01$ e $dy = \Delta y = -0{,}02$, obtemos

$$dw = (6 - 2)(0{,}01) + (-1)(-0{,}02) = 0{,}06$$

No Exemplo 1 vimos que $\Delta w = 0{,}0605$. Logo, o erro decorrente da utilização de dw é 0,0005.

EXEMPLO 4

O raio e a altura de um cilindro reto são 8 cm e 20 cm, respectivamente, com erro possível de medida de ±0,01 cm. Use diferenciais para aproximar o erro máximo no cálculo do volume do cilindro.

SOLUÇÃO

O método é análogo ao empregado para funções de uma variável. Assim, começamos com a fórmula geral $V = \pi r^2 h$ para o volume V de um cilindro de raio de base r e altura h. Encaramos r e h como valores medidos, com erros máximos de medida dr e dh, respectivamente. A Figura 16.36 ilustra o caso em que tanto dr como dh são positivos. Naturalmente, o erro em uma das medidas, ou em ambas, pode ser negativo. O erro no volume calculado é a variação de V correspondente a dr e dh. Utilizando diferenciais, temos, de acordo com observações prévias e a Definição (16.15)(ii),

$$\Delta V \approx dV = \frac{\partial V}{\partial r}\,dr + \frac{\partial V}{\partial h}\,dh = 2\pi r h\,dr + \pi r^2\,dh$$

Finalmente, atribuamos valores específicos às variáveis. Fazendo $r = 8$, $h = 20$ e $dr = dh = \pm 0{,}01$, obtemos a aproximação seguinte para o erro máximo:

$$dV = 2\pi(8)(20)(0{,}01) + (64)(0{,}01)\pi =$$
$$= \pi\,[3{,}2 + 0{,}64] = 3{,}84\pi = 12{,}06\ \text{cm}^3$$

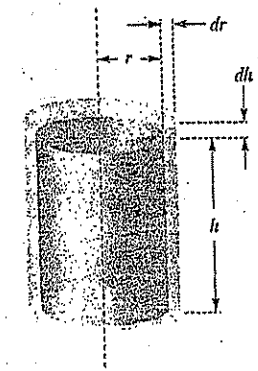


Figura 16.36

Teorema (16.14)

Seja $w = f(x, y)$, em que a função f é definida em uma região $R = \{(x, y);\ a < x < b,\ c < y < d\}$. Suponhamos que f_x e f_y existam em toda R e sejam contínuas no ponto (x_0, y_0) em R. Se $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ está em R e

$$\Delta w = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

então

$$\Delta w = f_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f_y(x_0, y_0)\,\Delta y + \in_1 \Delta x + \in_2 \Delta y$$

em que $\in_1$ e $\in_2$ são funções de Δx e Δy que têm limite 0 quando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.

DEMONSTRAÇÃO

A Figura 16.34 ilustra o gráfico de R e os pontos que desejamos considerar.

Escrevamos o incremento Δw subtraindo e somando $f(x_0, y_0 + \Delta y)$ como a seguir:

$$\text{(1)}\quad \Delta w = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

$$= [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)]$$

$$+ [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)]$$

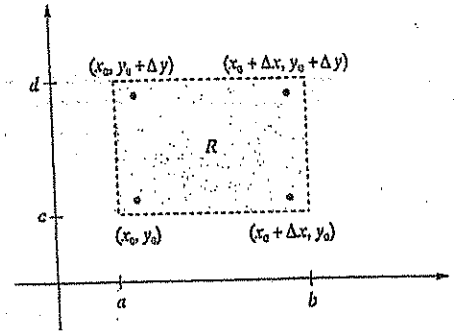


Figura 16.34

Consideremos em seguida Δy como constante e definamos uma função g de *uma* variável x fazendo

$$g(x) = f(x, y_0 + \Delta y),\ a < x < b$$

Segue-se que $g'(x) = f_x(x, y_0 + \Delta y)$ para $a < x < b$. Aplicando o teorema do valor médio (4.12) a g no intervalo $[x_0, x_0 + \Delta x]$, obtemos

$$g(x_0 + \Delta x) - g(x_0) = g'(u)\,\Delta x$$

em que u está entre x_0 e $x_0 + \Delta x$. Como $g(x) = f(x, y_0 + \Delta y)$ e $g'(x) = f_x(x, y_0 + \Delta y)$, a última equação pode ser escrita

$$\text{(2)}\quad f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) = f_x(u, y_0 + \Delta y)\,\Delta x.$$

Analogamente, fazendo $h(y) = f(x_0, y)$ para $c < y < d$, então $h'(y) = f_y(x_0, y)$. Aplicando o teorema do valor médio à função h no intervalo $[y_0, y_0 + \Delta y]$, obtemos

$$h(y_0 + \Delta y) - h(y_0) = h'(v)\,\Delta y,$$

em que v está entre y_0 e $y_0 + \Delta y$, ou, equivalentemente,

$$\text{(3)}\quad f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f_y(x_0, v)\,\Delta y$$

Levando (2) e (3) na expressão de Δw em (1), obtemos

$$\text{(4)}\quad \Delta w = f_x(u, y_0 + \Delta y)\,\Delta x + f_y(x_0, v)\,\Delta y$$

A Figura 16.35 exibe pontos típicos correspondentes a $(u, y_0 + \Delta y)$ e (x_0, v).

Definamos $\in_1$ e $\in_2$ como a seguir:

$$\in_1 = f_x(u, y_0 + \Delta y) - f_x(x_0, y_0)$$

$$\in_2 = f_y(x_0, v) - f_y(x_0, y_0)$$

Como f_x e f_y são contínuas, e notando, pela Figura 16.35, que $u \to x_0$ quando $\Delta x \to 0$ e $v \to y_0$ quando $\Delta y \to 0$, pode-se mostrar que $\in_1$ e $\in_2$ têm limite 0 quando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$. Escrevendo as equações precedentes para $\in_1$ e $\in_2$ na forma

$$f_x(u, y_0 + \Delta y) = f_x(x_0, y_0) + \in_1$$
$$f_y(x_0, v) = f_y(x_0, y_0) + \in_2$$

e levando em (4), a expressão de Δw, vemos que

$$\Delta w = [f_x(x_0, y_0) + \in_1]\,\Delta x + [f_y(x_0, y_0) + \in_2]\,\Delta y,$$

o que conduz à conclusão do teorema.

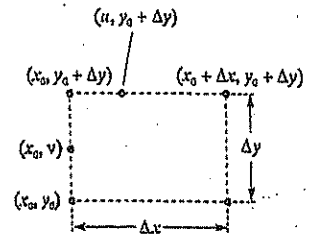


Figura 16.35

EXEMPLO 2

Se $w = 3x^2 - xy$, ache expressões para $\in_1$ e $\in_2$ que satisfaçam a conclusão do Teorema (16.14) com $(x_0, y_0) = (x, y)$.

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = [f_x(x_0, y_0) + \in_1](x - x_0) + [f_y(x_0, y_0) + \in_2](y - y_0)$$

Segue-se que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x, y) - f(x_0, y_0)] = 0$$

ou, equivalentemente,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

Logo, f é contínua em (x_0, y_0).

Se f_x e f_y são contínuas, então, pelo Teorema (16.7), f é diferenciável. Isto nos dá o seguinte corolário do Teorema (16.18).

Corolário (16.19) Se f é uma função de duas variáveis e se f_x e f_y são contínuas em uma região retangular R, então f é contínua em R.

Pode-se mostrar, por meio de exemplos, que a simples *existência* de f_x e f_y não é suficiente para assegurar a continuidade de f (ver Exercício 41) contrariamente ao que se passa no caso de uma única variável, em que a existência de f' implica a continuidade de f.

O estudo precedente pode ser estendido a funções de mais de duas variáveis. Suponhamos, por exemplo, que $w = f(x, y, z)$, em que f é definida em uma região R conveniente (tal como uma caixa retangular) e f_x, f_y, f_z existam em R e sejam contínuas em (x, y, z). Se dermos a x, y, z incrementos $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, respectivamente, então o incremento correspondente

$$\Delta w = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)$$

pode escrever-se sob a forma

$$\Delta w = f_x(x, y, z)\,\Delta x + f_y(x, y, z)\,\Delta y + f_z(x, y, z)\,\Delta z + \in_1 \Delta x + \in_2 \Delta y + \in_3 \Delta z,$$

em que $\in_1, \in_2$ e $\in_3$ são funções de Δx, Δy e Δz que têm limite 0 quando $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \to (0, 0, 0)$. Podem-se estabelecer resultados análogos a (16.17)-(16.19) para funções de três variáveis.

A definição seguinte constitui uma extensão de (16.15) a funções de três variáveis.

Definição (16.20) Seja $w = f(x, y, z)$ e sejam Δx, Δy e Δz incrementos de x, y e z, respectivamente.

(i) As diferenciais dx, dy e dz das variáveis independentes x, y e z são

$$dx = \Delta x,\ dy = \Delta y,\ dz = \Delta z$$

(ii) A diferencial dw da variável dependente w é

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz$$

Pode-se usar dw como aproximação de Δw se os incrementos de x, y e z são pequenos. A diferenciabilidade se define como em (16.16). Faz-se de modo análogo a extensão ao caso de quatro ou mais variáveis.

EXEMPLO 6

Suponhamos que as dimensões (em centímetros) de uma caixa retangular variem de 9, 6 e 4 para 9,02, 5,97 e 4,01, respectivamente.

(a) Obtenha, por meio de diferenciais, uma aproximação da variação do volume.

(b) Ache a variação exata do volume.

SOLUÇÃO

(a) O método de resolução é análogo ao usado para o cilindro circular reto do Exemplo 4. Assim, começamos com a fórmula geral $V = xyz$ para o volume de uma caixa retangular de dimensões x, y e z. Encaramos em seguida dx, dy e dz como erros nas medidas. O erro no volume calculado é então

$$\Delta V \approx dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

$$= yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz.$$

Finalmente, substituímos os valores dados $x = 9$, $y = 6$, $z = 4$, $dx = 0{,}02$, $dy = -0{,}03$ e $dz = 0{,}01$, obtendo

$$dV = 24(0{,}02) + 36(-0{,}03) + 54(0{,}01)$$

$$= 0{,}48 - 1{,}08 + 0{,}54 = -0{,}06$$

Assim, o volume diminui de aproximadamente 0,06 cm³.

Recordemos, da Definição (3.32), que, se uma mensuração w tem um erro (aproximado por) dw, então o *erro médio* é aproximadamente dw/w. O *erro percentual* é o erro médio multiplicado por 100%. No próximo exemplo vamos estimar o erro percentual ocasionado por erros em duas mensurações relacionadas.

EXEMPLO 5

Um balão meteorológico é liberado ao nível do mar, a uma distância R do olho de um furacão, e sua altitude aumenta à medida que ele se move em direção ao olho. A altitude h que o balão atingirá no olho pode ser aproximada por

$$h = \pi^2 g \frac{R^4}{C^2}$$

em que g é uma constante gravitacional e C é uma medida meteorológica chamada *circulação* da velocidade do vento. (A circulação está estreitamente relacionada com a intensidade e a direção dos ventos no interior do furacão). Se os erros percentuais máximos nas mensurações de R e h são ± 2% e ± 5%, respectivamente, estime o erro percentual máximo no cálculo de C.

SOLUÇÃO

Resolvendo a fórmula dada em relação a C, obtemos

$$C = \pi g^{1/2} \frac{R^2}{h^{1/2}}$$

Se os erros nas medidas de R e h são dR e dh, então o erro em C pode ser aproximado por

$$dC = \frac{\partial C}{\partial R} dR + \frac{\partial C}{\partial h} dh$$

$$= \pi g^{1/2} \frac{2R}{h^{1/2}} dR - \pi g^{1/2} \frac{1}{2} \frac{R^2}{2h^{3/2}} dh$$

Como estamos interessados em erros percentuais, dividimos ambos os membros desta equação por $C = \pi g^{1/2} R^2/h^{1/2}$, obtendo

$$\frac{dC}{C} = 2\frac{dR}{R} - \frac{1}{2}\frac{dh}{h}$$

O erro percentual máximo ocorre quando dR e dh têm sinais opostos. Assim, se $dR/R = 2\%$ e $dh/h = -5\%$,

$$\frac{dC}{C} = 2(2\%) - \frac{1}{2}(-5\%) = 6{,}5\%$$

Se $dR/R = -2\%$ e $dh/h = 5\%$,

$$\frac{dC}{C} = 2(-2\%) - \frac{1}{2}(5\%) = -6{,}5\%$$

Para uma função de uma variável, o termo *diferenciável* significa que a derivada existe. Para funções de duas variáveis, levamos em conta a condição indicada na próxima definição, que se baseia na fórmula Δw no Teorema (16.14).

Definição (16.16) Seja $w = f(x, y)$. A função f é **diferenciável** em (x_0, y_0) se Δ puder ser colocado na forma

$$\Delta w = f_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f_y(x_0, y_0)\,\Delta y + \in_1 \Delta x + \in_2 \Delta y$$

em que $\in_1$ e $\in_2$ são funções de Δx e Δy que têm limite 0 quando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.

Diz-se que uma função f de duas variáveis é diferenciável em uma região R se é diferenciável em todo ponto de R. O próximo teorema decorre diretamente do Teorema (16.14) e da Definição (16.16). O termo *região retangular* significa uma região do tipo descrito em (16.14).

Teorema (16.17) Se $w = f(x, y)$ e se f_x e f_y são contínuas em uma região retangular R, então f é diferenciável em R.

O resultado seguinte mostra que uma função diferenciável é contínua e constitui uma das razões para utilizar a Definição (16.16) como definição de diferenciabilidade.

Teorema (16.18) Se uma função f de duas variáveis é diferenciável em (x_0, y_0), então f é contínua em (x_0, y_0).

DEMONSTRAÇÃO

Consideremos os incrementos Δx e Δy. Podemos escrever Δw de duas maneiras, de acordo com (16.13) e (16.16):

$$\Delta w = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

$$\Delta w = [f_x(x_0, y_0) + \in_1] \Delta x + [f_y(x_0, y_0) + \in_2] \Delta y$$

Igualando estas expressões e fazendo $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, então

Com (x_2, y_2) em lugar de (x_1, y_1) em (1), obtemos valores (aproximados) de Δx_1 e Δy_1 e tomamos, como terceira aproximação,

$$(x_3, y_3) = (x_2 + \Delta x_1, y_2 + \Delta y_1)$$

O processo continua até atingirmos a precisão desejada. A tabela seguinte registra aproximações com oito casas decimais dos valores usados nas equações (1). Note que, se $k = 5$, temos $|\Delta x| \leq \in$ e $|\Delta y| \leq \in$ com $\in = 0{,}00000005$. Logo, a solução (x_5, y_5) tem precisão de oito casas decimais.

k	x_k	y_k	$f(x_k, y_k)$	$g(x_k, y_k)$
1	0,5	0,5	−0,5	0,02057446
2	0,77725783	0,72274217	0,12648598	0,02141484
3	0,74030063	0,67498279	0,00364679	0,00047290
4	0,73908622	0,67361333	0,00000335	0,00000050
5	0,73908513	0,67361203	0,00000000	0,00000000

$f_x(x_k, y_k)$	$f_y(x_k, y_k)$	$g_x(x_k, y_k)$	$g_y(x_k, y_k)$	Δx_k	Δy_k
1	1	−0,87758256	1	0,27725783	0,22274217
1,55451565	1,44548435	−0,71283938	1	−0,03695719	−0,04775939
1,48060127	1,34996558	−0,73826581	1	−0,00121442	−0,00136946
1,47817243	1,34722665	−0,73908440	1	−0,00000108	−0,00000130
1,47817027	1,34722406	−0,73908513	1	0,00000000	0,00000000

Pela tabela,

$$(x_5, y_5) \approx (0{,}73908513;\ 0{,}67361203)$$

Por simetria, uma aproximação da solução correspondente ao ponto no terceiro quadrante na Figura 16.37 é $(-x_5, -y_5)$.

EXERCÍCIOS 16.4

Exercs. 1-2: Se Δx e Δy são incrementos de x e y, ache (a) Δw, (b) dw e (c) $dw - \Delta w$.

1 $w = 5y^2 - xy$ 2 $w = xy - y^2 + 3x$

Exercs. 3-6: Determine expressões de $\in_1$ e $\in_2$ que satisfaçam a Definição (16.16).

3 $f(x, y) = 4y^2 - 3xy + 2x$

4 $f(x, y) = (2x - y)^2$

5 $f(x, y) = x^3 + y^3$

6 $f(x, y) = 2x^2 - xy^2 + 3y$

Exercs. 7-18: Calcule dw.

7 $w = x^3 - x^2y + 3y^2$ 8 $w = 5x^2 + 4y - 3xy^3$

9 $w = x^2 \operatorname{sen} y + 2y^{3/2}$ 10 $w = ye^{-2x} - 3x^4$

11 $w = x^2e^{xy} + (1/y^2)$

12 $w = \ln(x^2 + y^2) + x \operatorname{arctg} y$

13 $w = x^2 \ln(y^2 + z^2)$ 14 $w = x^2y^3z + e^{-2z}$

15 $w = \dfrac{xyz}{x + y + z}$ 16 $w = x^2e^{yz} + y \ln z$

17 $w = x^2z + 4yt^3 - xz^2t$ 18 $w = x^2y^3z^{r-1}v^4$

Exercs. 19-22: Por meio de diferenciais, aproxime a variação de f para as variações indicadas nas variáveis independentes.

19 $f(x, y) = x^2 - 3x^3y^2 + 4x - 2y^3 + 6$; $(-2, 3)$ para $(-2{,}02;\ 3{,}01)$

20 $f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y$; $(1, 2)$ para $(1{,}03;\ 1{,}99)$

21 $f(x, y, z) = x^2z^3 - 3yz^2 + x^{-3} + 2y^{1/2}z$; $(1, 4, 2)$ para $(1{,}02;\ 3{,}97;\ 1{,}96)$

22 $f(x, y, z) = xy + xz + yz$; $(-1, 2, 3)$ para $(-0{,}98;\ 1{,}99;\ 3{,}03)$

23 As dimensões de uma caixa retangular fechada são 1 m, 2 m e 3 m, com erro possível de 0,16 cm em cada medida. Por meio de diferenciais, aproxime o erro máximo no valor calculado

(a) da área da superfície.

(b) do volume.

24 Medem-se os dois lados menores de um triângulo retângulo, obtendo-se 3 cm e 4 cm, respectivamente, com erro possível de ± 0,02 cm em cada medida. Por meio de diferenciais, obtenha uma aproximação do erro máximo no valor calculado (a) da hipotenusa, (b) da área do triângulo.

25 A *resistência à retirada* de um prego indica sua força de adesão à madeira. Uma fórmula empírica para os pregos comuns é $P = 2433{,}5\, S^{5/2} RD$, em que P é a resistência à retirada máxima em kg, S é a gravidade específica da madeira a 12% de umidade, R é o raio do prego (em cm) e D é a profundidade (em cm) da penetração do prego na madeira. Um prego *Cd* comum de 5 cm de comprimento e 0,28 cm de diâmetro é completamente introduzido em um pedaço de abeto Douglas, cuja gravidade específica é 0,54.

(a) Aproxime a resistência máxima à retirada. (Nas aplicações, apenas um sexto dessa resistência é considerado seguro, para longos períodos de tempo.)

(b) Quando os pregos são fabricados, R e D podem variar por ± 2%, e a gravidade específica de diferentes amostras de abeto Douglas pode variar por ± 3%. Obtenha uma aproximação do erro percentual máximo no valor calculado de P.

26 A resistência total R de três resistores R_1, R_2 e R_3, ligados em paralelo, é dada por

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Se as medidas de R_1, R_2 e R_3 são 100, 200 e 400 ohms, respectivamente, com erro máximo de ± 1% em cada medida, aproxime o erro máximo no valor calculado de R.

27 A gravidade específica de um objeto mais denso que a água é dada por $s = A/(A - W)$, em que A e W são os pesos (em libras) do objeto no ar e na água, respectivamente. Se as medidas são $A = 12$ lb e $W = 5$ lb, com erros máximos de $\pm \frac{1}{2}$ oz no ar e ± 1 oz na água, qual é o erro máximo no valor calculado de s?

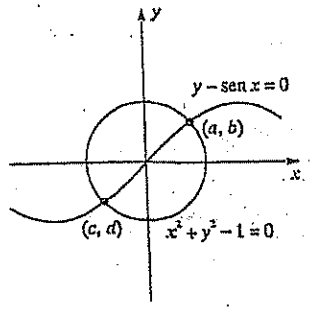


Figura 16.37

(b) a variação exata do volume é

$$\Delta V = (9{,}02)(5{,}97)(4{,}01) - (9)(6)(4) = -0{,}063906 \text{ cm}^3$$

Em textos de pré-cálculo estudam-se métodos de resolução de sistemas de equações lineares como

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 5x + 2y = 9 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x + 3y - z = 4 \\ 2x - y + 3z = 1 \\ x + 2y - z = -5 \end{cases}$$

Nas aplicações costumam aparecer sistemas de equações não-lineares, como

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ y - \operatorname{sen} x = 0 \end{cases}$$

Como não podemos obter soluções exatas de um tal sistema por técnicas algébricas, é necessário estabelecermos métodos para *aproximar* soluções. Poderíamos grafar ambas as equações em um mesmo sistema de eixos, conforme Figura 16.37, e estimar os pontos de intersecção (a, b) e (c, d); entretanto, a maioria das aplicações exige maior precisão. Estudaremos a seguir um método baseado em diferenciais, que permite aproximar soluções com qualquer grau de precisão.

Consideremos um sistema geral de duas equações em x e y:

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

em que f e g são funções de duas variáveis. (No caso anterior, $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ e $g(x, y) = y - \operatorname{sen} x$.) Queremos obter uma aproximação do ponto de intersecção (a, b) dos gráficos das duas equações (ver Figura 16.38). Comecemos com uma *primeira aproximação* (x_1, y_1), na qual, conforme indicado na figura, há incrementos Δx e Δy tais que

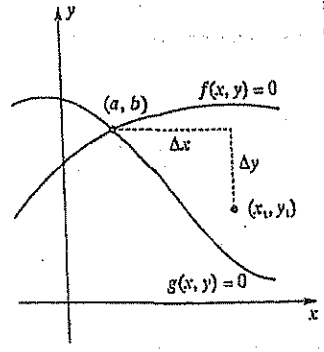


Figura 16.38

$$a = x_1 + \Delta x, \; b = y_1 + \Delta y$$

Sejam Δf e Δg os incrementos de f e g correspondentes à passagem de (x_1, y_1) para (a, b). Como $f(a, b) = 0$ e $g(a, b) = 0$, vemos que

$$\Delta f = f(a, b) - f(x_1, y_1) = -f(x_1, y_1)$$

$$\Delta g = g(a, b) - g(x_1, y_1) = -g(x_1, y_1)$$

Assim, se df e dg são as diferenciais de f e g calculadas em (x_1, y_1), então

$$df \approx -f(x_1, y_1) \text{ e } dg \approx -g(x_1, y_1)$$

Utilizando a forma de df e dg da Definição (16.15)(ii), obtemos o seguinte sistema de *igualdades aproximadas* nas incógnitas Δx e Δy:

$$(1) \quad \begin{cases} f_x(x_1, y_1)\,\Delta x + f_y(x_1, y_1)\,\Delta y \approx -f(x_1, y_1) \\ g_x(x_1, y_1)\,\Delta x + g_y(x_1, y_1)\,\Delta y \approx -g(x_1, y_1) \end{cases}$$

Na prática, costuma-se escrever este sistema sob *forma matricial* como segue, em que todas as funções são calculadas em (x_1, y_1):

$$(2) \quad \begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -f \\ -g \end{bmatrix}$$

Resolvemos as igualdades aproximadas (1) em relação a Δx e Δy tratando $\approx$ como $=$, o que nos dá aproximações para Δx e Δy. Embora $(x_2, y_2) = (x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y)$ não seja em geral a solução *exata* (a, b), já é uma aproximação melhor do que (x_1, y_1). O processo pode ser iterado utilizando-se a aproximação (x_2, y_2) em lugar de (x_1, y_1) em (1), para obter uma terceira aproximação (x_3, y_3). Prosseguimos desta forma até que $|\Delta x| \leq \in$ e $|\Delta y| \leq \in$ para alguma tolerância positiva $\in > 0$. A convergência de x_k e y_k para a e b, respectivamente, costuma ser rápida, e o número de algarismos corretos duplica aproximadamente a cada passo. Este método de aproximações sucessivas é conhecido como **método de Newton** para um sistema de duas equações com duas incógnitas. O método pode ser estendido a sistemas de n equações com n incógnitas, e é um dos métodos mais usados para obter aproximações de soluções de sistemas de equações não-lineares.

EXEMPLO 7

Use o método de Newton para obter uma aproximação das soluções do seguinte sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ y - \operatorname{sen} x = 0 \end{cases}$$

SOLUÇÃO

A Figura 16.37 é o gráfico das duas equações. Tomaremos $(x_1, y_1) = (0{,}5; 0{,}5)$ como primeira aproximação para a solução correspondente ao ponto de intersecção no primeiro quadrante. Fazendo $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ e $g(x, y) = y - \operatorname{sen} x$, obtemos

$$f_x(x, y) = 2x, \; f_y(x, y) = 2y, \; g_x(x, y) = -\cos x, \; g_y(x, y) = 1$$

Fazemos agora $x_1 = 0{,}5$ e $y_1 = 0{,}5$ em (1) e resolvemos em relação aos valores (aproximados) Δx e Δy. Tomamos então, como segunda aproximação,

$$(x_2, y_2) = (x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y)$$

28 A pressão P, o volume V e a temperatura T (em °K) estão relacionados pela lei dos gases ideais $PV = kT$, em que k é uma constante. Se $P = 0{,}5$ lb/in.^{2} quando $V = 64$ in.^{3} e $T = 350$ °K, aproxime a variação de P se V e T variam para 70 in.^{3} e 345°K, respectivamente.

29 Suponha que, ao aplicar a fórmula da gravidade específica $s = A/(A - W)$ (ver Exercício 27), sejam cometidos erros percentuais de ± 2% e ± 4% nas medidas de A e W, respectivamente. Expresse o erro percentual máximo no valor calculado de s como função de A e W.

30 Suponha que, ao aplicar a lei dos gases ideais $PV = kT$ (ver Exercício 28), sejam cometidos erros percentuais de ± 0,8% e ± 0,5% nas medidas de T e P, respectivamente. Aproxime o erro percentual máximo no valor calculado de V.

31 A resistência elétrica R de um fio é diretamente proporcional ao seu comprimento e inversamente proporcional ao quadrado do seu diâmetro. Se o comprimento é medido com um erro possível de ± 1% e o diâmetro é medido com um erro possível de ± 3%, qual o erro percentual máximo no valor calculado de R?

32 O fluxo sangüíneo através de uma arteríola é dado por $F = \pi PR^4/(8vl)$, em que l é o comprimento da arteríola, R é o raio, P é a diferença de pressão entre as duas extremidades, e v é a viscosidade do sangue (ver Seção 6.8). Suponha que v e l sejam constantes. Por meio de diferenciais, aproxime a variação percentual no fluxo sangüíneo se o raio decresce de 2% e a pressão aumenta de 3%.

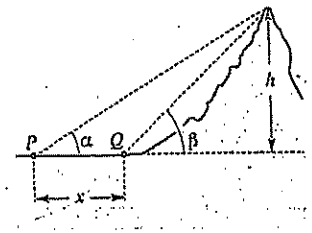
33 A temperatura T no ponto $P(x, y, z)$ em um sistema coordenado xyz é dada por $T = 8(2x^2 + 4y^2 + 9z^2)^{1/2}$. Por meio de diferenciais, aproxime a diferença de temperatura entre os pontos (6, 3, 2) e (6,1; 3,3; 1,98).

34 Calcule a variação da área de um triângulo isósceles se cada um dos dois lados iguais aumenta de 100 para 101 e o ângulo entre eles diminui de 120° para 119°.

35 Se o topo de uma montanha é visto de um ponto P (ver figura), o ângulo de elevação é α. De um ponto Q, x unidades de distância mais próximo da montanha, o ângulo de elevação é β. Pela trigonometria, a altura h da montanha é dada por

$$h = \frac{x}{\cot \alpha - \cot \beta}$$

Um observador mede α e β com uma precisão de 30'' (aprox. 0,000145 rd). Suponhamos $\alpha = 15°$, $\beta = 20°$ e $x = 600$ metros. Estime, por meio de diferenciais, a precisão da medida do comprimento, de modo que o erro máximo no valor calculado de h não supere 3 metros.



36 Se um remédio é ingerido por via oral, o tempo T durante o qual a maior quantidade do remédio permanece na corrente sangüínea pode ser calculado com auxílio da meia-vida x do remédio no estômago e a meia-vida y do remédio na corrente sangüínea. Para muitos remédios comuns (como a penicilina), T é dado por

$$T = \frac{xy(\ln x - \ln y)}{(x - y) \ln 2}$$

Para certo remédio, $x = 30$ min e $y = 1$ h. Se o erro máximo na estimativa de cada meia-vida é ± 10%, ache o erro máximo no valor calculado de T.

37 Suponha que o cilindro descrito no Exemplo 4 tenha tampa e base fechadas. Por meio de diferenciais, aproxime o erro máximo no cálculo da área da superfície total.

38 Por meio de diferenciais, aproxime a variação na área da superfície da caixa descrita no Exemplo 6. Qual a variação exata?

Exercs. 39-40: Prove que f é diferenciável em todo seu domínio.

39 $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

40 $f(x, y, z) = \dfrac{x + y + z}{x^2 + y^2 + z^2}$

41 Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{Se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{Se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) Prove que $f_x(0, 0)$ e $f_y(0, 0)$ existem. (*Sugestão:* Use a Definição (16.8).)

(b) Prove que f não é contínua em (0, 0).

(c) Prove que f não é diferenciável em (0, 0).

42 Seja

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{xyz}{x^3 + y^3 + z^3} & \text{Se } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{Se } (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

(a) Prove que f_x, f_y e f_z existem em (0, 0, 0).

(b) Prove que f não é diferenciável em (0, 0, 0).

Exercs. 43-44: Ref. Exemplo 7. Use o método de Newton para obter uma aproximação da solução do sistema de equações, com quatro casas decimais, utilizando a primeira aproximação dada.

43 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \\ \dfrac{(x-1)^2}{10} + \dfrac{(y+1)^2}{5} = 1 \end{cases} \quad (x_1, y_1) = (2, 1)$

44 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1 \\ \dfrac{(x-1)^2}{2} - \dfrac{(y-1)^2}{3} = 1 \end{cases} \quad (x_1, y_1) = (-1{,}5; -1{,}5)$

45 Estabeleça o método de Newton para um sistema de três equações,

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

em que f, g e h são funções de três variáveis. Expresse a solução em forma matricial análoga a (2) da página 393.

16.5 REGRAS DA CADEIA

Se f e g são funções de *uma* variável tais que

$$w = f(u) \text{ e } u = g(x)$$

então a função composta de f e g é dada por

$$w = f(g(x))$$

Aplicando a regra da cadeia (3.33), podemos achar a derivada de w em relação a x como segue:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dw}{du}\frac{du}{dx}$$

Nesta seção aplicaremos esta fórmula a funções de diversas variáveis.

Sejam f, g e h funções de duas variáveis tais que

$$w = f(u, v), \text{ com } u = g(x, y),\ v = h(x, y)$$

Se, para cada par (x, y) em um subconjunto D de $\mathbb{R}^2$ o par correspondente (u, v) estiver no domínio de f, então

$$w = f(g(x, y), h(x, y))$$

define w como uma função (composta) de x e y com domínio D. Por exemplo, se

$$w = u^2 + u \operatorname{sen} v, \text{ com } u = xe^{2y},\ v = xy$$

então
$$w = x^2e^{4y} + xe^{2y} \operatorname{sen} xy$$

O próximo teorema estabelece fórmulas para expressar $\partial w/\partial x$ e $\partial w/\partial y$ em termos das derivadas parciais primeiras das funções g, h e f. No enunciado do teorema supusemos os domínios escolhidos, de modo que a função composta seja definida em um domínio conveniente D. Cada uma das fórmulas enunciadas no Teorema (16.21) é chamada *regra da cadeia*.

Regras da Cadeia (16.21)

Se $w = f(u, v)$, com $u = g(x, y)$, $v = h(x, y)$, e se f, g e h são diferenciáveis, então

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

DEMONSTRAÇÃO

Dando a x um incremento Δx e mantendo y constante (isto é, $\Delta y = 0$), obtemos os seguintes incrementos de u e v:

(1)
$$\Delta u = g(x + \Delta x, y) - g(x, y)$$
$$\Delta v = h(x + \Delta x, y) - h(x, y)$$

os quais, por seu turno, conduzem ao seguinte incremento de w:

$$\Delta w = f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v)$$

Como f é diferenciável, temos, pela Definição (16.16),

(2)
$$\Delta w = \frac{\partial w}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial w}{\partial v}\Delta v + \in_1 \Delta u + \in_2 \Delta v$$

em que $\in_1$ e $\in_2$ são funções de Δu e Δv que têm limite 0 quando $(\Delta u, \Delta v) \to (0, 0)$. Além disso, podemos supor que tanto $\in_1$ como $\in_2$ sejam iguais a 0 se $(\Delta u, \Delta v) = (0, 0)$, porque, em caso contrário, podem ser substituídas por funções μ_1 e μ_2 que tenham esta propriedade e sejam iguais a $\in_1$ e $\in_2$ nos demais pontos. Em vista disto, as funções $\in_1$ e $\in_2$ em (2) são contínuas em $(0, 0)$. Dividindo ambos os membros da equação (2) por Δx, temos

(3)
$$\frac{\Delta w}{\Delta x} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\Delta v}{\Delta x} + \in_1 \frac{\Delta u}{\Delta x} + \in_2 \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

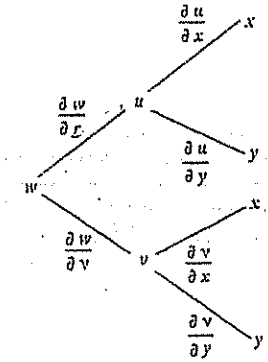


Figura 16.39

Encarando w como função de x e y, então

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} = \frac{\partial w}{\partial x}$$

Outrossim, das equações (1),

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{e} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

Se Δx tende para 0, vemos, de (1), que Δu e Δv também tendem para 0 e, conseqüentemente, $\in_1$ e $\in_2$ também tendem para 0. Tomando, pois, o limite na equação (3) quando $\Delta x \to 0$, obtemos

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

Estabelece-se de maneira análoga a segunda fórmula do enunciado do teorema.

O *diagrama em árvore* da Figura 16.39 é um dispositivo para rememorar as regras da cadeia (16.21). Traçamos primeiro *ramos* (segmentos) de w a u e v, para indicar que w é função dessas duas variáveis. Como u é função de x e y, traçamos em seguida ramos de u a x e y e, da mesma forma, ramos de v a x e y. No diagrama indicamos também as diversas derivadas parciais em jogo para as variáveis dadas.

Para achar $\partial w/\partial x$ por meio do diagrama, consideramos todos os pares de ramos (caminhos) que levam de w a x. Há duas possibilidades:

$$w \xrightarrow{\frac{\partial w}{\partial u}} u \xrightarrow{\frac{\partial u}{\partial x}} x \qquad \text{e} \qquad w \xrightarrow{\frac{\partial w}{\partial v}} v \xrightarrow{\frac{\partial v}{\partial x}} x$$

Em seguida somamos os produtos dos pares correspondentes das derivadas parciais, obtendo

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

Acha-se de maneira análoga a fórmula de $\partial w/\partial y$, utilizando os pares de ramos que levam de w a y.

EXEMPLO 1

Por meio de uma regra de cadeia, ache $\partial w/\partial p$ e $\partial w/\partial q$ se

$$w = r^3 + s^2, \text{ com } r = pq^2,\ s = p^2 \operatorname{sen} q$$

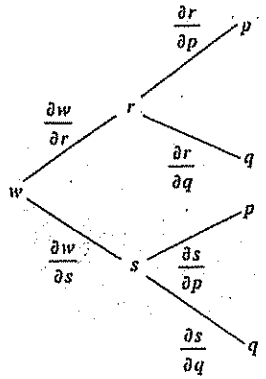


Figura 16.40

SOLUÇÃO

Note que w é uma função (composta) de p e q. Poderíamos também substituir r e s, obtendo

$$w = (pq^2)^3 + (p^2 \operatorname{sen} q)^2$$

e achar em seguida $\partial w/\partial p$ e $\partial w/\partial q$ diretamente; entretanto, nosso objetivo é ilustrar as regras da cadeia. Além disso, tais substituições, em alguns casos, conduzem a expressões muito complicadas. O processo aqui é análogo a processos empregados na programação de computadores para expressar um cálculo complexo como uma sucessão de cálculos mais simples.

Como w é função de r e s, e tanto r como s são funções de p e q, começamos construindo o diagrama em árvore da Figura 16.40. Com base no diagrama, tomamos os produtos de todos os pares de derivadas parciais que levam de w a p, obtendo

$$\frac{\partial w}{\partial p} = \frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial p} + \frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial p}$$

$$= (3r^2)(q^3) + (2s)(2p \operatorname{sen} q)$$

Fazemos agora a substituição

$$r = pq^2 \text{ e } s = p^2 \operatorname{sen} q:$$

$$\frac{\partial w}{\partial p} = 3(pq^2)^2(q^3) + (2p^2 \operatorname{sen} q)(2p \operatorname{sen} q)$$

$$= 3p^2q^6 + 4p^3 \operatorname{sen}^2 q$$

Para achar $\partial w/\partial q$, voltamos ao diagrama da Figura 16.40:

$$\frac{\partial w}{\partial q} = \frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial q} + \frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial q}$$

$$= (3r^2)(2pq) + (2s)(p^2 \cos q)$$

Fazendo a substituição em relação a r e s, obtemos

$$\frac{\partial w}{\partial q} = 3(pq^2)^2(2pq) + 2(p^2 \operatorname{sen} q)(p^2 \cos q)$$

$$= 6p^2q^5 + 2p^4 \operatorname{sen} q \cos q$$

Note que, após aplicar a regra da cadeia do Exemplo 1, substituímos r e s, expressando, portanto, $\partial w/\partial p$ e $\partial w/\partial q$ em termos de p e q. Com isto visamos enfatizar o fato de que w é uma função (composta) das duas variáveis p e q.

UFPB/BIBLIOTECA/PRAI

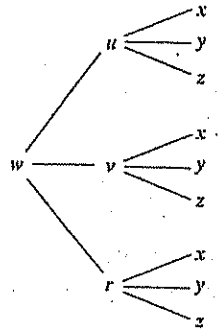


Figura 16.41

Podemos aplicar regras da cadeia a funções compostas de um número arbitrário de variáveis e construir diagramas em árvore para ajudar na formulação dessas regras. Daqui por diante, não mais escreveremos símbolos de derivadas parciais nos ramos. Fica entendido que, se um ramo leva de uma variável w a outra variável r, como na Figura 16.40, a derivada parcial é $\partial w/\partial r$. Todavia, se w é função de apenas *uma* variável r, então escrevemos dw/dr em lugar de $\partial w/\partial r$.

A título de ilustração, seja w função de u, v e r, e u, v e r funções de x, y, z. Esta situação é indicada pelo diagrama da Figura 16.41. Se quisermos achar $\partial w/\partial y$, tomaremos os pares de produtos de derivadas parciais que levam de w a y, e somaremos, obtendo

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}$$

EXEMPLO 2

Use uma regra da cadeia para achar $\partial w/\partial z$ se

$$w = r^2 + sv + t^3, \text{ com } r = x^2 + y^2 + z^2,\ s = xyz,\ v = xe^y,\ t = yz^2$$

SOLUÇÃO

Note que w é função de r, s, v e t, e que cada uma dessas variáveis, por seu turno, é função de x, y e z. A Figura 16.42 exibe o diagrama em árvore adequado. Como queremos achar $\partial w/\partial z$, traçamos todos os ramos que levam de w a z, o que nos dá

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial z}$$

$$= (2r)(2z) + v(xy) + s(0) + (3t^2)(2yz)$$

$$= 4z(x^2 + y^2 + z^2) + xe^y(xy) + 0 + 3(yz^2)^2(2yz)$$

$$= 4z(x^2 + y^2 + z^2) + x^2ye^y + 6y^3z^5$$

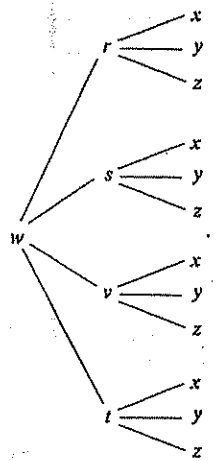


Figura 16.42

Se w é função de diversas variáveis, cada uma das quais é função de apenas *uma* variável t, então w é função dessa variável única t e é lícito considerar dw/dt. Pode-se aplicar aqui uma regra da cadeia, como no próximo exemplo.

EXEMPLO 3

Use uma regra da cadeia para achar dw/dt, se

$$w = x^2 + yz, \text{ com } x = 3t^2 + 1,\ y = 2t - 4,\ z = t^3$$

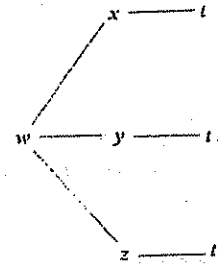


Figura 16.43

SOLUÇÃO

Para aplicar uma regra da cadeia, construímos o diagrama em árvore da Figura 16.43. Os pares de ramos que levam de w a t dão-nos o seguinte, em que escrevemos d/dt para diferenciação em relação à variável *única* t:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$= (2x)(6t) + z(2) + y(3t^2)$$

$$= 2(3t^2 + 1)6t + t^3(2) + (2t - 4)3t^2$$

$$= 44t^3 - 12t^2 + 12t$$

Poderíamos também resolver o problema sem apelar para a regra da cadeia, escrevendo

$$w = (3t^2 + 1)^2 + (2t - 4)t^3$$

e achando então dw/dt pelos métodos de uma variável.

As regras da cadeia são úteis na resolução de problemas de taxas relacionadas, conforme ilustrado no próximo exemplo.

EXEMPLO 4

Um circuito elétrico simples consiste em um resistor R e uma força eletromotriz V. Em certo instante, V é 80 volts e aumenta à taxa de 5 volts/min, enquanto R é 40 ohms e decresce à razão de 2 ohms/min. Use a lei de Ohm, $I = V/R$, e uma regra da cadeia, para achar a taxa à qual a corrente I (em ampères) varia.

SOLUÇÃO

Como I é função de V e R, e ambos V e R são funções do tempo t (em minutos), consideremos o diagrama em árvore da Figura 16.44. Aplicando a regra da cadeia, obtemos

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial V}\frac{dV}{dt} + \frac{\partial I}{\partial R}\frac{dR}{dt}$$

$$= \left(\frac{1}{R}\right)\frac{dV}{dt} + \left(-\frac{V}{R^2}\right)\frac{dR}{dt}$$

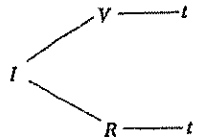


Figura 16.44

Substituindo

$$V = 80, \quad \frac{dV}{dt} = 5, \quad R = 40 \quad \text{e} \quad \frac{DR}{dt} = -2$$

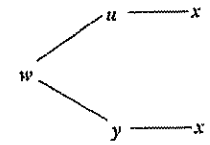


Figura 16.45

obtemos

$$\frac{dI}{dt} = \left(\frac{1}{40}\right)(5) + \left(-\frac{80}{1.600}\right)(-2) = \frac{9}{40} = 0{,}225 \text{ amp/min}$$

As derivadas parciais podem ser usadas para achar derivadas de funções definidas implicitamente. Suponhamos que, como na Seção 3.7, uma equação $F(x, y) = 0$ defina uma função diferenciável f tal que $y = f(x)$, isto é, $F(x, f(x)) = 0$ para todo x no domínio D de f. Introduzamos a seguinte função composta F:

$$w = F(u, y), \text{ em que } u = x \text{ e } y = f(x)$$

Isto conduz ao diagrama em árvore da Figura 16.45. Com uma regra da cadeia, e em vista do fato de que u e y são funções de *uma* variável x, temos:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

Como $w = F(x, f(x)) = 0$ para todo x, segue-se que $dw/dx = 0$. Além disso, como $u = x$ e $y = f(x)$,

$$\frac{du}{dx} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Fazendo a substituição na fórmula precedente de dw/dx, obtemos

$$0 = \frac{\partial w}{\partial u}(1) + \frac{\partial w}{\partial y}f'(x)$$

Se $\partial w/\partial y \neq 0$, então (como $u = x$)

$$f'(x) = -\frac{\partial w/\partial u}{\partial w/\partial y} = -\frac{\partial w/\partial x}{\partial w/\partial y}$$

$$= -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}$$

Podemos resumir o que precede como a seguir:

Teorema (16.22)

Se uma equação $F(x, y) = 0$ define, implicitamente, uma função diferenciável f de uma variável x tal que $y = f(x)$, então

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}$$

10 Ache $\partial s/\partial y$ se $s = tr + ue^v$, em que $t = xy^2z$, $r = x^2yz$, $u = xyz^2$ e $v = xyz$.

Exercs. 11-14: Calcule dw/dt.

11 $w = x^3 - y^3$; $x = \dfrac{1}{t+1}$, $y = \dfrac{t}{t+1}$

12 $w = \ln(u+v)$; $u = e^{-2t}$, $v = t^3 - t^2$

13 $w = r^2 - s \operatorname{tg} v$; $r = \operatorname{sen}^2 t$, $s = \cos t$, $v = 4t$

14 $w = x^2y^3z^4$; $x = 2t + 1$, $y = 3t - 2$, $z = 5t + 4$

Exercs. 15-18: Utilize derivadas parciais para calcular dy/dx se $y = f(x)$ é definida implicitamente pela equação dada.

15 $2x^3 + x^2y + y^3 = 1$ 16 $x^4 + 2x^2y^2 - 3xy^3 + 2x = 0$

17 $6x + \sqrt{xy} = 3y - 4$ 18 $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$

Exercs. 19-22: Calcule $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$ se $z = f(x, y)$ é definida implicitamente pela equação dada.

19 $2xz^3 - 3yz^2 + x^2y^2 + 4z = 0$

20 $xz^2 + 2x^2y - 4y^2z + 3y - 2 = 0$

21 $xe^{xz} - 2ye^{xz} + 3ze^{xy} = 1$

22 $yz^2 + z^2 + \cos xyz = 4$

Exercs. 23-32: Use a regra da cadeia.

23 O raio r e a altura h de um cilindro circular reto aumentam à razão de 0,01 cm/min e 0,02 cm/min, respectivamente.

(a) Ache a taxa de variação do volume quando $r = 4$ cm e $h = 7$ cm.

(b) A que taxa a área da superfície curva está variando nesse instante?

24 Os lados iguais e o ângulo correspondente de um triângulo isósceles estão aumentando à razão de 3 cm/h e 2°/h, respectivamente. Ache a taxa à qual a área do triângulo está aumentando no instante em que o comprimento de cada um dos lados iguais é de 6 metros e o ângulo correspondente é 60°.

25 A pressão P, o volume V e a temperatura T de um gás confinado estão relacionados pela lei dos gases ideais $PV = kT$, em que k é uma constante. Se P e V variam às taxas de dP/dt e dV/dt, respectivamente, ache uma fórmula para dT/dt.

26 Se o raio da base r e a altura h de um cilindro circular reto variam às taxas dr/dt e dh/dt, respectivamente, obtenha uma fórmula para dV/dt, em que V é o volume do cilindro.

27 Certo gás obedece à lei dos gases ideais $PV = 8T$. Suponha que o gás esteja sendo aquecido à taxa de 2°/min e a pressão esteja aumentando à taxa de $\frac{1}{2}$ (kg/cm²)/min. Se, em certo instante, a temperatura é de 200° e a pressão é 10 (kg/cm²), ache a taxa à qual o volume está variando.

28 A areia está vazando por um buraco em um recipiente à razão de 6 cm³/min. Ao vazar, a areia vai formando uma pilha em forma de um cone circular reto cujo raio da base aumenta à razão de $\frac{1}{4}$ cm/min. Se, no instante em que já vazaram 40 cm³, o raio é de 5 centímetros, determine a taxa de aumento da altura da pilha.

29 Na idade de 2 anos, um menino típico tem 86 centímetros de altura, pesa 13 quilos e cresce à razão de 9 cm/ano e 2 kg/ano. Use a fórmula de DuBois e DuBois para a área de uma superfície, $S = 0{,}007184x^{0{,}425}y^{0{,}725}$ para o peso x e a altura y, para estimar a taxa à qual a área da superfície do corpo está crescendo (ver Exercício 49 da Seção 16.1).

30 Quando o tamanho das moléculas e suas forças de atração são levadas em conta, a pressão P, o volume V e a temperatura T de um mol de gás confinado estão relacionados pela *equação de van der Waals*

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = kT$$

em que a, b e k são constantes positivas. Se t é o tempo, estabeleça uma fórmula para dT/dt em termos de dP/dt, dV/dt, P e V.

31 Se n resistores $R_1, R_2, \ldots, R_n$ estão ligados em paralelo, então a resistência total R é dada por

$$\frac{1}{R} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}$$

Prove que, para $k = 1, 2, \ldots, n$,

$$\frac{\partial R}{\partial R_k} = \left(\frac{R}{R_k}\right)^2$$

32 Uma função f de duas variáveis é *homogênea de grau n* se $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ para todo t tal que (tx, ty) esteja no domínio de f. Mostre que, para tais funções, $xf_x(x, y) + yf_y(x, y) = nf(x, y)$. (*Sugestão:* Diferencie $f(tx, ty)$ em relação a t.)

Exercs. 33-36: Ref. Exercício 32. Ache o grau n da função homogênea f e verifique a fórmula

$$xf_x(x, y) + yf_y(x, y) = nf(x, y)$$

33 $f(x, y) = 2x^3 + 3x^2y + y^3$

34 $f(x, y) = \dfrac{x^3y}{x^2 + y^2}$

35 $f(x, y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$

36 $f(x, y) = xye^{y/x}$

37 Se $w = f(x, y)$, em que $x = r\cos\theta$ e $y = r\operatorname{sen}\theta$, mostre que

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2$$

38 Se $w = f(x, y)$, em que $x = e^r\cos\theta$ e $y = e^r\operatorname{sen}\theta$, mostre que

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = e^{-2r}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right)$$

39 Se $w = f(x, y)$, em que $x = r\cos\theta$ e $y = r\operatorname{sen}\theta$, mostre que

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}$$

40 Se $v = f(x - at) + g(x + at)$ e f e g têm derivadas parciais segundas, mostre que v satisfaz a equação da onda

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

(Compare com o Exercício 42 da Seção 16.3.)

41 Se $w = \cos(x + y) + \cos(x - y)$ mostre, sem utilizar fórmulas de adição, que $w_{xx} - w_{yy} = 0$.

42 Se $w = f(x^2 + y^2)$, mostre que $y(\partial w/\partial x) - x(\partial w/\partial y) = 0$. (*Sugestão:* Faça $u = x^2 + y^2$.)

43 Se $w = f(u, v)$, em que $u = g(x, y)$ e $v = k(x, y)$, mostre que

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial u} + \frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

44 Para w, u e v dadas como no Exercício 43, mostre que

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x}$$

45 Prove o seguinte teorema do valor médio para uma função f de duas variáveis x e y: se F tem derivadas parciais primeiras em uma região retangular $R = \{(x, y): a < x < b, c < y < d\}$ e se $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ são pontos de R, então existe um ponto $P(x^*, y^*)$ no segmento AB tal que

$$f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) = f_x(x^*, y^*)(x_2 - x_1) + f_y(x^*, y^*)(y_2 - y_1)$$

46 Use o Exercício 45 para provar o seguinte: Se $f_x(x, y) = 0$ e $f_y(x, y) = 0$ para todo (x, y) em uma região retangular R, então $f(x, y)$ é constante em R.

47 Estenda o Exercício 45 a uma função de três variáveis.

48 Estenda o Exercício 46 a uma função de três variáveis.

49 Suponha que $u = f(x, y)$ e $v = g(x, y)$ verifiquem as equações de Cauchy-Riemann $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$. Se $x = r\cos\theta$ e $y = r\operatorname{sen}\theta$, mostre que

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad e \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

50 Se $u = y/(x^2 + y^2)$ e $v = x/(x^2 + y^2)$, verifique diretamente as fórmulas para $\partial u/\partial r$ e $\partial v/\partial r$ no Exercício 49, substituindo x por $r\cos\theta$ e y por $r\operatorname{sen}\theta$, e diferenciando.

EXEMPLO 5

Ache dy/dx se $y = f(x)$ é definida implicitamente por

$$y^4 + 3y - 4x^3 - 5x - 1 = 0$$

SOLUÇÃO

Se $F(x, y)$ é a expressão do membro esquerdo da equação, então, pelo Teorema (16.22),

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{-12x^2 - 5}{4y^3 + 3} = \frac{12x^2 + 5}{4y^3 + 3}$$

Compare esta solução com a do Exemplo 2 na Seção 3.7, obtida por intermédio de métodos de uma variável.

Dada a equação

$$x^2 - 4y^3 + 2z - 7 = 0$$

podemos resolvê-la em relação a z, obtendo

$$z = \tfrac{1}{2}(-x^2 + 4y^3 + 7)$$

que é da forma

$$z = f(x, y)$$

Por analogia com o caso de uma variável, dizemos que a função f de duas variáveis x e y é definida *implicitamente* pela equação dada. O próximo teorema nos dá fórmulas para achar f_x e f_y, ou, equivalentemente, $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$, sem resolver efetivamente a equação em relação a z.

Teorema (16.23) Se uma equação $F(x, y, z) = 0$ define uma função implícita diferenciável f de duas variáveis x e y tal que $z = f(x, y)$, para todo (x, y) no domínio de f, então

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}$$

DEMONSTRAÇÃO

A afirmação $F(x, y, z) = 0$ *define uma função f tal que* $z = f(x, y)$ significa que $F(x, y, f(x, y)) = 0$ para todo (x, y) no domínio de f. Consideremos a função composta F de x e y definida como segue:

$$w = F(u, v, z), \text{ em que } u = x,\ v = y,\ z = f(x, y)$$

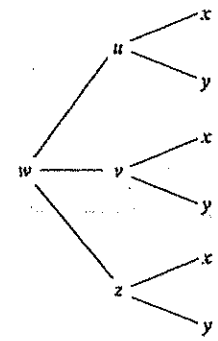


Figura 16.46

Note que u e v são funções de x e y, pois podemos escrever $u = x + (0 \cdot y)$ e $v = y + (0 \cdot x)$. Referindo-nos ao diagrama da Figura 16.46 e considerando os ramos que levam de w a x, obtemos

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$$

Como $w = F(x, y, f(x, y)) = 0$ para todo x e todo y, segue-se que $\partial w/\partial x = 0$. Além disso, como $\partial u/\partial x = 1$ e $\partial v/\partial x = 0$, a fórmula da regra da cadeia para $\partial w/\partial x$ pode escrever-se

$$0 = \frac{\partial w}{\partial x}(1) + \frac{\partial w}{\partial y}(0) + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$$

e se $\partial w/\partial z \neq 0$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial w/\partial x}{\partial w/\partial z} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}$$

Obtém-se de maneira análoga a fórmula para $\partial z/\partial y$.

EXEMPLO 6

Ache $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$ se $z = f(x, y)$ é definida implicitamente por

$$x^2z^2 + xy^2 - z^3 + 4yz - 5 = 0$$

SOLUÇÃO

Denotando por $F(x, y, z)$ a expressão à esquerda da equação dada, então, pelo Teorema (16.23),

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xz^2 + y^2}{2x^2z - 3z^2 + 4y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2xy + 4z}{2x^2z - 3z^2 + 4y}$$

EXERCÍCIOS 16.5

Use a regra da cadeia nos Exercícios 1-14.

Exercs. 1-2: Calcule $\partial w/\partial x$ e $\partial w/\partial y$.

1 $w = u \operatorname{sen} v;\ u = x^2 + y^2,\ v = xy$

2 $w = uv + v^2;\ u = x \operatorname{sen} y,\ v = y \operatorname{sen} x$

Exercs. 3-4: Calcule $\partial w/\partial r$ e $\partial w/\partial s$.

3 $w = u^2 + 2uv;\ u = r \ln s,\ v = 2r + s$

4 $w = e^{uv};\ t = r + s,\ v = rs$

Exercs. 5-6: Calcule $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$.

5 $z = r^3 + s + v^2;\ r = xe^y,\ s = ye^x,\ v = x^2y$

6 $z = pq + qw;\ p = 2x - y,\ q = x - 2y,\ w = -2x + 2y$

Exercs. 7-8: Calcule $\partial r/\partial u$, $\partial r/\partial v$ e $\partial r/\partial t$.

7 $r = x \ln y;\ x = 3u + vt,\ y = uvt$

8 $r = w^2 \cos z;\ w = u^2vt,\ z = ut^2$

9 Se $p = u^2 + 3v^2 - 4w^2$, em que $u = x - 3y + 2r - s$, $v = 2x + y - r + 2s$ e $w = -x + 2y + r + s$, ache $\partial p/\partial r$.

16.6 DERIVADAS DIRECIONAIS

Na Seção 16.3 abordamos o fato de que, se $f(x, y)$ é a temperatura de uma chapa de metal plana no ponto $P(x, y)$ de um plano-xy, então as derivadas parciais $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ dão as taxas instantâneas de variação da temperatura em relação à distância nas direções horizontal e vertical, respectivamente (ver Figuras 16.28 e 16.29). Nesta seção generalizaremos este fato para a taxa de variação de $f(x, y)$ em *qualquer* direção.

Seja $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ um vetor unitário. Representando $\mathbf{u}$ por um vetor com ponto inicial $P(x, y)$, conforme Figura 16.47(i), então o ponto terminal tem coordenadas $(x + u_1, y + u_2)$. Queremos definir a taxa de variação de $f(x, y)$ em relação à distância na direção determinada por $\mathbf{u}$.

Consideremos uma reta l por P paralela a $\mathbf{u}$, e seja Q um ponto arbitrário de l, conforme Figura 16.47(ii). O vetor $\overrightarrow{PQ}$ corresponde a um múltiplo escalar $s\mathbf{u} = (su_1)\mathbf{i} + (su_2)\mathbf{j}$ para algum s. Logo, as coordenadas de Q são $(x + su_1, y + su_2)$. Como $\mathbf{u}$ é um vetor unitário,

$$\|\overrightarrow{PQ}\| = \|s\mathbf{u}\| = |s|\,\|\mathbf{u}\| = |s|$$

Assim, s é a distância (com sinal) de P, medida ao longo de l. Se $s > 0$, então $s\mathbf{u}$ tem a mesma direção que $\mathbf{u}$. Se $s < 0$, então $s\mathbf{u}$ tem a direção oposta.

Se a posição de um ponto varia de P para Q, então o incremento Δw de $w = f(x, y)$ é

$$\Delta w = f(x + su_1, y + su_2) - f(x, y)$$

A *taxa média de variação de* $f(x, y)$ é

$$\frac{\Delta w}{s} = \frac{f(x + su_1, y + su_2) - f(x, y)}{s}$$

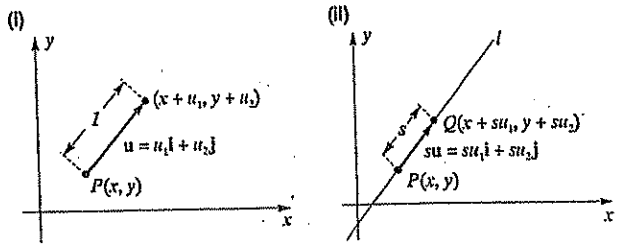


Figura 16.47

A título de ilustração, seja $w = f(x, y)$ a temperatura em (x, y). Se a temperatura em P é de 50° e a temperatura em Q é de 51,5°, então $\Delta w = 1{,}5°$. Se $\|\overrightarrow{PQ}\| = 3$ cm, a taxa média de variação da temperatura, quando um ponto se move de P até Q, é

$$\frac{\Delta w}{s} = 0{,}5° \text{ por cm}$$

Tal como no estudo das derivadas, para achar a taxa *instantânea* de variação de $f(x, y)$ em P na direção definida por $\mathbf{u}$, consideramos o limite da taxa média de variação $\Delta w/s$ quando $s \to 0$. Isto motiva a seguinte definição.

Definição (16.24) Sejam $w = f(x, y)$ e $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ um vetor unitário. A **derivada direcional de f em $P(x, y)$ na direção de $\mathbf{u}$**, denotada por $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$, é

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = \lim_{s \to 0} \frac{f(x + su_1, y + su_2) - f(x, y)}{s}$$

Se $\mathbf{a}$ é um vetor arbitrário de mesma direção que $\mathbf{u}$, chamaremos também $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$ a **derivada direcional de f na direção de $\mathbf{a}$**.

O teorema que segue dá uma fórmula para achar derivadas direcionais.

Teorema (16.25) Se f é uma função diferenciável de duas variáveis e $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ é um vetor unitário, então

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = f_x(x, y)u_1 + f_y(x, y)u_2$$

DEMONSTRAÇÃO

Consideremos x, y, u_1 e u_2 como fixos (embora arbitrários), e seja g a função de *uma* variável definida por

$$g(s) = f(x + su_1, y + su_2)$$

Pelas Definições (3.6) e (16.24),

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{s \to 0} \frac{g(s) - g(0)}{s - 0} \\ &= \lim_{s \to 0} \frac{f(x + su_1, y + su_2) - f(x, y)}{s} \\ &= D_{\mathbf{u}} f(x, y) \end{aligned}$$

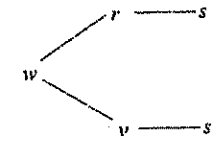


Figura 16.48

Consideramos em seguida g como uma função composta, com

$$w = g(s) = f(r, v) \text{ e } r = x + su_1, v = y + su_2$$

Conforme indicado pelo diagrama em árvore da Figura 16.48, w é uma função de r e v, e r e v são funções de *uma* variável. Aplicando a regra da cadeia, obtemos

$$\frac{dw}{ds} = \frac{\partial w}{\partial r}\frac{dr}{ds} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{dv}{ds}$$

Com as definições de $w = g(s)$, r e v, a última expressão pode ser escrita

$$g'(s) = f_r(r, v)u_1 + f_v(r, v)u_2$$

Fazendo $s = 0$, então $r = x$, $v = y$ e, pela primeira parte da demonstração, $g'(0) = D_u f(x, y)$. Logo

$$D_u f(x, y) = f_x(x, y)u_1 + f_y(x, y)u_2$$

As derivadas parciais primeiras de f são casos especiais da derivada direcional $D_u f(x, y)$. Assim, fazendo $\mathbf{u} = \mathbf{i}$, então $u_1 = 1$, $u_2 = 0$, e a fórmula em (16.25) se escreve

$$D_1 f(x, y) = f_x(x, y)$$

Se $\mathbf{u} = \mathbf{j}$, então $u_1 = 0$, $u_2 = 1$, e obtemos

$$D_j f(x, y) = f_y(x, y)$$

EXEMPLO 1

Seja $f(x, y) = x^3y^2$.

(a) Ache a derivada direcional de f no ponto $P(-1, 2)$ na direção do vetor $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$.

(b) Discuta o significado da parte (a) se $f(x, y)$ é a temperatura em (x, y).

SOLUÇÃO

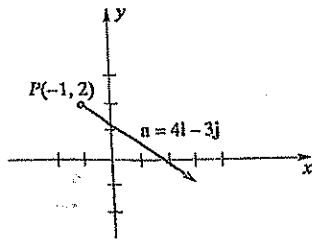


Figura 16.49

(a) O vetor $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ com ponto inicial $P(-1, 2)$ está representado na Figura 16.49. Queremos determinar $D_u f(-1, 2)$ para o vetor *unitário* $\mathbf{u}$ que tem a direção de $\mathbf{a}$. Pelo Teorema (14.12),

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|}\mathbf{a} = \frac{1}{5}(4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}) = \frac{4}{5}\mathbf{i} - \frac{3}{5}\mathbf{j}$$

Como

$$f_x(x, y) = 3x^2y^2 \text{ e } f_y(x, y) = 2x^3y$$

segue-se de (16.25) que

$$D_u f(x, y) = 3x^2y^2\left(\tfrac{4}{5}\right) + 2x^3y\left(-\tfrac{3}{5}\right)$$

Logo, em $P(-1, 2)$,

$$Du\, f(-1, 2) = 3(-1)^2(2)^2\left(\tfrac{4}{5}\right) + 2(-1)^3(2)\left(-\tfrac{3}{5}\right) = 12$$

(b) Se $f(x, y)$ é a temperatura (em graus) em (x, y), então $D_u f(-1, 2) = 12$ nos diz que, se um ponto se move na direção de $\mathbf{u}$, a temperatura em P aumenta à razão de 12° por unidade de variação da distância. É interessante comparar este valor com $f_x(-1, 2) = 12$ e $f_y(-1, 2) = -4$, que são as taxas de variação nas direções horizontal e vertical, respectivamente.

Por meio do Teorema (16.25), podemos expressar a derivada direcional como um produto escalar de dois vetores, como segue:

$$D_u f(x, y) = [f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j})] \cdot [u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}]$$

O vetor dentro do primeiro par de colchetes, cujos componentes são as derivadas parciais primeiras de $f(x, y)$, tem grande importância. Denota-se por $\nabla f(x, y)$ (que se lê *del* $f(x, y)$), e tem um nome especial.

Definição (16.26) Seja f uma função de duas variáveis. O **gradiente** de f (ou de $f(x, y)$) é a função vetorial dada por

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}$$

O gradiente $\nabla f(x, y)$ denota-se em geral por $\text{grad}\, f(x, y)$. Do que acabamos de ver, temos o seguinte:

Derivada direcional (forma de gradiente) (16.27)

$$D_u f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u}$$

Assim, *para achar a derivada direcional de f na direção do vetor unitário* $\mathbf{u}$, *formamos o produto escalar do gradiente de f e* $\mathbf{u}$. Daqui por diante, usaremos esta fórmula, em lugar do Teorema (16.25), para achar $D_u f(x, y)$.

O símbolo ∇ (chamado **del**), é um operador diferencial vetorial que se define como

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}$$

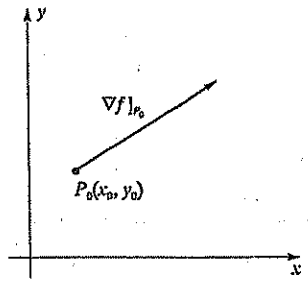


Figura 16.50

Suas propriedades são análogas às do operador d/dx (ver Exercícios 35-40). Operando sobre $f(x, y)$, produz o vetor gradiente $\nabla f(x, y)$.

Se $P_0(x_0, y_0)$ é um ponto específico do plano-xy, costuma-se denotar o vetor gradiente em P_0 por $\nabla f]_{P_0}$. Assim,

$$\nabla f]_{P_0} = \nabla f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0)\mathbf{j}$$

Quando representamos o vetor $\nabla f]_{P_0}$ graficamente, tomamos sempre o ponto inicial em P_0, conforme Figura 16.50.

EXEMPLO 2

Seja $f(x, y) = x^2 - 4xy$.

(a) Ache o gradiente de f no ponto $P(1, 2)$ e esboce o vetor $\nabla f]_P$.

(b) Use o gradiente para achar a derivada direcional de f em $P(1, 2)$ na direção de $P(1, 2)$ para $Q(2, 5)$.

SOLUÇÃO

(a) Pela Definição (16.26),

$$\nabla f(x, y) = (2x - 4y)\mathbf{i} - 4x\mathbf{j}$$

Em $P(1, 2)$,

$$\nabla f]_P = \nabla f(1, 2) = (2 - 8)\mathbf{i} - 4\mathbf{j} = -6\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$$

Este vetor está representado na Figura 16.51, com ponto inicial $P(1, 2)$.

(b) Fazendo $\mathbf{a} = \overrightarrow{PQ}$, então

$$\mathbf{a} = \langle 2 - 1, 5 - 2\rangle = \langle 1, 3\rangle = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$$

(ver Figura 16.51). Um vetor unitário com a direção de $\overrightarrow{PQ}$ é

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|}\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{10}}(\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$$

Aplicando (16.27), temos

$$D_{\mathbf{u}} f(1, 2) = \nabla f(1, 2) \cdot \mathbf{u}$$

$$= (-6\mathbf{i} - 4\mathbf{j}) \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}(\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}}(-6 - 12) = -\frac{18}{\sqrt{10}} \approx -5{,}7$$

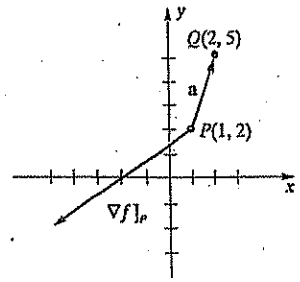


Figura 16.51

Seja $P(x, y)$ um ponto fixo, e consideremos a derivada direcional $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$ quando $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2\rangle$ varia. Para um vetor unitário $\mathbf{u}$ dado, a derivada direcional pode ser positiva (isto é, $f(x, y)$ pode aumentar), ou negativa ($f(x, y)$ pode diminuir) ou 0. Em muitas aplicações, é importante achar a direção em que $f(x, y)$ cresce mais rapidamente, bem como o máximo da taxa de variação. O próximo teorema nos dá esta informação.

Teorema do gradiente (16.28)

Seja f uma função de duas variáveis, diferenciável no ponto $P(x, y)$.

(i) O máximo de $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$ em $P(x, y)$ é $\|\nabla f(x, y)\|$.

(ii) O máximo da taxa de crescimento de $f(x, y)$ em $P(x, y)$ ocorre na direção de $\nabla f(x, y)$.

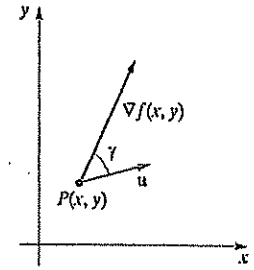


Figura 16.52

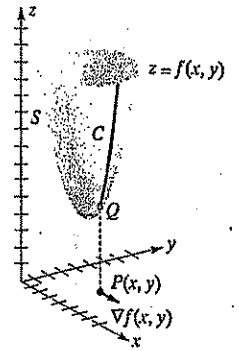


Figura 16.53

DEMONSTRAÇÃO

(i) Consideraremos o ponto $P(x, y)$ e o vetor $\nabla f(x, y)$ como fixos (mas arbitrários) e o vetor $\mathbf{u}$ como variável (ver Figura 16.52). Seja γ o ângulo entre $\mathbf{u}$ e $\nabla f(x, y)$. Por (16.27) e pelo Teorema (14.22),

$$D\mathbf{u}\, f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u}$$

$$= \|\nabla f(x, y)\|\, \|\mathbf{u}\| \cos\gamma$$

$$= \|\nabla f(x, y)\| \cos\gamma$$

Como $-1 \le \cos\gamma \le 1$, o máximo de $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$ ocorre se $\cos\gamma = 1$; neste caso, $D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \|\nabla f(x, y)\|$.

(ii) A derivada direcional $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$ é a taxa de variação de $f(x, y)$ em relação à distância em $P(x, y)$ na direção definida por $\mathbf{u}$. Tal como na parte (i), esta taxa de variação atinge seu máximo se $\cos\gamma = 1$ – isto é, se $\gamma = 0$. Entretanto, se $\gamma = 0$, então $\mathbf{u}$ tem a mesma direção que $\nabla f(x, y)$.

O teorema do gradiente admite uma interpretação geométrica interessante e útil. Denotemos por S o gráfico de $z = f(x, y)$ em um sistema coordenado xyz. Como se vê na Figura 16.53, o ponto $P(x, y)$ e o vetor $\nabla f(x, y)$ estão no plano-xy, e $Q(x, y, f(x, y))$ é o ponto de S correspondente a P. Se um ponto (variável) no plano-xy se move passando por P na direção de $\nabla f(x, y)$, então, por (16.28)(ii), o ponto correspondente em S descreve uma curva C de *aclive máximo* no ponto Q do gráfico de f. Na Seção 16.7 abordaremos outro aspecto geométrico de $\nabla f(x, y)$ que envolve as curvas de nível de f.

Referindo-nos à demonstração do Teorema do gradiente (16.28), vemos que o *mínimo* de $D_u f(x, y)$ ocorre se $\cos \gamma = -1$. Nesse caso, $\gamma = \pi$ (ou $\gamma = 180°$) e $D_u f(x, y) = -\|\nabla f(x, y)\|$, que é a taxa máxima de *decréscimo* de $f(x, y)$. Isto nos dá o seguinte corolário do Teorema (16.28).

Corolário (16.29)

Seja f uma função de duas variáveis, diferenciável no ponto $P(x, y)$.

(i) O mínimo de $D_u f(x, y)$ em $P(x, y)$ é $-\|\nabla f(x, y)\|$.

(ii) O mínimo da taxa de acréscimo (ou o máximo da taxa de decréscimo) de $f(x, y)$ em $P(x, y)$ ocorre na direção de $-\nabla f(x, y)$.

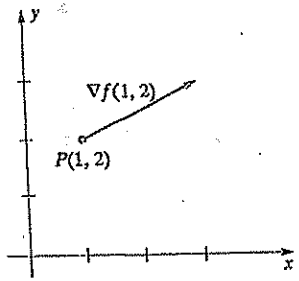


Figura 16.54

EXEMPLO 3

Seja $f(x, y) = 2 + x^2 + \frac{1}{4}y^2$.

(a) Ache a direção segundo a qual $f(x, y)$ cresce mais rapidamente no ponto $P(1, 2)$, e determine a taxa máxima de crescimento de f em P.

(b) Interprete (a) utilizando o gráfico de f.

SOLUÇÃO

(a) O gradiente de f é

$$\nabla f(x, y) = 2x\mathbf{i} + \tfrac{1}{2}y\mathbf{j}$$

Em $P(1, 2)$,

$$\nabla f(1, 2) = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$$

Este vetor, esboçado na Figura 16.54, define a direção segundo a qual $f(x, y)$ aumenta mais rapidamente em $P(1, 2)$.

A taxa máxima de aumento de f em $P(1, 2)$ é

$$\|\nabla f(1, 2)\| = \|-2\mathbf{i} - \mathbf{j}\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \approx 2{,}2$$

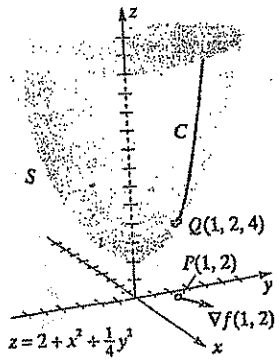


Figura 16.55

(b) A Figura 16.55 exibe o gráfico S de f – um paraboloide elíptico. O ponto $P(1, 2)$ e o vetor $\nabla f(1, 2)$ aparecem no plano-xy. O ponto de S correspondente a P é $Q(1, 2, 4)$. Se um ponto (variável) no plano-xy se move passando por P na direção de $\nabla f(1, 2)$, o ponto correspondente do gráfico descreve uma curva C de máximo aclive no paraboloide.

Define-se a derivada direcional de uma função f de três variáveis da mesma forma que na Definição (16.24). Isto é, se $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ é um vetor unitário, temos o seguinte:

Derivada direcional de $f(x, y, z)$ (16.30)

$$D_u f(x, y, z) = \lim_{s \to 0} \frac{f(x + su_1, y + su_2, z + su_3) - f(x, y, z)}{s}$$

Tal como no caso de duas variáveis, $D_u f(x, y, z)$ é a taxa de variação de f em relação à distância em $P(x, y, z)$ na direção de $\mathbf{u}$. O **gradiente** de f (ou de $f(x, y, z)$, denotado por $\nabla f(x, y, z)$ ou **grad** $f(x, y, z)$, se define como segue.

Gradiente de $f(x, y, z)$ (16.31)

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\mathbf{k}$$

Tal como no caso bidimensional, denota-se por $\nabla f\,]_{P_0}$ o gradiente em um ponto específico $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

O próximo resultado constitui a versão tridimensional do Teorema (16.25).

Teorema (16.32)

Se f é uma função diferenciável de três variáveis e $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ é um vetor unitário, então

$$D_u f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \cdot \mathbf{u}$$
$$= f_x(x, y, z)\,u_1 + f_y(x, y, z)\,u_2 + f_z(x, y, z)\,u_3$$

Tal como no Teorema (16.28), de todas as derivadas direcionais possíveis $D_u f(x, y, z)$ no ponto $P(x, y, z)$, a derivada na direção de $\nabla f(x, y, z)$ é a que tem maior valor; esse valor máximo é $\|\nabla f(x, y, z)\|$.

EXEMPLO 4

Suponhamos que um sistema coordenado xyz esteja localizado no espaço, de modo que a temperatura T no ponto (x, y, z) seja dada pela fórmula $T = 100/(x^2 + y^2 + z^2)$.

(a) Ache a taxa de variação de T em relação à distância no ponto $P(1, 3, -2)$ e na direção do vetor $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

(b) Em que direção, a partir de P, T aumenta mais rapidamente? Qual a taxa máxima de variação de T em P?

SOLUÇÃO

(a) Pela Definição (16.31), o gradiente de $T = 100/(x^2 + y^2 + z^2)$ é

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\mathbf{k}$$

Como

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{-200x}{(x^2 + y^2 + z^2)^2},$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{-200y}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{-200z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$$

obtemos

$$\nabla T = \frac{-200}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

Logo

$$\nabla T\,]_P = \frac{-200}{196}(\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k})$$

Um vetor unitário u de mesma direção de $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ é

$$\mathbf{u} \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

Pelo Teorema (16.32), a taxa de variação de T em P na direção de a é

$$D_{\mathbf{u}} T\,]_P = \nabla T\,]_P \cdot \mathbf{u} = \frac{-200}{196}\frac{(1 - 3 - 2)}{\sqrt{3}} = \frac{200}{49\sqrt{3}} \approx 2{,}4$$

Se, por exemplo, T é medido em graus e a distância em centímetros, então T cresce à razão de 2,4 graus por centímetro em P na direção de a.

(b) O máximo da taxa de variação de T em P ocorre na direção do gradiente – isto é, na direção do vetor $-\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. O máximo da taxa de variação é igual ao módulo do gradiente, isto é,

$$\|\nabla T]_P\| = \frac{200}{196}\sqrt{1 + 9 + 4} \approx 3{,}8$$

Nesta seção utilizamos o gradiente de uma função f especialmente para achar derivadas direcionais. Mais adiante abordaremos outros aspectos importantes. Concluiremos esta seção com uma aplicação à termodinâmica.

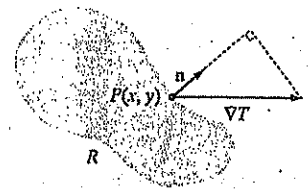


Figura 16.56

Seja $T = f(x, y)$ a temperatura de estado estacionário no ponto (x, y) de uma região bidimensional R. (*Estado estacionário* significa que T é independente do tempo.) A *lei da condução do calor de Fourier* afirma que a taxa q à qual o calor flui através de um ponto $P(x, y)$ na fronteira de R é diretamente proporcional à componente do gradiente da temperatura ∇T ao longo do unitário da normal (exterior) n à fronteira em P (ver Figura 16.56). Assim,

$$q = k\,\text{comp}_{\mathbf{n}}\,\nabla T = k\nabla T \cdot \mathbf{n}$$

para algum escalar k (ver Definição (14.25)). Se $\nabla T \cdot \mathbf{n} = 0$, o componente segundo a direção da normal será 0 (∇T e n são ortogonais), e, assim, nenhum calor escapará da região em P. Diz-se que a fronteira está *isolada* no ponto P. A região está *isolada ao longo de parte da fronteira* se está isolada em todo ponto daquela parte. Valem afirmações análogas para regiões tridimensionais.

EXEMPLO 5

Seja R a região retangular do plano-xy exibida na Figura 16.57, e seja $T = f(x, y)$ a temperatura de estado estacionário em (x, y). Estabeleça condições sobre T que tornem isolada:

(a) a margem BC (b) a margem AB

SOLUÇÃO

(a) Podemos usar o vetor i para representar o unitário n da normal à margem BC. Assim, BC estará isolada se e somente se, em cada ponto P de BC,

$$\nabla T \cdot \mathbf{i} = 0 \quad \text{ou} \quad \left(\frac{\partial T}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\mathbf{j}\right) \cdot \mathbf{i} = 0$$

Isto significa que a taxa de variação de T na direção horizontal é 0.

(b) j é uma normal à margem AB. Neste caso, AB estará isolada se e somente se

$$\nabla T \cdot \mathbf{j} = 0 \text{ ou, equivalentemente, } \frac{\partial T}{\partial y} = 0$$

ou seja, a taxa de variação de T na direção vertical é 0.

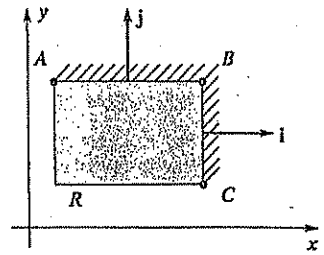


Figura 16.57

EXERCÍCIOS 16.6

Exercs. 1-6: Ache o gradiente de f em P.

1 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$; $P(-4,3)$

2 $f(x, y) = 7y - 5x$; $P(2, 6)$

3 $f(x, y) = e^{3x} \operatorname{tg} y$; $P(0, \pi/4)$

4 $f(x, y) = x \ln (x - y)$; $P(5, 4)$

5 $f(x, y, z) = yz^3 - 2x^2$; $P(2, -3, 1)$

6 $f(x, y, z) = xy^2e^z$; $P(2, -1, 0)$

Exercs. 7-20: Ache a derivada direcional de f em P na direção indicada.

7 $f(x, y) = x^2 - 5xy + 3y^2$;

$P(3, -1)$, $\mathbf{u} = (\sqrt{2}/2)(\mathbf{i} + \mathbf{j})$

8 $f(x, y) = x^3 - 3x^2y - y^3$;

$P(1, -2)$, $\mathbf{u} = \frac{1}{2}(-\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j})$

9 $f(x, y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$;

$P(4, -4)$, $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

10 $f(x, y) = x^2 \ln y$;

$P(5, 1)$ $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

11 $f(x, y) = \sqrt{9x^2 - 4y^2 - 1}$;

$P(3, -2)$, $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 5\mathbf{j}$

12 $f(x, y) = \dfrac{x - y}{x + y}$;

$P(2, -1)$, $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

13 $f(x, y) = x \cos^2 y$;

$P(2, \pi/4)$, $\mathbf{a} = \langle 5, 1 \rangle$

14 $f(x, y) = xe^{3y}$;

$P(4, 0)$, $\mathbf{a} = \langle -1, 3 \rangle$

15 $f(x, y, z) = xy^2z^2$;

$P(2, -1, 4)$, $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

16 $f(x, y, z) = x^2 + 3yz + 4xy$;

$P(1, 0, -5)$, $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$

17 $f(x, y, z) = z^2e^{xy}$;

$P(-1, 2, 3)$, $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$

18 $f(x, y, z) = \sqrt{xy}$ sen z;

$P(4, 9, \pi/4)$, $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

19 $f(x, y, z) = (x + y)(y + z)$;

$P(5, 7, 1)$, $\mathbf{a} = \langle -3, 0, 1 \rangle$

20 $f(x, y, z) = z^2 \operatorname{arctg}(x + y)$;

$P(0, 0, 4)$, $\mathbf{a} = \langle 6, 0, 1 \rangle$

Exercs. 21-24: (a) Ache a derivada direcional de f na direção de P para Q. (b) Ache um vetor unitário na direção em que f cresce mais rapidamente em P e determine a taxa de variação de f naquela direção. (c) Ache um vetor unitário na direção em que f decresce mais rapidamente em P e determine a taxa de variação de f naquela direção.

21 $f(x, y) = x^2e^{-2y}$; $P(2, 0)$, $Q(-3, 1)$

22 $f(x, y) = \operatorname{sen}(2x - y)$; $P(-\pi/3, \pi/6)$, $Q(0, 0)$

23 $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; $P(-2, 3, 1)$, $Q(0, -5, 4)$

24 $f(x, y, z) = \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{z}$; $P(0, -1, 2)$, $Q(3, 1, -4)$

25 Uma chapa de metal está situada em um plano-xy, de modo que a temperatura T em (x, y) seja inversamente proporcional à distância da origem, e a temperatura em $P(3, 4)$ é 100° F.

(a) Ache a taxa de variação de T em P na direção de $\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

(b) Em que direção T aumenta mais rapidamente em P?

(c) Em que direção T decresce mais rapidamente em P?

(d) Em que direção a taxa de variação é 0?

26 A superfície de um lago é representada por uma região D no plano-xy, de modo que a profundidade (em metros) sob o ponto (x, y) é $f(x, y) = 300 - 2x^2 - 3y^2$.

(a) Em que direção um bote em $P(4, 9)$ deve navegar para que a profundidade da água decresça mais rapidamente?

(b) Em que direção a profundidade permanece a mesma?

27 O potencial elétrico V em (x, y, z) é

$$V = x^2 + 4y^2 + 9z^2$$

(a) Ache a taxa de variação de $V = P(2, -1, 3)$ na direção de P para a origem.

(b) Ache a direção que produz a taxa máxima de variação de V em P.

(c) Qual é a taxa máxima de variação em P?

28 A temperatura T em (x, y, z) é dada por

$$T = 4x^2 - y^2 + 16z^2$$

(a) Ache a taxa de variação de T em $P(4, -2, 1)$ na direção de $2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.

(b) Em que direção T aumenta mais rapidamente em P?

(c) Qual é esta taxa máxima de variação?

(d) Em que direção T decresce mais rapidamente em P?

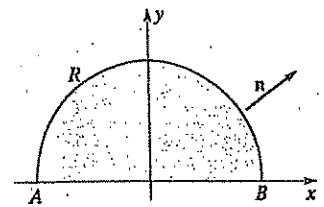
(e) Qual é esta taxa de variação?

Exercs. 29-30: Com referência à discussão que precede o Exemplo 5, em cada caso T é a temperatura em (x, y).

29 A figura exibe uma região semicircular R.

(a) Use coordenadas polares para mostrar que a fronteira superior $\overset{\frown}{AB}$ está isolada se e somente se $\partial T/\partial r = 0$. (*Sugestão*: Mostre que, se $T = f(x, y)$, com $x = r\cos\theta$ e $y = r\operatorname{sen}\theta$ então $\partial T/\partial r = (\partial T/\partial x)\cos\theta + (\partial T/\partial y)\operatorname{sen}\theta$.)

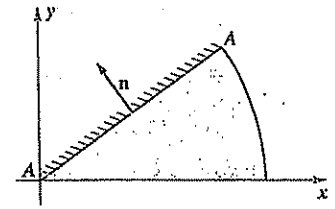
(b) Interprete $\partial T/\partial r$ como taxa de variação de T.



30 A figura exibe um setor circular cuja fronteira AB está isolada.

(a) Use coordenadas polares para mostrar que a condição de isolamento é equivalente a $\partial T/\partial q = 0$ para todo ponto no segmento AB.

(b) Interprete $\partial T/\partial\theta$ como taxa de variação de T.



31 Em algumas aplicações pode ser difícil calcular diretamente o gradiente $\nabla f(x, y)$. Usa-se às vezes a aproximação seguinte para os componentes, em que $h \approx 0$:

$$f_x(x, y) \approx \frac{f(x + h, y) - f(x - h, y)}{2h}$$

$$f_y(x, y) \approx \frac{f(x, y + h) - f(x, y - h)}{2h}$$

(a) Mostre que essas aproximações melhoram quando $h \to 0$.

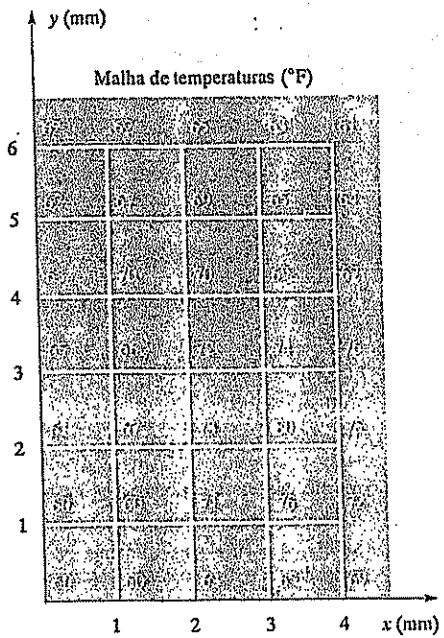
(b) Se $f(x, y) = x^3/(1 + y)$, aproxime $\nabla f(1, 2)$ tomando $h = 0{,}01$ e compare a aproximação com o resultado exato.

32 A análise da temperatura de cada componente é fundamental para o planejamento de um *chip* de computador. Suponhamos que, para que um *chip* opere adequadamente, a temperatura de cada componente não deva exceder 78° F. Se um componente tende a aquecer, os engenheiros costumam colocá-lo em uma parte fria do *chip*. O planejamento de *chips* é auxiliado por simulação em computador, em que se analisam os gradientes da temperatura. Uma simulação para um novo *chip* resultou na malha de temperaturas (em °F) exibida na figura.

(a) Se $T(x, y)$ é a temperatura em (x, y), use o Exercício 31 com $h = 1$ para aproximar $\nabla T(3, 3)$.

(b) Estime a direção da transferência máxima de calor em (3, 3).

(c) Estime a taxa instantânea de variação de T na direção de $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ em (3, 3).



Exercs. 33-34: Estenda as fórmulas de aproximação do Exercício 31 às derivadas parciais primeiras de $f(x, y, z)$, e use então $h = 0{,}01$ para aproximar a derivada direcional de f em $P_0(1, 1, 1)$ na direção de $\mathbf{u}$.

33 $f(x, y, z) = \dfrac{x^2 \operatorname{sen} y \operatorname{tg} z}{x^3 + y^2 z^4}$; $\quad \mathbf{u} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$

34 $f(x, y, z)\ \dfrac{x^4 + 3x^2 z^2}{4x^2 y^2 + \cosh(yz)}$; $\quad \mathbf{u} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})$

Exercs. 35-40: Se $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$ e f e g são diferenciáveis, prove a identidade.

35 $\nabla(cu) = c\,\nabla u$, c constante

36 $\nabla(u + v) = \nabla u + \nabla v$

37 $\nabla(uv) = u\,\nabla v + v\,\nabla u$

38 $\nabla\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,\nabla u - u\,\nabla v}{v^2}$ com $v \neq 0$

39 $\nabla u^n = n u^{n-1} \nabla u$ para todo real n.

40 Se $w = h(u)$, então $\nabla w = \dfrac{dw}{du}\nabla u$.

41 Sejam $\mathbf{u}$ um vetor unitário e θ o ângulo, medido em sentido anti-horário, do eixo-x positivo para o vetor posição correspondente a $\mathbf{u}$.

(a) Mostre que $D_{\mathbf{u}} f(x, y) = f_x(x, y)\cos\theta + f_x(x, y)$ sen θ.

(b) Se $f(x, y) = x^2 + 2xy - y^2$ e $\theta = 5\pi/6$, ache $D_{\mathbf{u}} f(2, -3)$.

42 Ref. Exercício 41. Se $f(x, y) = (xy + y^2)^4$ e $\theta = \pi/3$, ache $D_{\mathbf{u}} f(2, -1)$.

43 Se f, f_x e f_y são contínuas e $\nabla(x, y) = 0$ em uma região retangular $R = \{(x, y): a < x < b, c < y < d\}$, prove que $f(x, y)$ é constante em R (ver Exercício 46 da Seção 16.5).

44 Sejam $w = f(x, y)$, $x = g(t)$, $y = h(t)$ e suponhamos que todas as funções sejam diferenciáveis. Se $\mathbf{r}(t) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ prove que

$$\frac{dw}{dt} = \nabla w \cdot \mathbf{r}'(t)$$

16.7 PLANOS TANGENTES E RETAS NORMAIS

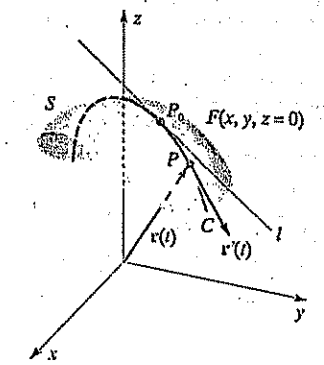


Figura 16.58

Suponhamos que uma superfície S seja o gráfico de uma equação $F(x, y, z) = 0$ e que F tenha derivadas parciais primeiras contínuas. Seja $P_0(x_0, y_0, z_0)$ um ponto de S no qual F_x, F_y e F_z não sejam simultaneamente nulas. Uma **reta tangente** a S em P_0 é, por definição, uma reta l tangente a qualquer curva C de S que contenha P_0 (ver Figura 16.58). Se C admite a parametrização

$$x = f(t),\ y = g(t),\ z = h(t)$$

para t em algum intervalo I e se $\mathbf{r}(t)$ é o vetor posição de $P(x, y, z)$, então

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

Logo,

$$\mathbf{r}'(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} + h'(t)\mathbf{k}$$

é um vetor tangente a C em $P(x, y, z)$, conforme indicado na Figura 16.58.

Para cada t, o ponto $(f(t), g(t), h(t))$ de C está também em S e, portanto,

$$F(f(t), g(t), h(t)) = 0$$

Fazendo

$$w = F(x, y, z), \text{ com } x = f(t),\ y = g(t),\ z = h(t)$$

então, aplicando a regra da cadeia, e como $w = 0$ para todo t, temos

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0$$

Assim, para todo ponto $P(x, y, z)$ de C,

$$F_x(x, y, z)f'(t) + F_y(x, y, z)g'(t) + F_z(x, y, z)h'(t) = 0$$

ou, equivalentemente,

$$\nabla F(x, y, z) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$$

Em particular, se $P_0(x_0, y_0, z_0)$ corresponde a $t = t_0$, então

$$\nabla F]_{P_0} \cdot \mathbf{r}'(t_0) = \nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0$$

Como $\mathbf{r}'(t_0)$ é um vetor tangente a C em P_0, isto implica que *o vetor* $\nabla F]_{P_0}$ *é ortogonal a toda reta tangente* l *a* S *em* P_0 (ver Figura 16.59).

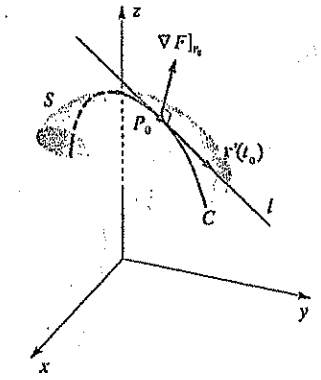


Figura 16.59

O plano por P_0 com vetor normal $\nabla F]_{P_0}$ é o plano tangente a S em P_0. Mostramos que *toda reta tangente l a S em P_0 está no plano tangente em P_0*. O teorema seguinte resume o assunto.

Teorema (16.33) Suponhamos que $F(x, y, z)$ tenha derivadas parciais primeiras contínuas e que S seja o gráfico de $F(x, y, z) = 0$. Se P_0 é um ponto de S e se F_x, F_y e F_z não são simultaneamente nulas em P_0, então o vetor $\nabla F]_{P_0}$ é normal ao plano tangente a S em P_0.

O vetor $\nabla F]_{P_0}$ do Teorema (16.33) é designado como a *normal à superfície S em P_0*. Aplicando o Teorema (14.36), obtemos o seguinte corolário, no qual admitimos que F_x, F_y e F_z não sejam simultaneamente nulas em P_0.

Corolário (16.34) A equação do plano tangente ao gráfico de $F(x, y, z) = 0$ no ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ é

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

EXEMPLO 1

Ache a equação do plano tangente ao elipsóide $\frac{3}{4}x^2 + 3y^2 + z^2 = 12$ no ponto $P_0(2, 1, \sqrt{6})$ e ilustre graficamente.

SOLUÇÃO

Para usar o Corolário (16.34), primeiro expressamos a equação da superfície na forma $F(x, y, z) = 0$ fazendo

$$F(x, y, z) = \tfrac{3}{4}x^2 + 3y^2 + z^2 - 12 = 0$$

As derivadas parciais de F são

$$F_x(x, y, z) = \tfrac{3}{2}x, \quad F_y(x, y, z) = 6y, \quad F_z(x, y, z) = 2z$$

e, então, em $P_0(2, 1, \sqrt{6})$

$$F_x(2, 1, \sqrt{6}) = 3, \quad F_y(2, 1, \sqrt{6}) = 6, \quad F_z(2, 1, \sqrt{6}) = 2\sqrt{6}$$

Aplicamos agora o Corolário (16.34), obtendo a equação

$$3(x - 2) + 6(y - 1) + 2\sqrt{6}(z - \sqrt{6}) = 0$$

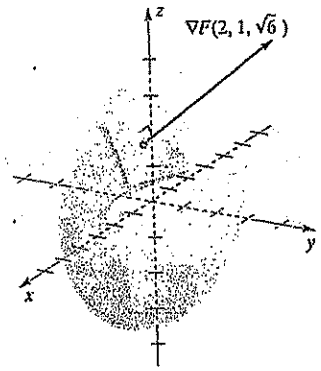


Figura 16.60

ou, equivalentemente,

$$3x + 6y + 2\sqrt{6}z = 24$$

O elipsóide tem interceptos x, y, z, ± 4, ± 2 e $\pm\sqrt{12}$, respectivamente, e está ilustrado na Figura 16.60. O vetor normal ao plano tangente no ponto $P_0(2, 1, \sqrt{6})$ é

$$\nabla F]_{P_0} = \nabla F(2, 1, \sqrt{6}) = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\sqrt{6}\mathbf{k}$$

conforme figura.

Se $z = f(x, y)$ é a equação de S, e fazendo $F(x, y, z) = f(x, y) - z$, então a equação do Corolário (16.34) toma a forma

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + (-1)(z - z_0) = 0$$

Isto nos dá o seguinte teorema.

Teorema (16.35) A equação do plano tangente ao gráfico de $z = f(x, y)$ no ponto (x_0, y_0, z_0) é

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

A reta perpendicular ao plano tangente em um ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ de uma superfície S é **reta normal** a S em P_0. Se S é o gráfico de $F(x, y, z) = 0$, então a normal é paralela ao vetor $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$.

EXEMPLO 2

Ache a equação da normal ao elipsóide $\frac{3}{4}x^2 + 3y^2 + z^2 = 12$ no ponto $P_0(2, 1, \sqrt{6})$.

SOLUÇÃO

Esta superfície é a mesma do Exemplo 1. Conseqüentemente, o vetor

$$\nabla F(2, 1, \sqrt{6}) = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\sqrt{6}\mathbf{k}$$

exibido na Figura 16.60 é paralelo à reta normal. Aplicando o Teorema (14.34), obtemos as seguintes equações paramétricas da reta normal:

$$x = 2 + 3t, \quad y = 1 + 6t, \quad z = \sqrt{6} + 2\sqrt{6}t; \; t \text{ em } \mathbb{R}$$

EXEMPLO 3

Seja P_0 o ponto $(3, -4, 2)$ do hiperbolóide $16x^2 - 9y^2 + 36z^2 = 144$. Determine as equações do plano tangente e da normal ao hiperbolóide em P_0.

SOLUÇÃO

O hiperbolóide da Figura 16.61 é o mesmo da Figura 14.69. Fazendo

$$F(x, y, z) = 16x^2 - 9y^2 + 36z^2 - 144$$

obtemos

$$\nabla F(x, y, z) = 32x\mathbf{i} - 18y\mathbf{j} + 72z\mathbf{k}$$

Logo, o vetor normal ao hiperbolóide em $P_0(3, -4, 2)$ é

$$\nabla F]_{P_0} = 96\mathbf{i} + 72\mathbf{j} + 144\mathbf{k}$$

Qualquer múltiplo escalar de $\nabla F]_{P_0}$ é também um vetor normal. Em particular, como

$$\nabla F]_{P_0} = 24(4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$$

podemos tomar $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$. Assim, a equação do plano tangente em $P_0(3, -4, 2)$ é

$$4(x-3) + 3(y+4) + 6(z-2) = 0$$

ou, equivalentemente,

$$4x + 3y + 6z = 12$$

Este plano tem interceptos x, y e z, 3, 4 e 2, respectivamente (ver Figura 16.61). Note que, ao contrário do caso do Exemplo 1, o plano tangente em P_0, aqui, intercepta a superfície em muitos pontos.

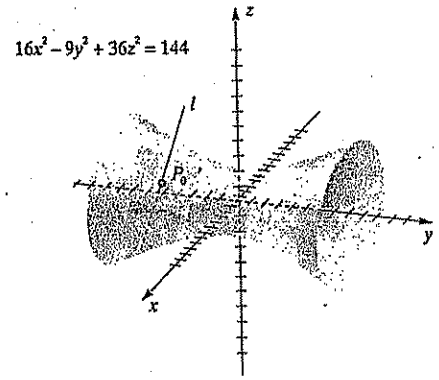


Figura 16.61

Tomando a como vetor normal, chegamos às seguintes equações paramétricas da reta normal l da figura:

$$x = 3 + 4t,\ y = 4 + 3t,\ z = 2 + 6t;\ t \text{ em } \mathbb{R}$$

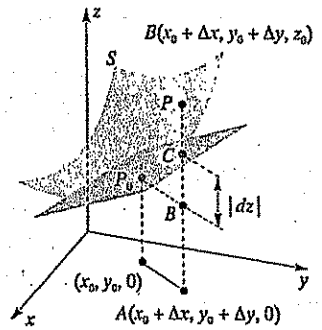


Figura 16.62

Seja S o gráfico da equação $z = f(x, y)$. O plano tangente a S em $P_0(x_0, y_0, z_0)$ permite obter uma interpretação geométrica para a diferencial

$$dz = f_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f_y(x_0, y_0)\,\Delta y$$

definida em (16.15). Como

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

o ponto $P(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$ está em S (ver Figura 16.62).

Seja $C(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z)$ um ponto no plano tangente, e consideremos os pontos $A(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, 0)$ e $B(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0)$ na Figura 16.62. Como C está no plano tangente, suas coordenadas verificam a equação do Teorema (16.35), isto é,

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x_0 + \Delta x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y_0 + \Delta y - y_0)$$

$$= f_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f_y(x_0, y_0)\,\Delta y = dz$$

Em termos de distâncias, mostramos que $|dz| = \|\overline{BC}\|$, isto é, *$|dz|$ é a distância de B ao ponto do plano tangente diretamente acima (ou abaixo) de B*. Este é o análogo do caso de uma variável $y = f(x)$, abordado na Seção 3.5, em que interpretamos dy como a distância a um ponto em uma reta tangente ao gráfico de f (ver Figura 3.27). Segue-se que, quando tomamos dz como uma aproximação da variação de z, admitimos que a superfície S quase coincida com seu plano tangente em pontos próximos de P_0.

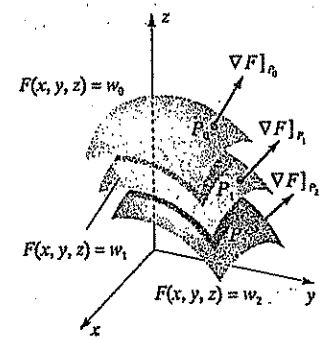


Figura 16.63 Superfícies isotérmicas.

Como aplicação do conteúdo desta seção, suponhamos um sólido, um líquido ou um gás situado em um sistema coordenado tridimensional, de tal modo que a temperatura no ponto $P(x, y, z)$ seja $w = F(x, y, z)$. Se $P_0(x_0, y_0, z_0)$ é um ponto fixo, então o gráfico da equação

$$F(x, y, z) = F(x_0, y_0, z_0)$$

é a superfície de nível (isotérmica) que passa por P_0. Em todo ponto desta superfície, a temperatura é $w_0 = F(x_0, y_0, z_0)$. É

interessante visualizar todas as superfícies de nível que possamos obter escolhendo pontos diferentes. Na Figura 16.63 estão esboçadas várias superfícies por P_0, P_1 e P_2 correspondentes às temperaturas w_0, w_1 e w_2. Pelo Teorema (16.33), $\nabla F]_{P_0}$, $\nabla F]_{P_1}$ e $\nabla F]_{P_2}$ são vetores normais a suas superfícies correspondentes nos pontos P_0, P_1 e P_2, respectivamente.

Na Seção 16.6, vimos que a taxa máxima de variação de $F(x, y, z)$ em $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ocorre na direção de $\nabla F]_{P_0}$. Pelas observações precedentes, esta taxa máxima de variação ocorre em uma direção que é normal à superfície de nível de F que contém P_0.

O teorema a seguir resume estas observações.

Teorema (16.36) Sejam F uma função de três variáveis diferenciável em $P_0(x_0, y_0, z_0)$, e S a superfície de nível de F que contém P_0. Se $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, então este vetor gradiente é normal a S em P_0. Assim, a direção da taxa máxima de variação de $F(x, y, z)$ em P_0 é normal a S.

A Figura 16.63 ilustra o teorema precedente; ali, a taxa máxima de variação da temperatura ocorre em direções normais às superfícies isotérmicas. Outra ilustração reside na teoria da eletricidade, em que $F(x, y, z)$ é o potencial em (x, y, z). Se uma partícula se move em uma das superfícies de nível (eqüipotenciais), o potencial permanece constante. O potencial varia mais rapidamente quando uma partícula se move em uma direção normal a uma superfície eqüipotencial.

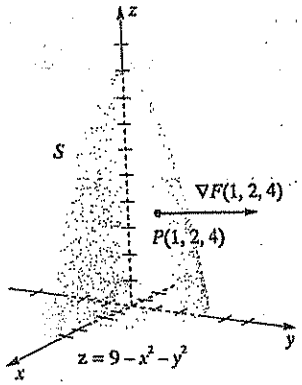


Figura 16.64

EXEMPLO 4

Se $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z$, esboce a superfície de nível de F que passa por $P(1, 2, 4)$; esboce $\nabla F(1, 2, 4)$.

SOLUÇÃO

As superfícies de nível são gráficos de equações da forma $F(x, y, z) = k$, em que k é uma constante. Como $F(1, 2, 4) = 1^2 + 2^2 + 4 = 9$, a superfície de nível que passa por $P(1, 2, 4)$ é o gráfico da equação $F(x, y, z) = 9$ – isto é, de

$$x^2 + y^2 + z = 9 \quad \text{ou} \quad z = 9 - x^2 - y^2$$

A Figura 16.64 ilustra esta superfície de nível – um parabolóide de revolução.

O gradiente de F é $\nabla F(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + \mathbf{k}$

Em $P(1, 2, 4)$,

$$\nabla F(1, 2, 4) = 2(1)\mathbf{i} + 2(2)\mathbf{j} + \mathbf{k} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

A Figura 16.64 ilustra o vetor $\nabla F(1, 2, 4)$. Pelo Teorema (16.36), $\nabla F(1, 2, 4)$ é ortogonal à superfície de nível S em P.

O resultado seguinte, para funções de *duas* variáveis, é análogo ao Teorema (16.36).

Teorema (16.37) Sejam f uma função de duas variáveis diferenciável em $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e C a curva de nível de f que contém P. Se $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$, então este vetor gradiente é ortogonal a C em P_0. Assim, a direção da taxa máxima de variação de $f(x, y)$ em P_0 é ortogonal a C.

A Figura 16.65 ilustra graficamente o Teorema (16.37) para uma função arbitrária f de duas variáveis. As curvas de nível por $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ são os gráficos de $f(x, y) = k_0$, $f(x, y) = k_1$ e $f(x, y) = k_2$, respectivamente em que $k_0 = f(x_0, y_0)$, $k_1 = f(x_1, y_1)$, e $k_2 = f(x_2, y_2)$. Pelo Teorema (16.37), os vetores $\nabla f]_{P_0}$, $\nabla f]_{P_1}$ e $\nabla f]_{P_2}$ são ortogonais às curvas de nível, conforme indicado na figura. Se cada curva de nível C é uma isobárica em um mapa meteorológico, então a pressão barométrica permanece inalterada quando um ponto percorre C. O vetor $\nabla f]_P$ em um ponto P de uma isobárica aponta a direção em que a pressão barométrica varia mais rapidamente.

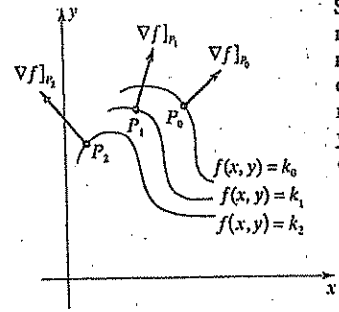


Figura 16.65

Como ilustração específica do Teorema (16.37), se $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$, então as curvas de nível são dadas por $9 - x^2 - y^2 = k$, em que k é um número real (ver Exemplo 3 da Secção 16.1). A Figura 16.66 ilustra algumas dessas curvas de nível (círculos). Pelo Teorema 16.37, a taxa máxima (ou mínima) de variação de $f(x, y)$ ocorre se (x, y) se move em direção ortogonal a esses círculos e, conseqüentemente, ao longo de retas pela origem. Isto corresponde ao movimento do ponto $(x, y, f(x, y))$ para cima ou para baixo ao longo da maior aclividade do gráfico de f ilustrada na Figura 16.64.

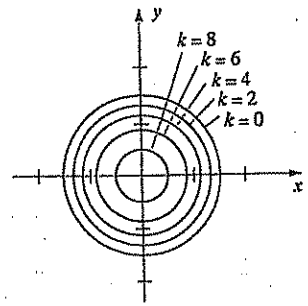


Figura 16.66 Curvas de nível: $9 - x^2 - y^2 = k$.

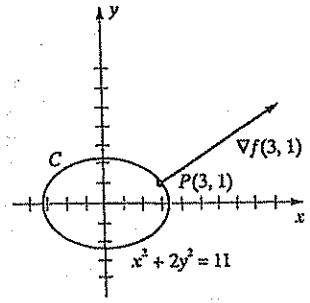


Figura 16.67

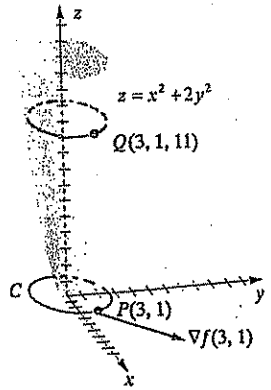


Figura 16.68

EXEMPLO 5

Seja $f(x, y) = x^2 + 2y^2$.

(a) Trace a curva de nível C de f que passa pelo ponto $P(3, 1)$ e esboce $\nabla f(3, 1)$.

(b) Discuta o significado da parte (a) em termos do gráfico de f.

SOLUÇÃO

(a) Como $f(3, 1) = 3^2 + 2(1)^2 = 9 + 2 = 11$, a curva de nível de f que passa pelo ponto $P(3, 1)$ é dada por $f(x, y) = 11$ – isto é, por

$$x^2 + 2y^2 = 11$$

O gráfico é a elipse ilustrada na Figura 16.67. O gradiente de f é

$$\nabla f(x, y) = 2x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j}$$

e então $$\nabla f(3, 1) = 2(3)\mathbf{i} + 4(1)\mathbf{j} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$$

A Figura 16.67 exibe o vetor $\nabla f(3, 1)$. Pelo Teorema (16.37), este vetor é ortogonal à curva de nível C.

(b) O gráfico de f (isto é, de $z = x^2 + 2y^2$) é um parabolóide elíptico (ver Figura 16.68). A curva de nível $x^2 + 2y^2 = 11$ no plano-xy corresponde ao traço do parabolóide no plano $z = 11$. A taxa máxima de variação de $f(x, y)$ ocorre quando o ponto (x, y) no plano-xy se move na direção de $\nabla f(3, 1)$ em $P(3, 1)$. Isto corresponde ao movimento do ponto $(x, y, f(x, y))$ para cima ao longo da parte de maior aclive do parabolóide em $Q(3, 1, 11)$.

Os planos tangentes podem ser utilizados para obter aproximações sucessivas da solução de um sistema de duas equações não-lineares, $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$, a partir de uma primeira aproximação (x_1, y_1), procedendo-se como a seguir:

Passo 1 Aplicar o Teorema (16.35) para achar equações dos planos tangentes aos gráficos de f e g nos pontos $(x_1, y_1, f(x_1, y_1))$ e $(x_1, y_1, g(x_1, y_1))$.

Passo 2 Achar o traço no plano-xy de cada plano tangente do passo 1.

Passo 3 Achar o ponto de intersecção (x_2, y_2) dos traços obtidos no passo 2.

Passo 4 Tomar (x_2, y_2) como segunda aproximação e repetir os passos 1-3.

Este processo constitui uma descrição geométrica do método de Newton, estudado no fim da Seção 16.4.

EXERCÍCIOS 16.7

Exercs. 1-10: Determine equações do plano tangente e da normal ao gráfico da equação no ponto P.

1 $4x^2 - y^3 + 3z^2 = 10$; $P(2, -3, 1)$

2 $9x^2 - 4y^2 - 25z^2 = 40$; $P(4, 1, -2)$

3 $z = 4x^2 + 9y^2$; $P(-2, -1, 25)$

4 $z = 4x^2 - y^2$; $P(5, -8, 36)$

5 $xy + 2yz - xz^2 + 10 = 0$; $P(-5, 5, 1)$

6 $x^3 - 2xy + z^3 + 7y + 6 = 0$; $P(1, 3, -3)$

7 $z = 2e^{-x}\cos y$; $P(0, \pi/3, 1)$

8 $z = \ln xy$; $P(\frac{1}{2}, 2, 0)$

9 $x = \ln \dfrac{y}{2z}$; $P(0, 2, 1)$

10 $xyz - 4xz^3 + y^3 = 10$; $P(-1, 2, 1)$

Exercs. 11-14: Trace a curva de nível C de F que contém P e esboce $\nabla F]_P$.

11 $f(x, y) = y^2 - x^2$; $P(2, 1)$

12 $f(x, y) = 3x - 2y$; $P(-2, 1)$

13 $f(x, y) = x^2 - y$; $P(-3, 5)$

14 $f(x, y) = xy$; $P(3, 2)$

Exercs. 15-20: Trace a superfície de nível S de F que contém P e esboce $\nabla F]_P$.

15 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; $P(1, 5, 2)$

16 $F(x, y, z) = z - x^2 - y^2$; $P(2, -2, 1)$

17 $F(x, y, z) = x + 2y + 3z$; $P(3, 4, 1)$

18 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$; $P(3, -1, 1)$

19 $F(x, y, z) = x^2 + y^2$; $P(2, 0, 3)$

20 $F(x, y, z) = z$; $P(2, 3, 4)$

Exercs. 21-24: Prove que a equação do plano tangente à superfície quádrica dada, no ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, pode ser escrita sob a forma indicada.

21 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$; $\dfrac{xx_0}{a^2} + \dfrac{yy_0}{b^2} + \dfrac{zz_0}{c^2} = 1$

22 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$; $\dfrac{xx_0}{a^2} - \dfrac{yy_0}{b^2} + \dfrac{zz_0}{c^2} = 1$

23 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$; $\dfrac{xx_0}{a^2} - \dfrac{yy_0}{b^2} - \dfrac{zz_0}{c^2} = 1$

24 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = cz$; $\dfrac{2xx_0}{a^2} + \dfrac{2yy_0}{b^2} = c(z + z_0)$

25 Ache os pontos do hiperbolóide de duas folhas $x^2 - 2y^2 - 4z^2 = 16$ em que o plano tangente é paralelo ao plano $4x - 2y + 4z = 5$.

26 Mostre que a soma dos quadrados dos interceptos x, y, z de todo plano tangente ao gráfico da equação $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$ é a constante a^2.

27 Mostre que toda normal a uma esfera passa pelo seu centro.

28 Ache os pontos do paraboloide $z = 4x^2 + 9y^2$ nos quais a normal é paralela à reta por $P(-2, 4, 3)$ e $Q(5, -1, 2)$.

29 Diz-se que duas superfícies são ortogonais em um ponto de intersecção $P(x, y, z)$ se suas normais em P são ortogonais. Mostre que os gráficos de $F(x, y, z) = 0$ e $G(x, y, z) = 0$ (em que F e G têm derivadas parciais) são ortogonais em P se e somente se $F_x G_x + F_y G_y + F_z G_z = 0$.

30 Ref. Exercício 29. Mostre que a esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ e o cone $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ são ortogonais em todo ponto de intersecção.

Exercs. 31-32: Para o sistema de equações dado e a primeira solução aproximada (x_1, y_1), use os passos 1-3 do fim desta seção para achar uma segunda aproximação (x_2, y_2).

31 $x^2 - y^3 = 0$, $x^2 + y^2 - 3 = 0$; $(1{,}3; 1{,}1)$

32 $\operatorname{sen} x - \cos y = 0$, $x^2 - y^2 - 1{,}3 = 0$; $(1{,}2; 0{,}3)$

16.8 EXTREMOS DE FUNÇÕES DE DIVERSAS VARIÁVEIS

No Capítulo 4 estudamos extremos locais e absolutos para funções de uma variável. Nesta seção estenderemos tais conceitos às funções de diversas variáveis.

Uma função f de duas variáveis tem **máximo local** em (a, b) se existe um disco aberto R contendo (a, b) tal que $f(x, y) \leq f(a, b)$ para todo (x, y) em R. Os máximos locais correspondem aos pontos altos do gráfico S de f, conforme se vê na Figura 16.69. Da mesma forma, a função f tem **mínimo local** em (c, d) se existe um disco aberto R contendo (c, d) tal que $f(x, y) \geq f(c, d)$ para todo (x, y) em R. Os mínimos locais correspondem aos pontos baixos do gráfico de f, conforme Figura 16.70.

Uma região no plano-xy é **limitada** se é uma sub-região de um disco fechado. Se f é contínua em uma região R fechada e limitada, então f tem **máximo** $f(a, b)$ e **mínimo** $f(c, d)$ para algum (a, b) e algum (c, d) em R, isto é

$$f(c, d) \leq f(x, y) \leq f(a, b)$$

para todo (x, y) em R. A demonstração pode ser encontrada em textos de cálculo avançado.

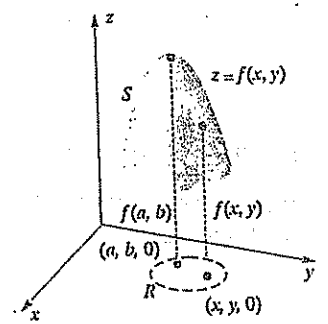


Figura 16.69 Máximo local $f(a, b)$.

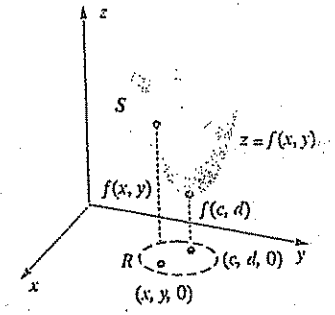


Figura 16.70 Mínimo local $f(c, d)$.

Os máximos e mínimos locais são os **extremos locais** de f. Os extremos também incluem o máximo e o mínimo (se existirem). Se f tem derivadas parciais primeiras contínuas em (x_0, y_0) e se $f(x_0, y_0)$ é um extremo local de f, então o plano tangente ao gráfico de $z = f(x, y)$ em (x_0, y_0, z_0) é paralelo ao plano-xy e, assim, sua equação é $z = z_0$. Segue-se do Teorema (16.35) que $f_x(x_0, y_0) = 0$ e $f_y(x_0, y_0) = 0$. Portanto, os pares que originam extremos locais devem ser soluções de *ambas* as equações

$$f_x(x, y) = 0 \qquad \text{e} \qquad f_y(x, y) = 0$$

Tal como no caso de funções de uma variável, podem ocorrer extremos locais em (x, y) mesmo que $f_x(x, y)$ ou $f_y(x, y)$ não exista. Todos esses pares são de grande importância para achar os extremos, e por isso recebem nome especial.

Definição (16.38) Seja f uma função de duas variáveis. Um par (a, b) é **ponto crítico** de f se

(i) $f_x(a, b) = 0$ e $f_y(a, b) = 0$, ou

(ii) $f_x(a, b)$ ou $f_y(a, b)$ não existe

Na pesquisa de extremos locais de uma função, em geral começamos por determinar os pontos críticos. Testamos então cada par para ver se se trata de máximo ou mínimo local.

Um máximo ou um mínimo de uma função de duas variáveis podem ocorrer em um ponto-fronteira de seu domínio R. A pesquisa de tais **extremos na fronteira** em geral exige um processo separado, da mesma forma que no caso de extremos

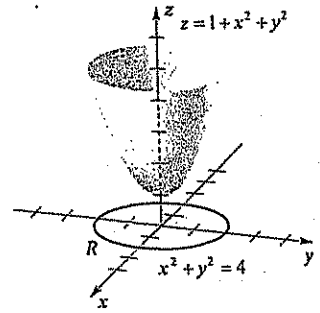


Figura 16.71

nos pontos inicial e final para funções de uma variável. Se não há pontos-fronteira – por exemplo, quando R é todo o plano-xy ou um disco aberto – então pode não haver extremos na fronteira.

EXEMPLO 1

Seja $f(x, y) = 1 + x^2 + y^2$, com $x^2 + y^2 \leq 4$. Ache os extremos de f.

SOLUÇÃO

A restrição $x^2 + y^2 = 4$ corresponde ao disco fechado R de raio 2 e centro O no plano-xy (ver Figura 16.71). Pela Definição (16.38)(i), os pontos críticos são soluções do seguinte sistema de duas equações:

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

O único par que satisfaz ambas as equações é $(0, 0)$; logo, $f(0, 0) = 1$ é o único extremo local possível. Além disso, como

$$f(x, y) = 1 + x^2 + y^2 > 1 \text{ se } (x, y) \neq (0, 0)$$

f tem o mínimo local 1 em $(0, 0)$. Isto é evidente também pelo gráfico de f, esboçado na Figura 16.71. O valor funcional $f(0, 0) = 1$ é também o mínimo de f em R.

Para achar possíveis extremos na fronteira, investigamos pontos (a, b) que estejam na fronteira de R. Com base na figura, vê-se que qualquer um desses pontos (por exemplo, $(0, 2)$) conduz ao máximo $f(0, 2) = 5$.

Conforme ilustrado pelo próximo exemplo, nem todo ponto crítico pode conduzir a um extremo.

EXEMPLO 2

Se $f(x, y) = y^2 - x^2$ e o domínio de f é $\mathbb{R}^2$, ache os extremos de f.

SOLUÇÃO

Pela Definição (16.38)(i), os pontos críticos são soluções do seguinte sistema de duas equações:

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} -2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

Tal como no Exemplo 1, o único extremo local possível é $f(0, 0) = 0$. Todavia, se $y \neq 0$, então $f(0, y) = y^2 > 0$, e se $x \neq 0$, então $f(x, 0) = -x^2 < 0$. Assim, qualquer disco aberto no plano-xy que contenha $(0, 0)$ contém pares nos quais os valores funcionais são

maiores do que $f(0, 0)$ e também pares em que os valores são menores do que $f(0, 0)$. Conseqüentemente, f não tem extremos locais. Este fato é evidente pelo gráfico de f, um parabolóide hiperbólico (Figura 16.72).

Para determinar os extremos de uma função mais complicada f de duas variáveis, é conveniente utilizar a seguinte função D chamada *discriminante* de f.

Definição (16.39)

Seja f uma função de duas variáveis dotada de derivadas parciais segundas contínuas. O **discriminante** D de f é

$$D(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2$$

Uma forma de lembrar a expressão do discriminante consiste em considerar o seguinte determinante, com todas as funções calculadas em (x, y):

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$$

Note que admitimos $f_{yx} = f_{xy}$.

O teste que segue é enunciado sem demonstração. É o correspondente ao teste da derivada segunda para funções de uma variável.

Teste para extremos locais (16.40)

Seja f uma função de duas variáveis dotada de derivadas parciais segundas contínuas em todo um disco aberto R que contém (a, b). Se $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ e $D(a, b) > 0$, então $f(a, b)$ é

(i) máximo local de f se $f_{xx}(a, b) < 0$

(ii) mínimo local de f se $f_{xx}(a, b) > 0$

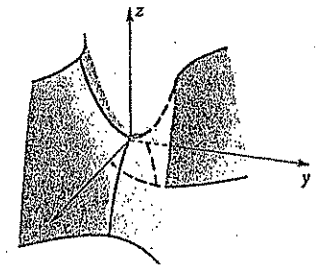


Figura 16.72

Note que, se $D(a, b) > 0$, então $f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) > [f_{xy}(a, b)]^2$ e, então, $f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b)$ é positivo, isto é, $f_{xx}(a, b)$ e $f_{yy}(a, b)$ têm o mesmo sinal. Podemos, assim, substituir $f_{xx}(a, b)$ em (i) e (ii) do teste precedente por $f_{yy}(a, b)$.

Um ponto $P(a, b, f(a, b))$ do gráfico de f é ponto de sela se $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ e se existe um disco aberto R contendo (a, b) tal que $f(x, y) > f(a, b)$ para alguns pontos (x, y) de R e $f(x, y) < f(a, b)$ para outros pontos. Note que o gráfico do parabolóide hiperbólico da Figura 16.72 tem um ponto de sela

em (0, 0, 0). Em textos de cálculo avançado demonstra-se o seguinte teorema:

Teorema (16.41) Seja f dotada de derivadas parciais segundas contínuas em todo um disco aberto R que contém (a, b). Se $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ e $D(a, b) < 0$, então o ponto $P(a, b, f(a, b))$ é ponto de sela do gráfico de f.

Não podemos usar (16.40) para determinar se $f(a, b)$ é extremo local, se $D(a, b) = 0$, ou se $f_x(a, b)$ ou $f_y(a, b)$ não existe. Em tais casos, devemos analisar a variação de $f(x, y)$ na vizinhança de (a, b) apelando para a definição de $f(x, y)$ ou para o gráfico de f. A título de ilustração, se $f(x, y) = -(x^2 + y^{2/3})$, então a derivada parcial $f_y(x, y) = -\frac{2}{3}y^{-1/3}$ não existe se $y = 0$.

Logo, *todo* ponto $(a, 0)$ no eixo-x é um ponto crítico de f. Pelo gráfico de f na Figura (16.71)(i), é evidente que $f(0, 0) = 0$ é tanto um máximo local como um máximo de f em $\mathbb{R}^2$. Este fato pode ser mostrado algebricamente observando-se que se $(x, y) \neq (0, 0)$, então $f(x, y) < 0$. Como muitas dessas exceções a (16.40) exigem análise complicada, não consideraremos exemplos nem exercícios deste tipo.

EXEMPLO 3

Se $f(x, y) = x^2 - 4xy + y^3 + 4y$, ache os extremos locais e os pontos de sela de f.

SOLUÇÃO

As derivadas parciais primeiras de f são

$$f_x(x, y) = 2x - 4y \qquad \text{e} \qquad f_y(x, y) = -4x + 3y^2 + 4$$

Como f_x e f_y existem para todo (x, y), os únicos pontos críticos são as soluções do seguinte sistema de duas equações com duas incógnitas:

$$\begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ -4x + 3y^2 + 4 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo, vemos que f tem os dois pontos críticos $(4, 2)$ e $(\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$. As derivadas parciais segundas de f são

$$f_{xx}(x, y) = 2, f_{xy}(x, y) = -4, f_{yy}(x, y) = 6y$$

Logo, o discriminante D é dado por

$$D(x, y) = (2)(6y) - (-4)^2 = 12y - 16$$

O restante da solução consta da tábua a seguir.

Ponto crítico	Valor do discriminante	Valor de f_{xx}	Conclusão
$(4, 2)$	$D(4, 2) = 8 > 0$	$f_{xx}(4, 2) = 2 > 0$	$f(4, 2) = 0$ é mínimo local por (16.40)(ii)
$(\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$	$D(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}) = -8 < 0$	irrelevante	$(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, f(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}))$ é ponto de sela por (16.41)

EXEMPLO 4

Se $f(x, y) = x^2 - 4xy + y^3 + 4y$, ache os extremos de f na região triangular R de vértices $(-1, -1)$, $(7, -1)$ e $(7, 7)$.

SOLUÇÃO

A fronteira de R consiste nos segmentos de reta C_1, C_2 e C_3, conforme Figura 16.73. No Exemplo 3 vimos que f tem mínimo local 0 no ponto $(4, 2)$, que é interior a R. Resta, assim, pesquisarmos os extremos na fronteira.

Em C_1 temos $y = -1$, de modo que os valores de f são dados por

$$f(x, -1) = x^2 + 4x - 1 - 4 = x^2 + 4x - 5$$

Isto define uma função de uma variável, cujo domínio é o intervalo $[-1, 7]$. A derivada primeira é $2x + 4$, que é igual a 0 em $x = -2$, um número que está fora do intervalo $[-1, 7]$. Assim, não há extremo local de $f(x, -1)$ em $[-1, 7]$. Como $f(x, -1)$ é crescente em todo este intervalo, obtemos os extremos nos pontos terminais

$$f(-1, -1) = -8 \qquad \text{e} \qquad f(7, -1) = 72$$

Em C_2, temos $x = 7$ e os valores de f são dados por

$$f(7, y) = 49 - 28y + y^3 + 4y = y^3 - 24y + 49$$

para $-1 \leq y \leq 7$. A derivada primeira desta função de y é $3y^2 - 24$, havendo, assim, um número crítico se $3y^2 = 24$, ou $y = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Tomando a derivada segunda $6y$ de $f(7, y)$, vemos que $f(7, 2\sqrt{2}) = 49 - 32\sqrt{2} \approx 3{,}7$ é mínimo local de f *no segmento* C_2. Todavia, *não* é mínimo de f em R, pois $f(-1, -1) = -8 < 3{,}7$. Os valores de f nas extremidades de C_2 são

$$f(7, -1) = 72 \qquad \text{e} \qquad f(7, 7) = 224$$

Finalmente, em C_3 temos $y = x$, e os valores de f são dados por

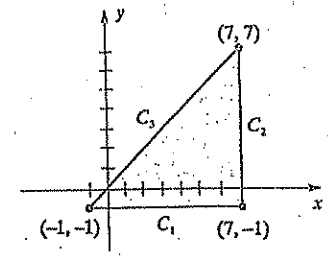


Figura 16.73

$$f(x, x) = x^2 - 4x^2 + x^3 + 4x = x^3 - 3x^2 + 4x$$

A derivada primeira $3x^2 - 6x + 4$ não tem raízes reais, não havendo, assim, números críticos para $f(x, x)$. Já calculamos os valores nas extremidades $f(-1, -1) = -8$ e $f(7, 7) = 224$. Estes são, pois, os valores mínimo e máximo de f na região triangular R.

EXEMPLO 5

Se $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}y^3 - x^2 - 3x - 4y - 3$, ache os extremos locais e os pontos de sela de f.

SOLUÇÃO

As derivadas parciais primeiras de f são

$$f_x(x, y) = x^2 - 2x - 3 \qquad \text{e} \qquad f_y(x, y) = 4y^2 - 4$$

Como f_x e f_y existem para todo (x, y), os únicos pontos críticos são as soluções do sistema

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0 \\ 4y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo, obtemos os quatro pontos críticos $(3, 1)$, $(3, -1)$, $(-1, 1)$ e $(-1, -1)$. As derivadas parciais segundas de f são

$$f_{xx}(x, y) = 2x - 2, f_{xy}(x, y) = 0, f_{yy}(x, y) = 8y$$

Logo, o discriminante D é dado por

$$D(x, y) = (2x - 2)(8y) - 0^2 = 16y(x - 1)$$

Vamos dispor nosso trabalho na tabela seguinte:

Ponto crítico	Valor do discriminante	Valor de f_{xx}	Conclusão
$(3, 1)$	$D(3, 1) = 32 > 0$	$f_{xx}(3, 1) = 4 > 0$	$f(3, 1) = -\frac{44}{3}$ é mínimo local por (16.40)(ii)
$(3, -1)$	$D(3, -1) = -32 < 0$	irrelevante	$(3, -1, f(3, -1))$ é ponto de sela por (16.41)
$(-1, 1)$	$D(-1, 1) = -32 < 0$	irrelevante	$(-1, 1, f(-1, 1))$ é ponto de sela por (16.41)
$(-1, -1)$	$D(-1, -1) = 32 > 0$	$f_{xx}(-1, -1) = -4 < 0$	$f(-1, -1) = \frac{4}{3}$ é máximo local por (16.40)(i)

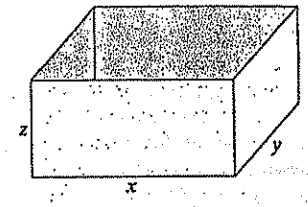


Figura 16.74

EXEMPLO 6

Deve-se construir um depósito retangular sem tampa com volume $V = 12$ m^3. O custo por metro quadrado do material a ser usado é de \$ 400,00 para o fundo, \$ 300,00 para dois dos lados opostos, e \$ 200,00 para os lados opostos restantes. Determine as dimensões do depósito que minimizem o custo.

SOLUÇÃO

Conforme Figura 16.74, sejam x e y as dimensões (em metros) da base e z a altura (em metros). Como a área da base é xy e há dois lados de área xz e dois lados de área yz, o custo C (em cruzeiros) do material é

$$C = 400xy + 300(2xz) + 200(2yz)$$

em que x, y e z são positivos. Como $V = xyz = 12$, segue-se que $z = 12/(xy)$. Substituindo z na fórmula de C e simplificando, obtemos

$$C = 400xy + \frac{7.200}{y} + \frac{4.800}{x}$$

Não há pontos fronteira, pois $x > 0$ e $y > 0$ para todo (x, y). Logo, não há extremos na fronteira. Para achar possíveis extremos locais, resolvemos o seguinte sistema de duas equações:

$$C_x = 400y - \frac{4.800}{x^2} = 0, \quad C_y = 400x - \frac{7.200}{y^2} = 0$$

São equações equivalentes:

$$y = \frac{12}{x^2} \quad \text{e} \quad xy^2 = 18$$

Substituindo $y = 12/x^2$ na segunda equação, obtemos

$$x\left(\frac{144}{x^4}\right) = 18 \quad \text{ou} \quad 144 = 18x^3$$

Logo, $x^3 = 8$ ou $x = 2$. Como $y = 12/x^2$, o valor correspondente de y é $\frac{12}{4}$ ou 3. Pelo Teorema (16.40), pode-se mostrar que estes valores de x e y determinam um mínimo de C. Finalmente, com $z = 12/(xy)$, obtemos $z = 12/(3 \times 2) = 2$. Assim, o custo mínimo ocorre se as dimensões da base são 3 m por 2 m e a altura é de 2 m. Os lados maiores devem ser construídos com o material de \$ 200,00 e os lados menores com o material de \$ 300,00 o metro quadrado.

EXEMPLO 7

No planejamento de computadores modernos, é necessário considerar a velocidade da luz (aproximadamente 300.000 km/seg) ao posicionar componentes elétricos, de modo que eles possam comunicar-se o mais rapidamente possível. Suponha que três componentes estejam localizados em um plano coordenado em $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ e $P_3(x_3, y_3)$ e que cada ângulo do triângulo $P_1P_2P_3$ seja inferior a 120°. Um quarto componente, que se comunicará igualmente com os outros três, deve ser colocado em um ponto $P(x, y)$ que minimize a demora total entre a transmissão e a recepção de sinais (ver Figura 16.75). Se P é colocado adequadamente, ache os ângulos entre os seguintes pares de vetores:

$$\overrightarrow{P_1P},\ \overrightarrow{P_2P};\quad \overrightarrow{P_1P},\ \overrightarrow{P_3P};\quad \overrightarrow{P_2P},\ \overrightarrow{P_3P}$$

SOLUÇÃO

Sejam d_1, d_2 e d_3 as distâncias entre P e P_1, P e P_2 e P e P_3, respectivamente. Assim,

$$d_k = \sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2},\quad k = 1, 2, 3$$

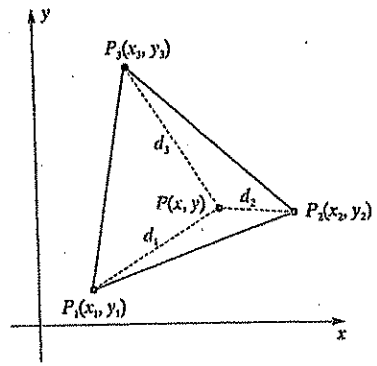


Figura 16.75

O tempo mínimo entre a transmissão e a recepção de sinais corresponde ao valor de (x, y) que dê o mínimo de

$$f(x, y) = d_1 + d_2 + d_3$$

Para achar os pontos críticos de f, consideremos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} f_x(x, y) = \dfrac{x - x_1}{d_1} + \dfrac{x - x_2}{d_2} + \dfrac{x - x_3}{d_3} = 0 \\ f_y(x, y) = \dfrac{y - y_1}{d_1} + \dfrac{y - y_2}{d_2} + \dfrac{y - y_3}{d_3} = 0 \end{cases}$$

Transpondo, em cada equação, o último termo para o lado direito, elevando cada membro ao quadrado e somando, obtemos

$$\left(\frac{x - x_1}{d_1} + \frac{x - x_2}{d_2}\right)^2 + \left(\frac{y - y_1}{d_1} + \frac{y - y_2}{d_2}\right)^2 = \frac{(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2}{d_3^2} = 1$$

Você verificará que esta expressão se simplifica para

$$(*)\qquad \frac{(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2)}{d_1 d_2} = -\frac{1}{2}$$

Seja θ o ângulo entre os vetores

$$\overrightarrow{P_1P} = (x - x_1)\mathbf{i} + (y - y_1)\mathbf{j}$$

e

$$\overrightarrow{P_2P} = (x - x_2)\mathbf{i} + (y - y_2)\mathbf{j}$$

Aplicando o Corolário (14.20) e levando em conta (*), temos

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{P_1P} \cdot \overrightarrow{P_2P}}{\|\overrightarrow{P_1P}\|\,\|\overrightarrow{P_2P}\|} = -\frac{1}{2}$$

Logo, $\theta = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = 120°$. Por simetria, os ângulos $\overrightarrow{P_1P}$ e $\overrightarrow{P_3P}$ e entre $\overrightarrow{P_2P}$ e $\overrightarrow{P_3P}$ devem também ser iguais a 120°, conforme ilustrado na Figura 16.76.

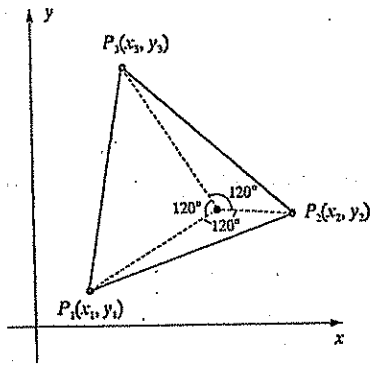


Figura 16.76

O que se discutiu nesta seção pode ser generalizado para funções de mais de duas variáveis. Por exemplo, dada $f(x, y, z)$, definimos os máximos e mínimos locais de maneira análoga à do caso de duas variáveis. Se f tem derivadas parciais primeiras, então só pode haver extremo local em um ponto em que f_x, f_y e f_z sejam simultaneamente 0. É difícil estabelecer testes para determinar se tal ponto corresponde a um máximo, ou mínimo ou nenhum deles. Todavia, nas aplicações, esta determinação é feita analisando-se a natureza física do problema.

EXERCÍCIOS 16.8

Exercs. 1-20: Ache os extremos e os pontos de sela de f.

1 $f(x, y) = -x^2 - 4x - y^2 + 2y - 1$

2 $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 - 6y + 12$

3 $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - x + 2y$

4 $f(x, y) = 5 + 4x - 2x^2 + 3y - y^2$

5 $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$

6 $f(x, y) = x^2 - 3xy - y^2 + 2y - 6x$

7 $f(x, y) = x^3 + 3xy - y^3$

8 $f(x, y) = x^2 + xy$

9 $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 + x - 8y$

10 $f(x, y) = -2x^2 - 2xy - \frac{1}{2}y^2 - 14y - 5y$

11 $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}y^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 32y + 4$

12 $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{3}{2}x^2 - 4y$

13 $f(x, y) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 4xy + y^2$

14 $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + 4xy - 9x - y^2$

15 $f(x, y) = x^4 + y^3 + 32x - 9y$

16 $f(x, y) = -\frac{1}{3}x^3 + xy + \frac{1}{2}y^2 - 12y$

17 $f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$

18 $f(x, y) = x \operatorname{sen} y$

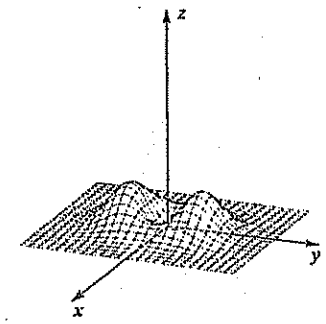
19 $f(x, y) = \dfrac{4y + x^2y^2 + 8x}{xy}$

20 $f(x, y) = \dfrac{x}{x + y}$

21 A figura exibe o gráfico de

$$f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$$

Mostre que há cinco pontos críticos e ache os extremos de f.

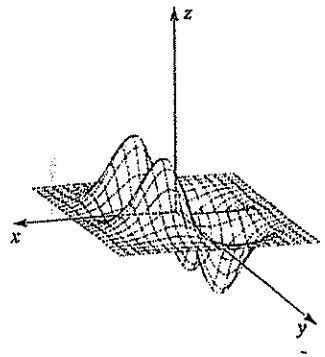


22 A figura exibe o gráfico de

$$f(x, y) = xy^2e^{-(x^2 + y^2)}$$

(a) Mostre que há um número infinito de pontos críticos.

(b) Ache as coordenadas dos quatro pontos críticos exibidos na figura.



Exercs. 23-28: Ache o máximo e o mínimo de f em R. (Recorra aos Exercícios 3-8 para extremos locais.)

23 $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - x + 2y$;

a região R delimitada pela elipse $x^2 + 4y^2 = 1$.

24 $f(x, y) = 5 + 4x - 2x^2 + 3y - y^2$;

a região triangular R delimitada pelas retas $y = x$, $y = -x$ e $y = 2$.

25 $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$;

$R = \{(x, y): -2 \le x \le 4, -1 \le y \le 3\}$

26 $f(x, y) = x^2 - 3xy - y^2 + 2y - 6x$;

$R = \{(x, y): |x| \le 3, |y| \le 2\}$

27 $f(x, y) = x^3 + 3xy - y^3$;

a região triangular R com vértices $(1, 2)$, $(1, -2)$ e $(-1, -2)$.

28 $f(x, y) = x^2 + xy$;

a região R delimitada pelos gráficos de $y = x^2$ e $y = 9$.

29 Ache a menor distância do ponto $P(2, 1, -1)$ ao plano $4x - 3y + z = 5$.

30 Ache a menor distância entre os planos paralelos $2x + 3y - z = 2$ e $2x + 3y - z = 4$.

31 Ache os pontos do gráfico de $xy^3z^2 = 16$ mais próximos da origem.

32 Ache três números reais positivos cuja soma seja 1.000 e cujo produto seja máximo.

33 Se uma caixa retangular aberta deve ter um volume fixo V, que dimensões relativas minimizarão a área da superfície?

34 Se uma caixa retangular aberta deve ter uma área de superfície fixa A, que dimensões relativas maximizarão o volume?

35 Ache as dimensões da caixa retangular de volume máximo, com faces paralelas aos planos coordenados, que possa ser inscrita no elipsóide

$$16x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 144$$

36 Generalize o Exercício 35 para um elipsóide arbitrário

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{c^2} = 1$$

37 Ache as dimensões da caixa retangular de volume máximo que tenha três de suas faces nos planos coordenados, um vértice na origem, e outro vértice no primeiro octante sobre o plano $4x + 3y + z = 12$.

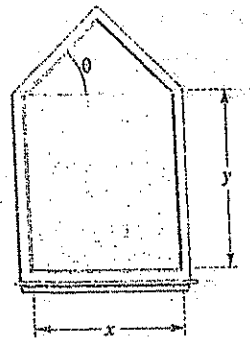
38 Generalize o Exercício 37 para um plano arbitrário

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

em que a, b e c são números reais positivos.

39 Uma companhia planeja fabricar caixas retangulares de 8 m³ de volume. Determine as dimensões que minimizem o custo, se o material para a tampa e o fundo custa o dobro do material para os lados.

40 Uma janela tem a forma de um retângulo com um triângulo isósceles sobreposto, conforme a figura. Se o perímetro da janela é de 4 m, que valores de x, y e θ maximizarão a área total?



41 O serviço postal de um país não aceita caixas retangulares cujo comprimento e perímetro da seção transversa perpendicular ao comprimento somem mais de 108 centímetros. Ache as dimensões da caixa de volume máximo que pode ser despachada pelo correio.

42 Ache um vetor em três dimensões, de módulo 8, cujos componentes tenham soma máxima.

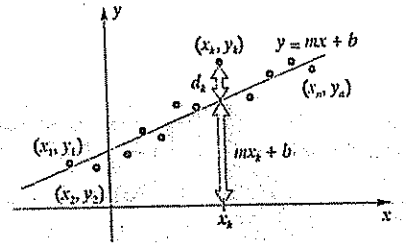
Exercs. 43-44: Ref. Exemplo 7.

43 Três componentes elétricos de um computador estão localizados em $P_1(0, 0)$, $P_2(4, 0)$ e $P_3(0, 4)$. Determine a posição de um quarto componente de modo que a demora do sinal seja mínima.

44 Mostre que se o triângulo $P_1P_2P_3$ contém um ângulo não inferior a 120°, então P não pode ser posicionado como na Figura 16.76.

45 Em experimentos científicos, costumam-se tabular como segue valores de duas quantidades x e y.

valores de x	x_1	x_2	...	x_n
valores de y	y_1	y_2	...	y_n



Grafados os pontos (x_k, y_k), o pesquisador pode ser levado a conjecturar que x e y estejam relacionados *linearmente*, isto é, que $y = mx + b$ para m e b arbitrários. Convém então achar uma reta l que melhor se ajuste ao grupo de dados, conforme se vê na figura. Os estatísticos chamam l uma *reta de regressão linear*.

Uma das técnicas para determinar l é o *método dos mínimos quadrados*. Para aplicar este método, considere, para cada k, o *desvio vertical* $d_k = y_k - (mx_k + b)$ do ponto (x_k, y_k) à reta $y = mx + b$ (ver figura). Determinam-se então os valores de m e b que minimizem a soma dos quadrados $\sum_{k=1}^{n} d_k^2$ (tomam-se os quadrados d_k^2 porque alguns dos d_k podem ser negativos). Substituindo os d_k obtém-se a seguinte função f de m e b:

$$f(m, b) = \sum_{k=1}^{n} (y_k - mx_k - b)^2$$

Mostre que a reta $y = mx + b$ de melhor ajuste é dada por

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) m + nb = \sum_{k=1}^{n} y_k$$

e

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) m + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) b = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

Pode-se, assim, achar a reta resolvendo este sistema de duas equações com duas incógnitas m e b.

46 Dadas as equações do Exercício 45, mostre que a soma $\sum_{k=1}^{n} d_k$ dos desvios é 0. (Isto significa que os desvios positivos e negativos se anulam mutuamente, o que constitui uma das razões para utilizarmos $\sum_{k=1}^{n} d_k^2$ no método dos mínimos quadrados.)

Exercs. 47-48: Use o método dos mínimos quadrados (ver Exercício 45) para determinar uma reta $y = mx + b$ que melhor se ajuste aos dados.

47

valores de x	1	4	7
valores de y	3	5	6

48

valores de x	1	4	6	8
valores de y	1	3	2	4

49 A tabela a seguir relaciona as médias semestrais e as notas do exame final de dez alunos de um turma de matemática.

Média semestral	40	55	62	68
Exame final	30	45	65	72

72	76	80	86	90	94
60	82	76	92	88	98

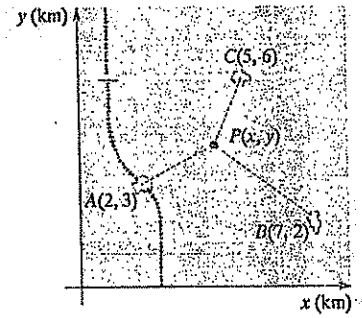
Ajuste uma reta a estes dados e use-a para estimar a nota do exame final de um estudante cuja média semestral seja 70.

50 Ao estudar o diagrama fadiga-tensão de um material elástico, um engenheiro verifica que parte da curva parece ser linear. A tabela a seguir dá os valores experimentais.

Fadiga (kg)	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0
Tensão (cm)	0,25	0,75	1,00	1,50	1,75	2,25

Ajuste uma reta a estes dados e estime a tensão quando a fadiga é de 1,14 kg.

51 A figura exibe a posição relativa de três cidades A, B e C. Urbanistas pretendem aplicar o método dos mínimos quadrados para decidir onde construir uma nova escola que atenda às três comunidades. A escola será construída em um ponto $P(x, y, z)$ tal que a soma dos quadrados das distâncias das cidades A, B e C à escola seja mínima. Determine a posição relativa do local de construção.



52 Generalize o Exercício 51 para o caso de n cidades em posições $Q_1(x_1, y_1)$, $Q_2(x_2, y_2)$, ..., $Q_n(x_n, y_n)$.

53 O Exercício 45 pode ser generalizado para resolver o problema de determinação do plano $z = ax + by + c$ que melhor se ajuste aos dados (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), ..., (x_n, y_n, z_n). O método dos mínimos quadrados procura determinar valores a, b e c tais que

$$f(a, b, c) = \sum_{k=1}^{n} (z_k - ax_k - by_k - c)^2$$

seja mínimo.

(a) Estabeleça um sistema de três equações nas três incógnitas a, b e c.

(b) Ache o plano de melhor ajuste que passa por (0, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) e (1, 1, 2).

(*Sugestão:* Resolva o sistema de três equações $f_a = 0, f_b = 0, f_c = 0$.)

54 Três genes A, B e O determinam os quatro tipos sangüíneos humanos: A(AA ou AO), B(BB ou BO), O(OO) e AB. A *lei de Hardy-Weinberg* afirma que a proporção de indivíduos de uma população que são portadores de dois genes diferentes é dada pela fórmula

$$P = 2pq + 2pr + 2rq,$$

em que p, q e r são as proporções de genes A, B e O, respectivamente, na população. Mostre que P não deve exceder $\frac{2}{3}$. (*Sugestão:* $p \geq 0, q \geq 0, r \geq 0$ e $p + q + r = 1$.)

Exercs. 55-56: Estime os pontos críticos de f em $R = \{(x, y): |x| \leq 1{,}5 \text{ e } |y| \leq 1{,}5\}$ grafando $f_x(x, y) = 0$ e $f_y(x, y) = 0$ no mesmo plano coordenado.

55 $f(x, y) = x^3 \operatorname{sen} x - xy + 4y^2 + y$

56 $f(x, y) = xy - \operatorname{arctg} x - y^{5/4}$

16.9 MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Em muitas aplicações devemos achar os extremos de uma função f de várias múltiplas variáveis, quando estas estão sujeitas a algum vínculo. Vamos supor, por exemplo, que queiramos achar o volume da maior caixa retangular de faces paralelas aos planos coordenados, que possa ser inscrita no elipsóide $16x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 144$. Note que, por simetria, basta examinar a parte no primeiro octante ilustrada na Figura 16.77. Se $P(x, y, z)$ é o vértice exibido na figura, então o volume V de toda a caixa é $V = 8xyz$. Devemos achar o valor máximo de V sujeito ao **vínculo (ou condição lateral)**

$$16x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 144 = 0$$

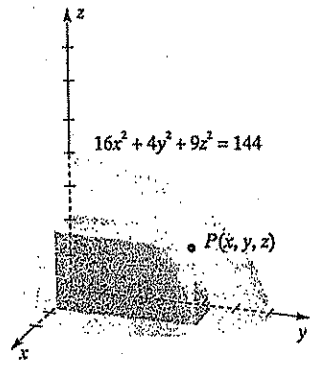


Figura 16.77

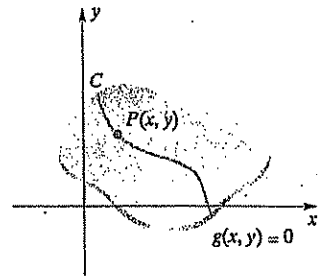


Figura 16.78

Resolvendo esta equação em relação a z e levando à fórmula de V, obtemos

$$V = (8xy)\,\tfrac{1}{3}\sqrt{144 - 16x^2 - 4y^2}$$

Podemos agora achar os extremos aplicando (16.40); todavia, este método é trabalhoso em razão dos cálculos envolvidos na determinação das derivadas parciais e dos pontos críticos. Outra desvantagem desta técnica é que, para problemas análogos, nem sempre é possível resolver em relação a z. Por estas razões, é mais simples utilizar o método dos *multiplicadores de Lagrange*, estudado nesta seção.*

*Este método foi descoberto por Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), matemático francês.

Outra ilustração: Seja $f(x, y)$ a temperatura no ponto $P(x, y)$ da chapa plana de metal da Figura 16.78, e seja C a curva de equação $g(x, y) = 0$. Vamos supor que queiramos achar os pontos de C em que a temperatura atinge seu maior ou seu menor valor. Isto equivale a achar os extremos de $f(x, y)$ *sujeitos ao vínculo* $g(x, y) = 0$. Nossa técnica consiste em utilizar o resultado seguinte.

Teorema de Lagrange (16.42)

Sejam f e g funções de duas variáveis dotadas de derivadas parciais primeiras contínuas, e suponhamos $\nabla g \neq 0$ em toda uma região do plano-xy. Se f tem um extremo $f(x_0, y_0)$ sujeito ao vínculo $g(x, y) = 0$, então existe um número real λ tal que

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$$

DEMONSTRAÇÃO

O gráfico de $g(x, y) = 0$ é uma curva C no plano-xy. Pode-se mostrar que, sob as condições dadas, C admite uma parametrização suave

$$x = h(t), y = k(t)$$

para t em um intervalo I. Seja

$$\mathbf{r}(t) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = h(t)\mathbf{i} + k(t)\mathbf{j}$$

o vetor posição do ponto $P(x, y)$ em C (ver Figura (16.79)) e suponhamos que o ponto $P_0(x_0, y_0)$ em que f tem um extremo corresponda a $t = t_0$, isto é,

$$\mathbf{r}(t_0) = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} = h(t_0)\mathbf{i} + k(t_0)\mathbf{j}$$

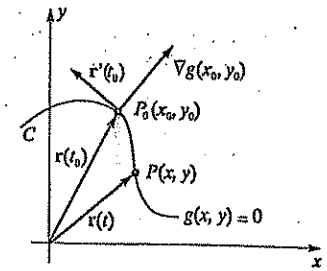


Figura 16.79

Definindo uma função F de uma variável t por

$$F(t) = f(h(t), k(t))$$

então, quando t varia, obtemos valores funcionais $f(x, y)$ que correspondem a (x, y) em C, isto é, $f(x, y)$ está sujeita ao vínculo $g(x, y) = 0$. Como $f(x_0, y_0)$ é um extremo de f sob essas condições, segue-se que $F(t_0) = f(h(t_0), k(t_0))$ é um extremo de $F(t)$. Assim, $F'(t_0) = 0$. Se encararmos F como uma função composta, então, pela regra da cadeia,

$$F'(t) = f_x(x, y)\frac{dx}{dt} + f_y(x, y)\frac{dy}{dt}$$

$$= f_x(x, y)\,h'(t) + f_y(x, y)\,k'(t)$$

Fazendo $t = t_0$, temos

$$0 = F'(t_0) = f_x(x_0, y_0)h'(t_0) + f_y(x_0, y_0)k'(t_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0).$$

Isto mostra que o vetor $\nabla f(x_0, y_0)$ é ortogonal ao vetor $\mathbf{r}'(t_0)$ tangente a C (ver Teorema (16.37)). Entretanto, $\nabla g(x_0, y_0)$ é também ortogonal a $\mathbf{r}'(t_0)$, porque C é uma curva de nível para g. Como $\nabla f(x_0, y_0)$ e $\nabla g(x_0, y_0)$ são ortogonais ao mesmo vetor, são paralelos, isto é, $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$ para algum λ.

O número λ no teorema precedente é chamado **multiplicador de Lagrange.**

A equação $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$ no Teorema (16.42) pode escrever-se

$$f_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0)\mathbf{j} = \lambda g_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + \lambda g_y(x_0, y_0)\mathbf{j}$$

Igualando as componentes $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ e considerando o vínculo $g(x, y) = 0$ somos levados ao seguinte enunciado não-vetorial do teorema de Lagrange, em que se supõe que f e g tenham derivadas parciais primeiras contínuas e $g_x^2 + g_y^2 \neq 0$, isto é, g_x e g_y não são simultaneamente nulas.

Corolário (16.43)

Os pontos em que uma função f de duas variáveis tem extremos relativos sujeitos ao vínculo $g(x, y) = 0$ estão incluídos entre os pontos (x, y), determinados pelas duas primeiras coordenadas das soluções (x, y, λ) do sistema de equações

$$\begin{cases} f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y) \\ f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Ao utilizar o Corolário (16.43), primeiro achamos todas as soluções

$$(x_1, y_1, \lambda_1), (x_2, y_2, \lambda_2), (x_3, y_3, \lambda_3), \ldots$$

do sistema indicado de equações. (Às vezes há apenas *uma* solução.) Os pontos em que ocorrem os extremos relativos de f estão entre

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots$$

Assim, os multiplicadores de Lagrange $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ são descartados após achadas as soluções (x_k, y_k, λ_k). Cada ponto (x_k, y_k) é então estudado para determinar se $f(x_k, y_k)$ é máximo relativo, mínimo relativo ou nenhum dos dois. Há um teste complicado (provado em matemática avançada) para distinguir entre máximos e mínimos; entretanto, em geral é mais fácil utilizar considerações gráficas ou físicas para fazer a distinção. Na resolução de problemas não é costume dar provas rigorosas de que os resultados conduzam a extremos.

EXEMPLO 1

Ache os extremos de $f(x, y) = xy$, se (x, y) está restrito à elipse $4x^2 + y^2 = 4$.

SOLUÇÃO

Neste exemplo o vínculo é $g(x, y) = 4x^2 + y^2 - 4 = 0$.

Fazendo $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$ (ver (16.42)), obtemos

$$y\mathbf{i} + x\mathbf{j} = \lambda(8x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j})$$

Assim, o sistema de equações no Corolário (16.43) é

$$\begin{cases} y = 8x\lambda \\ x = 2y\lambda \\ 4x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

Há muitas maneiras de achar as soluções deste sistema. Uma delas consiste em fazer $y = 8x\lambda$ em $x = 2y\lambda$, vindo

$$x = 2(8x\lambda)\lambda = 16x\lambda^2$$

Equação equivalente é

$$x - 16x\lambda^2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad x(1 - 16\lambda^2) = 0$$

Portanto, ou $x = 0$ ou $\lambda = \pm\frac{1}{4}$.

Se $\lambda = \pm\frac{1}{4}$, então

$$y = 8x\lambda = 8x(\pm\tfrac{1}{4}) \quad \text{ou} \quad y = \pm 2x$$

Levando este valor de y na equação $4x^2 + y^2 - 4 = 0$, obtemos

$$4x^2 + (\pm 2x)^2 - 4 = 0,\ 8x^2 = 4 \text{ ou } x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Os valores correspondentes de y são

$$y = \pm 2x = \pm 2\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pm\sqrt{2}$$

Desprezando os multiplicadores de Lagrange, obtemos os quatro pontos $(\sqrt{2}/2, \pm\sqrt{2})$ e $(-\sqrt{2}/2, \pm\sqrt{2})$.

Se $x = 0$, então, levando na equação $4x^2 + y^2 - 4 = 0$, obtemos $y^2 - 4 = 0$ ou $y = \pm 2$. Assim, os pontos $(0, \pm 2)$ também podem determinar extremos de f.

A tabela abaixo relaciona o valor de f em cada um dos pontos encontrados:

(x, y)	$(0, 2)$	$(0, -2)$	$(\sqrt{2}/2, \sqrt{2})$	$(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2})$
$f(x, y)$	0	0	1	-1	-1	1

Assim, $f(x, y)$ toma o valor máximo 1 em $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2})$ ou $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2})$ e o mínimo -1 em $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2})$ ou $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2})$. Tudo isto está ilustrado na elipse da Figura 16.80.

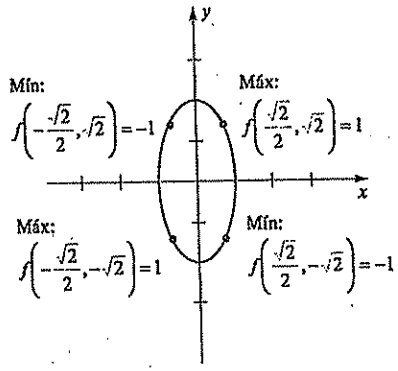


Figura 16.80

O teorema de Lagrange pode ser estendido a funções de mais de duas variáveis. O próximo resultado é uma dessas extensões. Podemos enunciar teoremas análogos para funções de um número qualquer de variáveis.

Extensão do teorema de Lagrange (16.44)

Sejam f e g funções de três variáveis dotadas de derivadas parciais primeiras contínuas, e suponhamos $\nabla g \neq 0$ em toda uma região do sistema coordenado xyz. Se f tem um extremo $f(x_0, y_0, z_0)$ sujeito ao vínculo $g(x, y, z) = 0$, então existe um número real λ tal que

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0)$$

Segue-se um análogo do Corolário (16.43).

Corolário (16.45)

Os pontos em que uma função f de três variáveis tem extremos relativos sujeitos ao vínculo $g(x, y, z) = 0$ estão incluídos entre os pontos (x, y, z) determinados pelas três primeiras coordenadas das soluções (x, y, z, λ) do sistema de equações

$$\begin{cases} f_x(x, y, z) = \lambda g_x(x, y, z) \\ f_y(x, y, z) = \lambda g_y(x, y, z) \\ f_z(x, y, z) = \lambda g_z(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

O próximo exemplo já foi rapidamente abordado no início desta seção.

EXEMPLO 2

Ache o volume da maior caixa retangular de lados paralelos aos planos coordenados, que possa ser inscrita no elipsóide $16x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 144$.

SOLUÇÃO

A Figura 16.77 ilustra uma posição típica da caixa. Queremos maximizar o volume

$$V = f(x, y, z) = 8xyz$$

sujeito ao vínculo

$$g(x, y, z) = 16x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 144 = 0$$

Fazendo $\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$ (ver (16.44)), obtemos

$$8yz\mathbf{i} + 8xz\mathbf{j} + 8xy\mathbf{k} = \lambda(32x\mathbf{i} + 8y\mathbf{j} + 18z\mathbf{k})$$

Esta equação, juntamente com o vínculo $g(x, y, z) = 0$, dá o seguinte sistema de quatro equações (ver Corolário (16.45)):

$$\begin{cases} 8yz = 32x\lambda \\ 8xz = 8y\lambda \\ 8xy = 18z\lambda \\ 16x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 144 = 0 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por x, a segunda por y e a terceira por z e somando, temos

$$24xyz = 32x^2\lambda + 8y^2\lambda + 18z^2\lambda = 2\lambda(16x^2 + 4y^2 + 9z^2)$$

Este resultado, juntamente com o vínculo $16x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 144$, implica que

$$24xyz = 2\lambda(144) \qquad \text{ou} \qquad xyz = 12\lambda$$

A última equação pode ser usada para achar x, y e z. Por exemplo, multiplicando ambos os membros da equação $8yz = 32x\lambda$ por x e levando em conta que $xyz = 12\lambda$, obtemos

$$8xyz = 32x^2\lambda$$

$$8(12\lambda) = 32x^2\lambda$$

$$96\lambda - 32x^2\lambda = 0$$

$$32\lambda(3 - x^2) = 0$$

Conseqüentemente, $\lambda = 0$ ou $x = \sqrt{3}$. Podemos desprezar $\lambda = 0$, pois isto conduziria a $xyz = 0$ e, então, a $V = 8xyz = 0$. Assim, a única possibilidade é $x = \sqrt{3}$.

Analogamente, multiplicando por y ambos os membros da equação $8xz = 8y\lambda$ temos

$$8xyz = 8y^2\lambda$$
$$8(12\lambda) = 8y^2\lambda$$
$$96\lambda - 8y^2\lambda = 0$$
$$8\lambda(12 - y^2) = 0$$

e, assim, $y = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Finalmente, multiplicando por z a equação $8xy = 18z\lambda$ e usando a mesma técnica, obtemos $z = 4\sqrt{3}$. Segue-se que o volume procurado é

$$V = 8xyz = 8(\sqrt{3})(2\sqrt{3})(4\sqrt{3}) = 64\sqrt{3} \approx 111$$

EXEMPLO 3

Se $f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + 5z^2$, ache o ponto do plano $2x + 3y + 4z = 12$ em que $f(x, y, z)$ tem seu menor valor.

SOLUÇÃO

Examinaremos $f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + 5z^2$ sujeita ao vínculo $g(x, y, z) = 2x + 3y + 4z - 12 = 0$. Tal como no Exemplo 2, consideramos $\nabla f(x, y, z) = \lambda g(x, y, z)$, isto é,

$$\nabla(4x^2 + y^2 + 5z^2) = \lambda\nabla(2x + 3y + 4z - 12)$$

obtendo

$$8x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 10z\mathbf{k} = \lambda(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k})$$

Igualando componentes e utilizando $g(x, y, z) = 0$, chegamos ao seguinte sistema de equações (ver Corolário (16.45)):

$$\begin{cases} 8x = 2\lambda \\ 2y = 3\lambda \\ 10z = 4\lambda \\ 2x + 3y + 4z - 12 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo as três primeiras equações em relação a λ obtemos

$$\lambda = 4x = \tfrac{2}{3}y = \tfrac{5}{2}z$$

Estas condições implicam

$$y = 6x \quad \text{e} \quad z = \tfrac{8}{5}x$$

Levando à equação de vínculo $2x + 3y + 4z - 12 = 0$, obtemos

$$2x + 18x + \tfrac{32}{5}x - 12 = 0$$

ou $x = \frac{5}{11}$. Logo, $y = 6(\frac{5}{11}) = \frac{30}{11}$ e $z = (\frac{8}{5})(\frac{5}{11}) = \frac{8}{11}$. Como há apenas um ponto crítico, segue-se que o mínimo ocorre nesse ponto, $(\frac{5}{11}, \frac{30}{11}, \frac{8}{11})$.

Algumas aplicações podem envolver mais de um vínculo. Em particular, consideremos o problema de achar os extremos de $f(x, y, z)$ sujeitos aos *dois* vínculos

$$g(x, y, z) = 0 \quad \text{e} \quad h(x, y, z) = 0$$

Se f tem um extremo sujeito a esses vínculos, então a condição seguinte deve ser satisfeita para números reais λ e μ:

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda\nabla g(x, y, z) + \mu\nabla h(x, y, z)$$

Igualando componentes e levando em consideração os vínculos, obtemos um sistema de cinco equações com cinco incógnitas x, y, z, λ e μ. O próximo exemplo é uma ilustração desta situação.

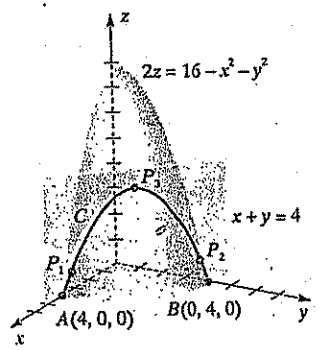


Figura 16.81

Este método pode também ser estendido a funções de mais de três variáveis e a mais de dois vínculos.

EXEMPLO 4

Denotemos por C o arco, no primeiro octante, da curva em que o paraboloide $2z = 16 - x^2 - y^2$ e o plano $x + y = 4$ se interceptam. Ache os pontos de C mais próximos e mais afastados da origem. Ache as distâncias mínima e máxima da origem a C.

SOLUÇÃO

A Figura 16.81 é um esboço da curva C. Se $P(x, y, z)$ é um ponto arbitrário de C, então queremos determinar o maior e o menor valor de $d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Podemos obter esses valores determinando os temos (x, y, z) que dão os extremos do radicando

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

sujeito aos dois vínculos

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z - 16 = 0$$

$$h(x, y, z) = x + y - 4 = 0$$

Conforme discussão que precede este exemplo, consideremos

$$\nabla(x^2 + y^2 + z^2) = \lambda\nabla(x^2 + y^2 + 2z - 16) + \mu\nabla(x + y - 4)$$

Assim,

$$2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} = \lambda(2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) + \mu(\mathbf{i} + \mathbf{j})$$

$$= (2x\lambda + \mu)\mathbf{i} + (2y\lambda + \mu)\mathbf{j} + (2\lambda)\mathbf{k}$$

Igualando componentes e considerando os dois vínculos, chegamos ao seguinte sistema de cinco equações

$$\begin{cases} 2x = 2x\lambda + \mu \\ 2y = 2y\lambda + \mu \\ 2z = 2\lambda \\ x^2 + y^2 + 2z - 16 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, obtemos as equações equivalentes

$$2x - 2y = (2x\lambda + \mu) - (2y\lambda + \mu) = 2x\lambda - 2y\lambda$$
$$2(x - y) - 2\lambda(x - y) = 0$$
$$2(x - y)(1 - \lambda) = 0$$

Conseqüentemente, ou $\lambda = 1$ ou $x = y$.

Se $\lambda = 1$, temos $2z = 2\lambda = 2(1)$ ou $z = 1$. O primeiro vínculo, ou seja, $x^2 + y^2 + 2z - 16 = 0$, então dá $x^2 + y^2 - 14 = 0$. Resolvendo esta equação simultaneamente com $x + y - 4 = 0$, temos que

$$x = 2 + \sqrt{3}, y = 2 - \sqrt{3} \quad \text{ou} \quad x = 2 - \sqrt{3}, y = 2 + \sqrt{3}$$

Assim, os pontos de C que podem originar extremos são

$$P_1(2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}, 1) \text{ e } P_2(2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}, 1)$$

As distâncias de O correspondentes são

$$d(O, P_1) = \sqrt{15} = d(O, P_2)$$

Se $x = y$, então, pelo vínculo $x + y - 4 = 0$, obtemos as equações equivalentes $x + x - 4 = 0$, $2x = 4$, ou $x = 2$, o que dá $P_3(2, 2, 4)$ e $d(O, P_3) = 2\sqrt{6}$.

Referindo-nos à Figura 16.81, podemos agora fazer as seguintes observações. Quando um ponto se move continuamente ao longo de C de $A(4, 0, 0)$ até $B(0, 4, 0)$, sua distância à origem começa em $d(O, A) = 4$, decresce até o mínimo de $\sqrt{15}$ em P_1 e cresce até o máximo de $2\sqrt{6}$ em P_3. A distância passa então a diminuir até $\sqrt{15}$ em P_2 e cresce novamente até 4 em B.

Como verificação da solução, note que as equações paramétricas de C são

$$x = 4 - t, y = t, z = 4t - t^2; 0 \le t \le 4$$

Neste caso

$$f(x, y, z) = (4 - t)^2 + t^2 + (4t - t^2)^2,$$

e é possível achar os extremos de f utilizando métodos de uma variável. Obtêm-se os mesmos pontos. (Verifique!)

EXERCÍCIOS 16.9

Exercs. 1-10: Use os multiplicadores de Lagrange para achar os extremos de f sujeitos aos vínculos indicados.

1 $f(x, y) = y^2 - 4xy + 4x^2$; $x^2 + y^2 = 1$

2 $f(x, y) = 2x^2 + xy - y^2 + y$; $2x + 3y = 1$

3 $f(x, y, z) = x + y + z$; $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

4 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; $x + y + z = 25$

5 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; $x - y + z = 1$

6 $f(x, y, z) = x + 2y - 3z$; $z = 4x^2 + y^2$

7 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; $x - y = 1$, $y^2 - z^2 = 1$

8 $f(x, y, z) = z - x^2 - y^2$; $x + y + z = 1$, $x^2 + y^2 = 4$

9 $f(x, y, z, t) = xyzt$; $x - z = 2$, $y^2 + t = 4$

10 $f(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$; $3x + 4y = 5$, $z + t = 2$

11 Ache o ponto da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ mais próximo do ponto $(2, 3, 4)$.

12 Ache o ponto da intersecção dos planos $x + 3y - 2z = 11$ e $2x - y + z = 3$ mais próximo da origem.

13 Deve-se construir uma caixa retangular fechada de $2\ m^3$ de volume. Se o custo por metro quadrado do material para os lados, o fundo e a tampa é \$ 200,00, \$ 400,00 e \$ 300,00, respectivamente, ache as dimensões que minimizam o custo.

14 Prove que o paralelepípedo de volume dado e área de superfície mínima é o cubo.

15 Ache o volume da maior caixa retangular que tem três de seus vértices sobre os eixos x, y e z positivos, e um quarto vértice no plano $2x + 3y + 4z = 12$.

16 Ache as dimensões da caixa retangular de volume máximo, que tem três de suas faces nos planos coordenados, um vértice na origem e outro vértice no primeiro octante no plano $2x + 3y + 5z = 90$.

17 Deve-se construir um depósito com tampa, em forma de cilindro circular reto e com área de superfície fixa. Ache as dimensões que maximizem o volume.

18 Ache as dimensões da caixa retangular de volume máximo, faces paralelas aos planos coordenados, que pode ser inscrita no elipsóide $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 36$.

19 Prove que o triângulo de área máxima e perímetro dado p é eqüilátero. (*Sugestão:* Se os lados são x, y e z, e se $s = \frac{1}{2}p$, então a área A é dada pela fórmula de Heron, $A = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$.)

20 Prove que o produto dos senos dos ângulos de um triângulo é máximo quando o triângulo é eqüilátero.

21 A resistência de uma viga retangular varia como o produto de sua largura pelo quadrado de sua profundidade. Ache as dimensões da viga de maior resistência que pode ser cortada de um toro cilíndrico cujas secções transversas são elípticas, com eixos maior e menor de 24 cm e 16 cm, respectivamente.

22 Se x unidades de capital e y unidades de trabalho são necessárias para fabricar $f(x, y)$ unidades de certo artigo, a *função de produção de Cobb-Douglas* é definida por $f(x, y) = kx^a y^b$, em que k é uma constante e a e b são números positivos tais que $a + b = 1$. Suponha que $f(x, y) = x^{1/5}y^{4/5}$ e que cada unidade de capital custe C cruzeiros e cada unidade de trabalho custe L cruzeiros. Se o total disponível para esses custos é M cruzeiros, de modo que $xC + yL = M$, quantas unidades de capital e unidades de trabalho maximizarão a produção?

Exercs. 23-24: Use os multiplicadores de Lagrange e gráficos para estimar os extremos de $f(x, y)$ sujeitos ao vínculo $g(x, y) = 0$.

23 $f(x, y) = y - \cos x + 2x$; $g(x, y) = x^2 + 2y^2 - 1$

24 $f(x, y) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}y^3$; $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

16.10 EXERCÍCIOS DE REVISÃO

Exercs. 1-4: Descreva o domínio de f e a curva ou superfície de nível por P.

1 $f(x, y) = \sqrt{36 - 4x^2 + 9y^2}$; $P(3, 4)$

2 $f(x, y) = \ln xy$; $P(2, 3)$

3 $f(x, y, z) = (z^2 - x^2 - y^2)^{-3/2}$; $P(0, 0, 1)$

4 $f(x, y, z) = \dfrac{\sec z}{x - y}$; $P(5, 3, 0)$

Exercs. 5-8: Ache o limite ou mostre que ele não existe.

5 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3xy + 5}{y^2 + 4}$

6 $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{z^2 + z - 2}{xyz + 2xy}$

7 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)^2$

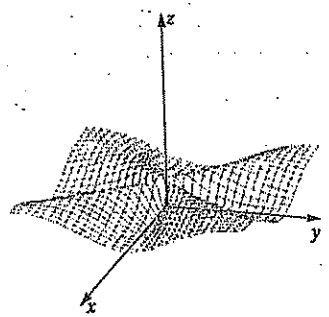
8 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^4 + 2y^4}$

9 Use coordenadas polares para descrever as curvas de nível de

$$f(x, y) = \frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

e investigue $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$.

10 O gráfico de $f(x, y) = x^2y^2/(x^2 + y^2)^2$ exibido na figura indica que f tem derivadas parciais primeiras em $(0, 0)$ mas não é contínua ali. Verifique.



Exercs. 11-16: Ache as derivadas parciais primeiras de f.

11 $f(x, y) = x^3 \cos y - y^2 + 4x$

12 $f(r, s) = r^2e^{rs}$

13 $f(x, y, z) = \dfrac{x^2 + y^2}{y^2 + z^2}$

14 $f(u, v, t) = u \ln \dfrac{v}{t}$

15 $f(x, y, z, t) = x^2z\sqrt{2y + t}$

16 $f(v, w) = v^2 \cos w + w^2 \cos v$

Exercs. 17-18: Ache as derivadas parciais segundas de f.

17 $f(x, y) = x^3y^2 - 3xy^3 + x^4 - 3y + 2$

18 $f(x, y, z) = x^2e^{y^2 - z^2}$

19 Se $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$, prove que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

20 Ache dw se

(a) $w = y^3 \operatorname{arctg} x^2 + 2x - y$ (b) $w = x^2 \operatorname{sen} yz$

21 (a) Ache Δw e dw se $w = x^2 + 3xy - y^2$.

(b) Se (x, y) varia de $(-1, 2)$ a $(-1{,}1; 2{,}1)$, use Δw para achar a variação exata de w, e use dw para achar a variação aproximada de w.

22 Suponha que, ao aplicar a lei de Ohm, haja erros percentuais de $\pm 3\%$ e $\pm 2\%$ nas medidas de V e I, respectivamente. Por meio de diferenciais, estime o erro percentual máximo no valor calculado de R.

Exercs. 23-24: Prove que f é diferenciável em todo o domínio.

23 $f(x, y) = \dfrac{xy}{y^2 - x^2}$

24 $f(x, y, z) = \dfrac{xyz}{x - y}$

Exercs. 25-27: Use a regra da cadeia.

25 Ache $\partial s/\partial x$ e $\partial s/\partial y$ se $s = uv + vw - uw$, $u = 2x + 3y$, $v = 4x - y$ e $w = -x + 2y$.

26 Ache $\partial z/\partial r$, $\partial z/\partial s$ e $\partial z/\partial t$ se $z = ye^x$, $x = r + st$, e $y = 2r + 3s - t$.

27 Ache dw/dt se $w = x \operatorname{sen} yz$, $x = 3e^{-t}$, $y = t^2$ e $z = 3t$.

28 Por meio de derivadas parciais, ache dy/dx se $y = f(x)$ é definida implicitamente por

$$x^3 - 4xy^3 - 3y + x - 2 = 0$$

29 Ache $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$ se $z = f(x, y)$ é definida implicitamente por

$$x^2y + z\cos y - xz^3 = 0$$

30 (a) Ache a derivada direcional da função $f(x, y) = 3x^2 - y^2 + 5xy$ em $P(2, -1)$ na direção de $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$.

(b) Ache a taxa máxima de crescimento de $f(x, y)$ em P.

31 Suponha que a temperatura no ponto (x, y, z) seja dada por $T(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 - 4z$.

(a) Ache a taxa instantânea de variação de T no ponto $P(-1, -3, 2)$ na direção de P para o ponto $Q(-4, 1, -2)$.

(b) Ache a taxa máxima de variação de T em P.

32 Um *modelo de densidade urbana* é uma fórmula que relaciona a densidade populacional (número de pessoas por quilômetro quadrado) e a distância do centro da cidade. Suponha introduzido um sistema retangular de coordenadas com o centro da cidade na origem, e seja $Q(x, y)$ a densidade populacional nas proximidades de ponto $P(x, y)$. Decida a direção em que a densidade populacional cresce mais rapidamente em $P(x, y)$ para a função de densidade Q dada, em que a, b e c são constantes positivas.

(a) $Q(x, y) = ae^{-b\sqrt{x^2 + y^2}}$

(b) $Q(x, y) = ae^{-b\sqrt{x^2 + y^2}} + c(x^2 + y^2)$

33 Escreva as equações do plano tangente e da normal a $7z = 4x^2 - 2y^2$ em $P(-2, -1, 2)$.

34 Uma curva C tem parametrização $x = t$, $y = t$ e $z = t^3$; t em $\mathbb{R}$. Se $f(x, y, z) = y^2 + xz$ e $\mathbf{u}$ é um vetor unitário tangente a C em $P(2, 4, 8)$, ache $D_{\mathbf{u}} f(2, 4, 8)$.

35 Mostre que todo plano tangente ao cone

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

passa pela origem.

36 Se $f(x, y) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{25}y^2$, trace a curva de nível de f que contém $P(0, 5)$; esboce $\nabla f]_P$.

37 Se $F(x, y, z) = z + 4x^2 + 9y^2$, esboce a superfície de nível de F que contém $P(1, 0, 0)$ e $\nabla F]_P$.

Exercs. 38-39: Ache os extremos de f.

38 $f(x, y) = \dfrac{4}{x} + \dfrac{2}{y} - xy$

39 $f(x, y) = x^2 + 3y - y^3$

40 O material da base de um depósito retangular custa o dobro do preço do material para os lados e a tampa. Para um volume fixo, ache as dimensões relativas que minimizem o custo.

Exercs. 41-42: Use os multiplicadores de Lagrange para achar os extremos de f sujeitos aos vínculos indicados.

41 $f(x, y, z) = xyz$; $\quad x^2 + 4y^2 + 2z^2 = 8$

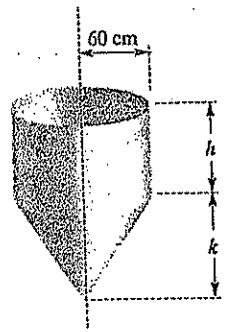
42 $f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + z^2$; $\quad 2x - y + z = 4, x + 2y - z = 1$

43 Ache o ponto do paraboloide

$$z = \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4}$$

mais próximo do ponto $(0, 5, 0)$.

44 A tremonha de um elevador de grãos tem a forma de um cone circular reto de 60 cm de raio com um cilindro circular reto superposto, conforme figura. Se o volume *total* é de 27 m^3, ache as alturas h e k do cilindro e do cone, respectivamente, que minimizem a área da superfície curva.



45 Um processador sob forma de conduto (*pipeline processor*) em um supercomputador é como uma linha de montagem destinada a executar um grande número de operações aritméticas similares em estágios. Uma vez cheio, o processador executará uma operação aritmética em cada período de relógio. Tais processadores têm em geral menos de 10 estágios. A *razão P desempenho-custo* para um desses processadores é dada por

$$P = \frac{s}{(T + sk_0)(C + sk_1)}$$

em que s é o número de estágios, T é o tempo necessário para efetuar a operação em um computador sem *pipeline*, C é o custo total da *pipeline* e k_0 e k_1 são constantes que dependem do equipamento (*hardware*) usado. Para o planejamento ótimo, $\partial P/\partial s = 0$.

Determine o número de estágios nesse planejamento ótimo.

46 Uma placa delgada de metal com a forma de uma lâmina quadrada com vértices em um plano coordenado nos pontos $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$ tem cada uma de suas bordas imersas em gelo a 0°C. A temperatura inicial T em $P(x, y)$ é dada por $T = 20 \operatorname{sen} \pi x \operatorname{sen} \pi y$.

(a) Ache o ponto em que a temperatura inicial é máxima.

(b) Se $U(x, y, t)$ é a temperatura em $P(x, y)$ no instante t, pode-se mostrar que U satisfaz a equação bidimensional do calor

$$\frac{\partial U}{\partial t} - k\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) = 0$$

em que k é uma constante que depende da condutividade térmica e do calor específico da placa. Mostre que

$$U(x, y, t) = 20e^{-2k\pi^2 t} \operatorname{sen} \pi x \operatorname{sen} \pi y$$

é uma solução desta equação do calor.

(c) Descreva a temperatura da placa em um longo período de tempo.

MAKRON Books

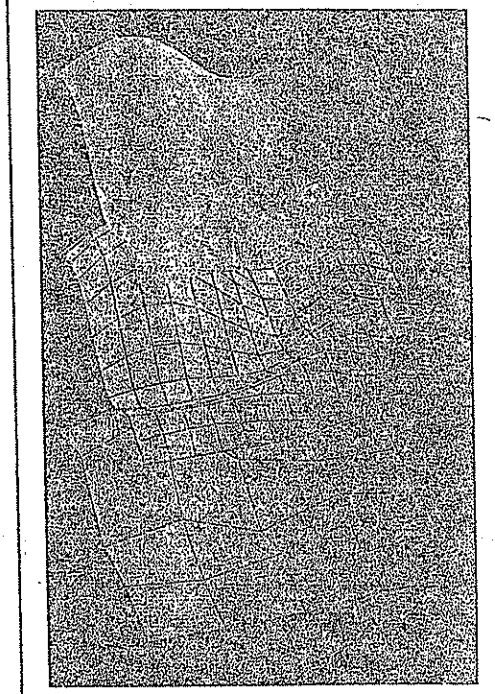
Capítulo 17

INTEGRAIS MÚLTIPLAS

INTRODUÇÃO

Definem-se as *integrais múltiplas* por meio de funções de diversas variáveis e limites de somas de modo análogo ao do caso da integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ no Capítulo 5.

A diferença principal reside no fato de que, em lugar de começarmos com uma partição do intervalo $[a, b]$, subdividimos uma região R do plano-xy ou um sistema coordenado xyz. Os teoremas de cálculo se baseiam em equações de curvas e superfícies que constituem a fronteira de R, sendo, pois, mais complicados que o teorema fundamental do cálculo para integrais definidas.



As integrais múltiplas permitem-nos considerar aplicações que envolvem sólidos e superfícies *não-homogêneos* mais gerais do que os obtidos pela revolução de uma região plana ou uma curva em torno de uma reta. Em particular, podemos agora achar momentos e centros de gravidade de sólidos de forma irregular em que a densidade não é constante – algo que até aqui não dispúnhamos de recursos para fazer.

Nas Seções 17.7 e 17.8 definimos sistemas de coordenadas cilíndricas e esféricas em três dimensões. Tais sistemas são úteis no estudo de propriedades de sólidos determinados por superfícies quádricas – especialmente cilindros, esferas e cones.

Encerramos o capítulo introduzindo o conceito de *jacobiano* e aplicando-o ao problema de mudança de variáveis nas integrais múltiplas.

17.1 INTEGRAIS DUPLAS

No Capítulo 5, definimos a integral definida $\int_a^b f(x)\ dx$ de uma função f de uma variável. Podemos também considerar integrais de funções de diversas variáveis, chamadas *integrais duplas, integrais triplices, integrais de superfície* e *integrais curvilíneas*. Cada integral é definida de maneira análoga. A principal diferença está no domínio do integrando.

Lembremos que $\int_a^b f(x)\ dx$ pode ser definida aplicando-se os quatro passos seguintes. (A Figura 17.1 ilustra os Passos 1 e 2.)

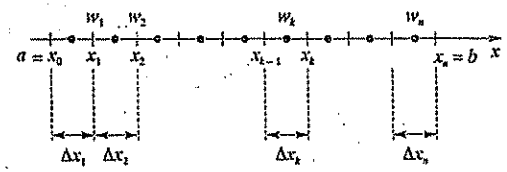


Figura 17.1

Passo 1 Particionar $[a, b]$ escolhendo $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$.

Passo 2 Para cada k, escolher um número wk no subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$.

Passo 3 Formar a soma de Riemann $\sum_k f(w_k)\ \Delta x_k$, com $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

Passo 4 Se $\|P\|$ é a norma da partição (o maior Δx_k), então

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_k f(w_k)\ \Delta x_k.$$

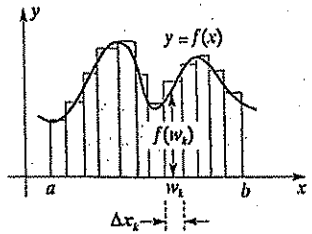


Figura 17.2

Se f é não-negativa em $[a, b]$, então a soma de Riemann do Passo 3 é uma soma de áreas de retângulos do tipo ilustrado na Figura 17.2. Esta soma tende para a área da região sob o gráfico de f de $x = a$ a $x = b$. Se existe o limite da soma de Riemann quando $\|P\| \to 0$ (Passo 4), obtemos a integral definida $\int_a^b f(x)\ dx$, cujo valor é a área (exata) sob o gráfico.

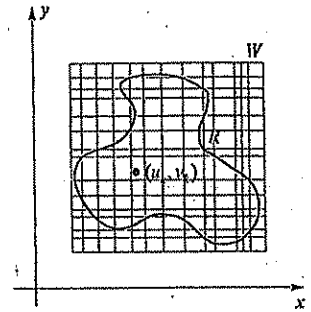


Figura 17.3 Partição interior de R.

Consideremos agora uma função f de *duas* variáveis tal que $f(x, y)$ exista em toda uma região R do plano-xy. Definiremos a integral dupla $\iint_R f(x, y)\ dA$ por meio de um processo de quatro passos análogo ao utilizado para $\int_a^b f(x)\ dx$. Em todo este capítulo, R denotará uma região que pode ser subdividida em um número finito de regiões R_x e R_y, tais como definidas na Seção 6.1. Toda região R desse tipo está contida em uma região retangular W. Se W é dividida em retângulos por meio de uma rede de retas horizontais e verticais, então a coleção de todas as sub-regiões fechadas retangulares que estão completamente *dentro* de R constituirão uma **partição interior** P de R. (Este particionamento corresponde ao Passo 1 do processo de quatro passos).

As regiões retangulares cinzas da Figura 17.3 ilustram uma partição interior de R. Rotulando-as $R_1, R_2, \ldots, R_n$, esta partição interior se denota por $\{R_k\}$. O comprimento da maior diagonal de todas as R_k é a **norma $\|P\|$ da partição**. O símbolo ΔA_k denota a área de R_k. Para cada k escolhemos um ponto arbitrário (u_k, v_k) em R_k, conforme Figura 17.3 (A escolha deste ponto corresponde ao Passo 2.) As somas de Riemann (Passo 3) são definidas a seguir.

Definição (17.1)

Seja f uma função de duas variáveis definida em uma região R, e seja $P = \{R_k\}$ uma partição interior de R. Uma **soma de Riemann** de f para P é qualquer soma da forma

$$\sum_k f(u_k, v_k)\ \Delta A_k$$

em que (u_k, v_k) é um ponto de R_k e ΔA_k é a área de R_k. A somatória se estende a todas as sub-regiões $R_1, R_2, \ldots, R_n$ de P.

Finalmente, consideremos um limite de somas de Riemann quando $\|P\| \to 0$ (Passo 4). Pode-se mostrar que, se f é contínua em R, as somas de Riemann da Definição (17.1) tendem para um número real L quando $\|P\| \to 0$, independentemente da escolha dos pontos (u_k, v_k) nas sub-regiões R_k. O número L é a **integral dupla** $\iint_R f(x, y)\ dA$. Segue-se uma definição matematicamente precisa de um limite de somas de Riemann.

Definição (17.2)

Seja f uma função de duas variáveis definida em uma região R, e seja L um número real. A afirmação

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_k f(u_k, v_k)\, \Delta A_k = L$$

significa que, para todo $\in > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que, se $P = \{R_k\}$ é uma partição interior de R com $\|P\| < \delta$, então

$$\left| \sum_k f(u_k, v_k)\, \Delta A_k - L \right| < \in$$

para toda escolha de (u_k, v_k) em R_k.

A Definição (17.2) afirma que *podemos tornar toda soma de Riemann tão próxima de L quanto quisermos, escolhendo uma partição interior com norma $\|P\|$ suficientemente pequena.*

Pode-se definir como a seguir a integral dupla de f.

Definição (17.3)

Seja f uma função de duas variáveis definida em uma região R. A **integral dupla de f sobre R**, denotada por $\iint_R f(x, y)\, dA$, é

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_k f(u_k, v_k)\, \Delta A_k$$

desde que o limite exista.

Se a integral dupla de f sobre R existe, então dizemos que f é **integrável sobre R**. Prova-se em textos mais avançados que, se f é contínua em R, então f é integrável sobre R.

Há uma interpretação geométrica útil das somas de Riemann e da integral dupla se f é contínua e $f(x, y) \geq 0$ em toda a R. Denotemos por S o gráfico de f e por Q o sólido situado abaixo de S e sobre R, conforme Figura 17.4. Se $P_k(u_k, v_k, 0)$ é um ponto na sub-região R_k de uma partição interior P de R, então $f(u_k, v_k)$ é a distância do plano-xy ao ponto B_k em S, diretamente acima de P_k. O produto $f(u_k, v_k)\, \Delta A_k$ é o volume do prisma de base retangular de área ΔA_k ilustrado na Figura 17.4. A soma de todos esses volumes de prismas (ver Figura 17.5) é uma aproximação do volume V de Q. Como esta aproximação do volume melhora ao tender $\|P\|$ para zero, definimos V como o limite de somas dos números $f(u_k, v_k)\, \Delta A_k$. Aplicando (17.3), obtemos:

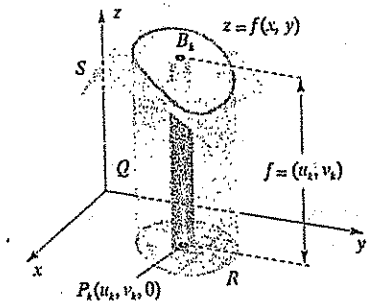


Figura 17.4

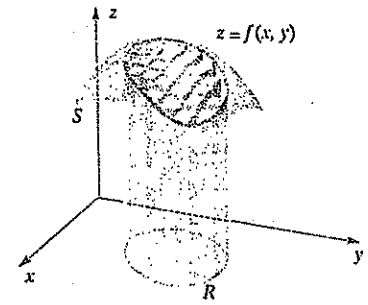


Figura 17.5

Definição (17.4)

Seja f uma função contínua de duas variáveis tal que $f(x, y) \geq 0$ para todo (x, y) em uma região R. O volume V do sólido compreendido entre o gráfico de $z = f(x, y)$ e acima de R é

$$V = \iint_R f(x, y)\, dA$$

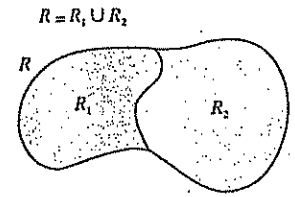


Figura 17.6

Se $f(x, y) \leq 0$ em toda R, a integral dupla de f sobre R é o *negativo* do volume do sólido situado *acima* do gráfico de f e *sob* a região R.

No próximo teorema relacionamos, sem demonstrar, algumas propriedades das integrais duplas que correspondem às do Capítulo 5 para integrais definidas. Supõem-se todas as regiões e funções restringidas convenientemente, para que as integrais indicadas existam. A expressão *não-superpostas*, em (iii) do teorema, significa que as regiões R_1 e R_2 têm no máximo apenas pontos-fronteira em comum, conforme se vê na Figura 17.6.

Teorema (17.5)

(i) $\iint_R cf(x, y)\, dA = c \iint_R f(x, y)\, dA$ para todo real c

(ii) $\iint_R [f(x, y) + g(x, y)]\, dA = \iint_R f(x, y)\, dA + \iint_R g(x, y)\, dA$

(iii) Se R é a união de duas regiões não-superpostas R_1 e R_2,

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_{R_1} f(x, y)\, dA + \iint_{R_2} f(x, y)\, dA$$

(iv) Se $f(x, y) \geq 0$ em toda a R, então $\iint_R f(x, y)\, dA \geq 0$.

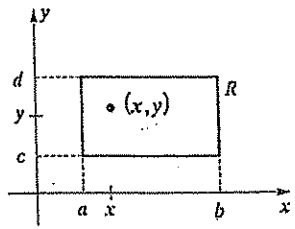


Figura 17.7

Com exceção de casos elementares, é virtualmente impossível achar o valor de uma integral dupla $\iint_R f(x, y)\, dA$ diretamente a partir da Definição (17.3). Se R é uma região R_x ou R_y, entretanto, a integral dupla pode ser calculada por meio de duas integrais sucessivas, cada uma delas envolvendo apenas uma variável independente.

Comecemos com um caso simples – uma função f contínua em uma região retangular fechada R do tipo ilustrado na Figura 17.7. Mostra-se em cálculo avançado que a integral dupla $\iint_R f(x, y)\, dA$ pode ser calculada por meio de uma **integral iterada** do tipo abaixo:

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy \right] dx$$

Conforme indicado pelos colchetes, primeiro efetuamos uma **integração parcial** *em relação a y*, considerando x como constante. Substituindo y pelos limites de integração c e d da maneira usual, obtemos uma expressão em x, que é integrada de a a b. Pode-se também usar a seguinte integral iterada:

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx \right] dy$$

Neste caso, primeiro efetuamos uma integração parcial em relação a x, considerando y como constante. Após substituir x pelos limites de integração a e b, integramos a expressão resultante em y de c a d.

Costuma-se abreviar a notação para as integrais iteradas omitindo os colchetes, conforme definição seguinte.

Definição (17.6)

$$\text{(i)} \quad \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy \right] dx$$

$$\text{(ii)} \quad \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx \right] dy$$

Note que a *primeira* diferencial à *direita* do integrando $f(x, y)$ em (17.6) especifica a variável da *primeira* integração parcial. O primeiro sinal de integral à *esquerda* de $f(x, y)$ indica os limites de integração para aquela variável. Assim, ao calcular uma integral iterada, trabalhamos primeiro com a integral mais interna.

EXEMPLO 1

Calcule $\int_1^4 \int_{-1}^2 (2x + 6x^2y)\, dy\, dx$.

SOLUÇÃO

Pela Definição (17.6)(i), a integral é igual a

$$\int_1^4 \left[\int_{-1}^2 (2x + 6x^2y)\, dy \right] dx = \int_1^4 \left[2xy + 6x^2 \left(\frac{y^2}{2} \right) \right]_{-1}^2 dx$$

$$= \int_1^4 [(4x + 12x^2) - (-2x + 3x^2)]\, dx$$

$$= \int_1^4 (6x + 9x^2)\, dx$$

$$= \left[3x^2 + 3x^3 \right]_1^4 = 234$$

EXEMPLO 2

Calcule $\int_{-1}^2 \int_1^4 (2x + 6x^2y)\, dx\, dy$.

SOLUÇÃO

Pela Definição (17.6)(ii), a integral é igual a

$$\int_{-1}^2 \left[\int_1^4 (2x + 6x^2y)\, dx \right] dy = \int_{-1}^2 \left[2 \left(\frac{x^2}{2} \right) + 6 \left(\frac{x^3}{3} \right) y \right]_1^4 dy$$

$$= \int_{-1}^2 [(16 + 128y) - (1 + 2y)]\, dy$$

$$= \int_{-1}^2 (126y + 15)\, dy$$

$$= \left[63y^2 + 15y \right]_{-1}^2 = 234$$

O fato de as integrais iteradas nos Exemplos 1 e 2 serem iguais não é acidental. Se f é contínua, então as duas integrais iteradas em (17.6) são *sempre* iguais. Dizemos que *a ordem de integração é irrelevante*.

Pode-se definir como a seguir uma integral dupla iterada sobre uma região R_x ou R_y do tipo exibido na Figura 17.8.

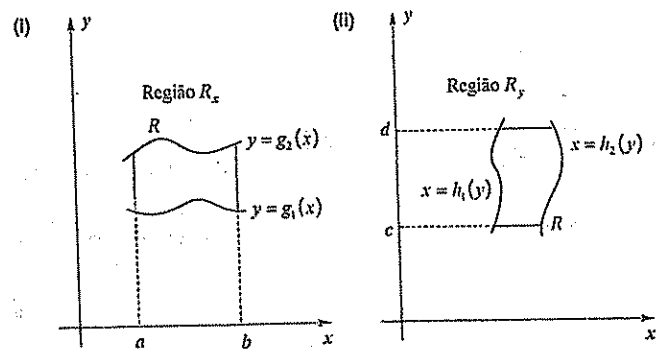


Figura 17.8

Definição de integrais iteradas (17.7)

(i) $$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right] dx$$

(ii) $$\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx \right] dy$$

Na Definição (17.7), primeiro efetuamos uma integração parcial em relação a y, e então substituímos y por $g_2(x)$ e $g_1(x)$ na maneira usual. Integramos então a expressão resultante em x de a a b. Em (ii) da definição, primeiro integramos em relação a x e então, após substituir x por $h_2(y)$ e $h_1(y)$, integramos a expressão resultante em relação a y de c a d. Assim, como na Definição (17.6) para regiões retangulares, trabalhamos primeiro com a integral *mais interna*.

EXEMPLO 3

Calcule $\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^3 + 4y)\,dy\,dx$.

SOLUÇÃO

Pela Definição (17.7)(i) a integral é igual a

$$\int_0^2 \left[\int_{x^2}^{2x} (x^3 + 4y)\,dy \right] dx = \int_0^2 \left[x^3 y + 4\left(\frac{y^2}{2}\right) \right]_{x^2}^{2x} dx$$

$$= \int_0^2 [(2x^4 + 8x^2) - (x^5 + 2x^4)]\,dx$$

$$= \left[\frac{8}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^6 \right]_0^2 = \frac{32}{3}$$

EXEMPLO 4

Calcule $\int_1^3 \int_{\pi/6}^{y^2} 2y \cos x\,dx\,dy$.

SOLUÇÃO

Pela Definição (17.7)(ii), a integral é igual a

$$\int_1^3 \left[\int_{\pi/6}^{y^2} 2y \cos x\,dx \right] dy = \int_1^3 2y \left[\operatorname{sen} x \right]_{\pi/6}^{y^2} dy$$

$$= \int_1^3 2y \left(\operatorname{sen} y^2 - \tfrac{1}{2}\right) dy$$

$$= \int_1^3 (2y \operatorname{sen} y^2 - y)\,dy$$

$$= \left[-\cos y^2 - \tfrac{1}{2}y^2 \right]_1^3$$

$$= \left(-\cos 9 - \tfrac{9}{2}\right) - \left(-\cos 1 - \tfrac{1}{2}\right) \approx -2{,}55$$

O próximo teorema afirma que se a região R é uma região R_x ou R_y então $\iint_R f(x,y)\,dA$ pode ser calculada por meio de uma integral iterada.

Teorema para o cálculo de integrais duplas (17.8)

(i) Seja R a região R_x da Figura 17.8(i). Se f é contínua em R, então

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

(ii) Seja R a região R_y da Figura 17.8(ii). Se f é contínua em R, então

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

Para regiões mais complicadas, dividimos R em sub-regiões R_x ou R_y, aplicamos (17.8) a cada uma e somamos os valores das integrais resultantes.

Em textos de cálculo avançado pode-se encontrar a demonstração do Teorema (17.8). A exposição intuitiva seguinte torna plausível o resultado, ao menos para funções com valores não-negativos. Suponhamos $f(x,y) \geq 0$ em toda a região R_x ilustrada na Figura 17.8(i). Sejam S o gráfico de f, Q o sólido sob S e sobre R e V o volume de Q. Consideremos o plano que

é paralelo ao plano-yz e intercepta o eixo-x em $(x, 0, 0)$, com $a \le x \le b$, e seja C o traço de S neste plano (ver Figura 17.9). Este plano intercepta as fronteiras de R – $y = g_1(x)$ e $y = g_2(x)$ – em $P_1(x, g_1(x), 0)$ e $P_2(x, g_2(x), 0)$.

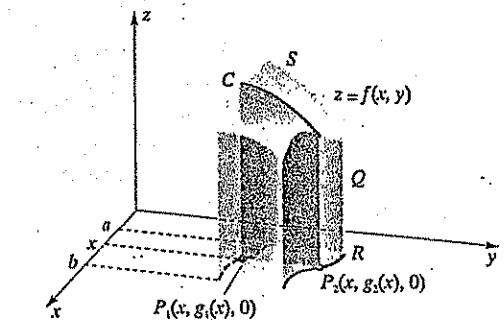


Figura 17.9

Pelo Capítulo 6, sabemos que a área $A(x)$ desta porção do plano é

$$A(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy$$

Como $A(x)$ é a área de uma secção transversa típica de Q, segue-se de (6.13) que

$$V = \int_a^b A(x)\, dx = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$$

Levando em conta que V também é dado pela Definição (17.4), obtemos a fórmula de cálculo da parte (i) do Teorema (17.8). Discussão análoga vale para a parte (ii).

Antes de aplicar o Teorema (17.8) para calcular uma integral dupla, *é importante fazer um esboço da região R* e determinar suas fronteiras. Os exemplos seguintes ilustram a aplicação do Teorema (17.8).

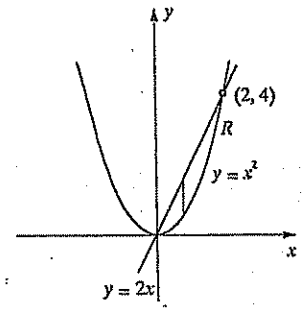


Figura 17.10

EXEMPLO 5

Seja R a região do plano-xy delimitada pelos gráficos de $y = x^2$ e $y = 2x$. Calcule $\iint_R (x^3 + 4y)\, dA$ aplicando

(a) o Teorema (17.8)(i) (b) o Teorema 17.8(ii)

SOLUÇÃO

(a) A Figura 17.10 exibe a região R. Note que R é tanto uma região R_x como uma região R_y. Encaramos R como uma região R_x com fronteira inferior $y = x^2$ e fronteira superior $y = 2x$, com $0 \le x \le 2$. Traçamos um segmento vertical entre essas duas fronteiras para indicar que a primeira integração é em relação a y (da fronteira inferior à fronteira superior). Pelo Teorema (17.8)(i),

$$\iint_R (x^3 + 4y)\, dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^3 + 4y)\, dy\, dx$$

Pelo Exemplo 3, sabemos que a última integral é igual a $\frac{32}{3}$.

(b) Para aplicar o Teorema (17.8)(ii), encaramos R como uma região R_y e resolvemos cada uma das equações dadas em relação a x em termos de y, obtendo

$$x = \tfrac{1}{2}y \quad \text{e} \quad x = \sqrt{y}, \quad 0 \le y \le 4$$

O segmento horizontal da Figura 17.11 se estende da fronteira esquerda à fronteira direita, indicando que a primeira integração é em relação a x. Pelo Teorema (17.8)(ii),

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} (x^3 + 4y)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^4 \left[\tfrac{1}{4}x^4 + 4yx \right]_{y/2}^{\sqrt{y}} dy$$

$$= \int_0^4 \left[\left(\tfrac{1}{4}y^2 + 4y^{3/2} \right) - \left(\tfrac{1}{64}y^4 + 2y^2 \right) \right] dy = \frac{32}{3}$$

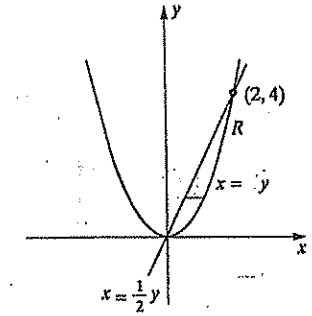


Figura 17.11

EXEMPLO 6

Seja R a região delimitada pelos gráficos das equações $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{3x - 18}$ e $y = 0$. Se f é uma função contínua arbitrária em R, expresse a integral dupla $\iint_R f(x, y)\, dA$ em termos de integrais iteradas utilizando apenas

(a) o Teorema (17.8)(i) (b) o Teorema (17.8)(ii)

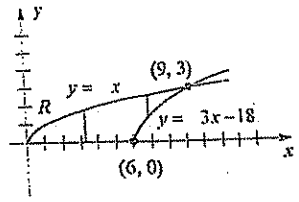


Figura 17.12

SOLUÇÃO

Os gráficos de $y = \sqrt{x}$ e $y = \sqrt{3x - 18}$ são as metades superiores das parábolas $y^2 = x$ e $y^2 = 3x - 18$. A região R está esboçada nas Figuras 17.12 e 17.13.

(a) Se quisermos utilizar apenas o Teorema 17.8(i), então é necessário empregar duas integrais iteradas, porque, se $0 \le x \le 6$, a fronteira inferior da região é o gráfico de $y = 0$, e se $6 \le x \le 9$, a fronteira inferior é o gráfico de $y = \sqrt{3x - 18}$. (Os segmentos verticais na Figura 17.12 se estendem da fronteira inferior à fronteira superior de R.)

Se R_1 denota a parte da região R compreendida entre $x = 0$ e $x = 6$ e se R_2 denota a parte entre $x = 6$ e $x = 9$, então tanto R_1 como R_2 são regiões R_x. Logo

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_{R_1} f(x, y)\, dA + \iint_{R_2} f(x, y)\, dA$$

$$= \int_0^6 \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y)\, dy\, dx + \int_6^9 \int_{\sqrt{3x-18}}^{\sqrt{x}} f(x, y)\, dy\, dx$$

(b) Para aplicar o Teorema (17.8)(ii), devemos resolver em relação a x cada uma das equações dadas em termos de y, obtendo

$$x = y^2 \quad \text{e} \quad x = \frac{y^2 + 18}{3} = \frac{1}{3}y^2 + 6, \quad 0 \le y \le 3$$

O segmento horizontal da Figura 17.13 se estende da fronteira esquerda à fronteira direita. Neste caso, é suficiente apenas uma integral iterada, pois R é uma região R_y. Assim,

$$\iint_R f(x, y)\, dA \int_0^3 \int_{y^2}^{(y^2/3)+6} f(x, y)\, dx\, dy$$

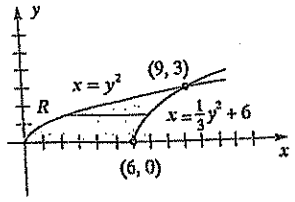


Figura 17.13

Os exemplos 5 e 6 mostram como certas integrais duplas podem ser calculadas, seja por (i) ou por (ii) do Teorema (17.8). Geralmente, a escolha da ordem de integração $dydx$ ou $dxdy$ depende da forma de $f(x, y)$ e da região R. Às vezes, é extremamente difícil, ou mesmo impossível, calcular uma integral dupla iterada. Todavia, invertendo a ordem de integração de $dydx$ para $dxdy$, chega-se a uma integral dupla equivalente que pode ser calculada com facilidade. O próximo exemplo ilustra esta técnica.

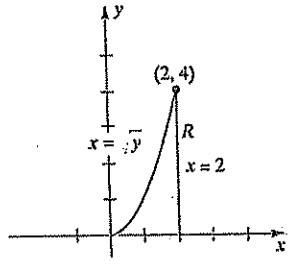


Figura 17.14

EXEMPLO 7

Dada $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 y \cos x^5\, dx\, dy$, inverta a ordem de integração e calcule a integral resultante.

SOLUÇÃO

A ordem de integração dada, $dxdy$, indica que se trata de uma região R_y. Conforme Figura 17.14, as fronteiras esquerda e direita são os gráficos de $x = \sqrt{y}$ e $x = 2$, respectivamente com $0 \le y \le 4$.

Note que R é também uma região R_x cujas fronteiras inferior e superior são dadas por $y = 0$ e $y = x^2$, respectivamente, com $0 \le x \le 2$. Logo, pelo Teorema (17.8)(i), a integral pode ser calculada como a seguir:

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 y \cos x^5\, dx\, dy = \iint_R y \cos x^5\, dA = \int_0^2 \int_0^{x^2} y \cos x^5\, dy\, dx$$

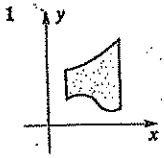
$$= \int_0^2 \left[\frac{y^2}{2} \cos x^5 \right]_0^{x^2} dx = \int_0^2 \frac{x^4}{2} \cos x^5\, dx$$

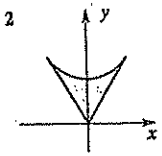
$$= \frac{1}{10} \int_0^2 (\cos x^5)(5x^4)\, dx$$

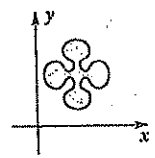
$$= \frac{1}{10} \left[\operatorname{sen} x^5 \right]_0^2 = \frac{1}{10} \operatorname{sen} 32 \approx 0{,}055$$

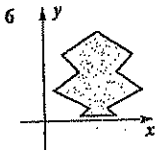
EXERCÍCIOS 17.1

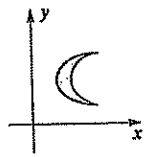
Exercs. 1-10: Determine se a região é R_x, R_y ou nenhum dos dois tipos.

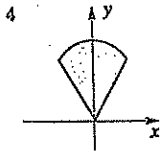
1 

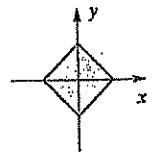
2 

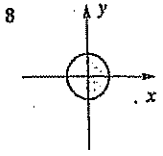
5 

6 

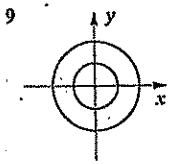
3 

4 

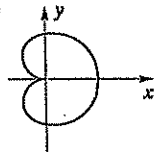
7 

8 

9



10

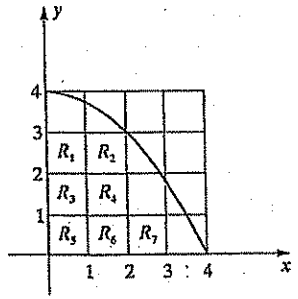


11 Sejam $f(x, y) = 4x + 2y + 1$ e R a região do primeiro quadrante delimitada pelos eixos coordenados e pelo gráfico de $y = 4 - \frac{1}{4}x^2$. Seja $\{R_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, 7$, a partição interior de R exibida na figura. Calcule a soma de Riemann $\sum_k f(u_k, v_k)\,\Delta A_k$ se, para cada k, (u_k, v_k) é o ponto

(a) no canto esquerdo inferior de R_k

(b) no canto direito superior de R_k

(c) no centro de R_k



12 Sejam $f(x, y) = xy$ e R a região delimitada pelo trapezóide de vértices (0, 0), (4, 4), (8, 4) e (12, 0). Seja P a partição interior de R determinada por retas verticais com interceptos-x 0, 2, 4, 6, 8, 10 e 12 e por retas horizontais com interceptos-y 0, 2 e 4. Calcule as somas de Riemann como no Exercício 11 (a)-(c).

Exercs. 13-20: Calcule a integral iterada.

13 $\int_1^2 \int_{-1}^{2} (12xy^2 - 8x^3)\,dy\,dx$

14 $\int_0^3 \int_{-2}^{-1} (4xy^3 + y)\,dx\,dy$

15 $\int_1^2 \int_{1-x}^{\sqrt{x}} x^2 y\,dy\,dx$

16 $\int_{-1}^{1} \int_{x^3}^{x+1} (3x + 2y)\,dy\,dx$

17 $\int_0^2 \int_{y^2}^{2y} (4x - y)\,dx\,dy$

18 $\int_0^1 \int_{-y-1}^{y-1} (x^2 + y^2)\,dx\,dy$

19 $\int_1^2 \int_{x^3}^{x^4} e^{y/x}\,dy\,dx$

20 $\int_0^{\pi/6} \int_0^{\pi/2} (x \cos y - y \cos x)\,dy\,dx$

Exercs. 21-26: Esboce a região R delimitada pelos gráficos das equações dadas. Se $f(x, y)$ é uma função contínua arbitrária, expresse $\iint_R f(x, y)\,dA$ como uma integral iterada, usando (a) somente o Teorema (17.8)(i) e (b) somente o Teorema (17.8)(ii).

21 $y = \sqrt{x}$, $x = 4$, $y = 0$

22 $y = \sqrt{x}$, $x = 0$, $y = 2$

23 $y = x^3$, $x = 0$, $y = 8$

24 $y = x^3$, $x = 2$, $y = 0$

25 $y = \sqrt{x}$, $x = x^3$

26 $y = \sqrt{1 - x^2}$, $y = 0$

Exercs. 27-32: Expresse a integral dupla, sobre a região R indicada, como uma integral iterada, e ache seu valor.

27 $\iint_R (y + 2x)\,dA$;

a região retangular de vértices (−1, −1), (2, −1), (2, 4), (−1, 4).

28 $\iint_R (x - y)\,dA$;

a região triangular de vértices (2, 9), (2, 1), (−2, 1).

29 $\iint_R xy^2\,dA$;

a região triangular de vértices (0, 0), (3, 1) e (−2, 1).

30 $\iint_R (y + 1)\,dA$;

a região entre os gráficos de $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$ de $x = 0$ a $x = \pi/4$.

31 $\iint_R x^3 \cos xy\,dA$;

a região delimitada pelos gráficos de $y = x^2$, $y = 0$ e $x = 2$

32 $\iint_R e^{x/y}\,dA$;

a região delimitada pelos gráficos de $y = 2x$, $y = -x$ e $y = 4$

Exercs. 33-38: Esboce a região R delimitada pelos gráficos das equações dadas. Se f é uma função contínua arbitrária em R, expresse $\iint_R f(x, y)\,dA$ como soma de duas integrais iteradas do tipo usado em (a) Teorema (17.8)(i) e (b) Teorema (17.8)(ii).

33 $8y = x^3$, $y - x = 4$, $4x + y = 9$

34 $x = 2\sqrt{y}$, $\sqrt{3}\,x = \sqrt{y}$, $y = 2x + 5$

35 $x = \sqrt{3 - y}$, $y = 2x$, $x + y + 3 = 0$

36 $x + 2y = 5$, $x - y = 2$, $2x + y = -2$

37 $y = e^x$, $y = \ln x$, $x + y = 1$, $x + y = 1 + e$

38 $y = \operatorname{sen} x$, $\pi y = 2x$

Exercs. 39-44: Esboce a região de integração para a integral iterada.

39 $\int_{-1}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{4-x^2} f(x, y)\,dy\,dx$

40 $\int_{-1}^{2} \int_{x^2-4}^{x-2} f(x, y)\,dy\,dx$

41 $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x, y)\,dx\,dy$

42 $\int_{-2}^{-1} \int_{3y}^{2y} f(x, y)\,dx\,dy$

43 $\int_{-3}^{1} \int_{\operatorname{arctg} x}^{e} f(x, y)\,dy\,dx$

44 $\int_{\pi}^{2\pi} \int_{\operatorname{sen} y}^{\ln y} f(x, y)\,dx\,dy$

Exercs. 45-50: Inverta a ordem de integração e calcule a integral resultante.

45 $\int_0^1 \int_{2x}^{2} e^{(y^2)}\,dy\,dx$

46 $\int_0^9 \int_{\sqrt{y}}^{3} \operatorname{sen} x^3\,dx\,dy$

47 $\int_0^2 \int_{y^2}^{4} y \cos x^2\,dx\,dy$

48 $\int_1^e \int_0^{\ln x} y\,dy\,dx$

49 $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^{2} \frac{y}{\sqrt{16 + x^4}}\,dx\,dy$

50 $\int_0^2 \int_x^2 y^4 \cos(xy^2)\,dy\,dx$

Exercs. 51-52: Pode-se usar a integração numérica para aproximar $\int_a^b \int_c^d f(x, y)\,dx\,dy$ fazendo primeiro $G(y) = \int_c^d f(x, y)\,dx$ e aplicando então a regra do trapézio ou a regra de Simpson a $\int_a^b G(y)\,dy$. Para achar cada valor $G(k)$ necessário para essas regras, aproxime $\int_c^d f(x, k)\,dx$. Use este método e a regra do trapézio com $n = 3$ para aproximar a integral dada.

51 $\int_0^1 \int_0^1 e^{x^2y^2}\,dx\,dy$

52 $\int_0^1 \int_0^1 \operatorname{sen}(x^2 + y^3)\,dx\,dy$

Exercs. 53-54: Use o método descrito para os Exercícios 51-52 e a regra de Simpson com $n = 2$, para aproximar a integral dupla.

53 $\int_0^1 \int_0^1 \cos(x^2e^y)\,dx\,dy$

54 $\int_0^1 \int_{-1/3}^{1/3} \frac{1}{1 + x^4 + y^4}\,dx\,dy$

17.2 ÁREA E VOLUME

Na Seção 17.1 vimos que se $f(x, y) \geq 0$ e se f é contínua, então o volume V do sólido compreendido sob o gráfico de $z = f(x, y)$ e sobre uma região R_x do plano-xy é dado por

$$V = \int_a^b A(x)\, dx = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$$

em que $A(x)$ é a área de uma secção transversa típica do sólido (ver Figura 17.9). Nesta seção estudaremos um método para interpretar esta fórmula de V como um limite de somas (duplas). Pela fórmula "volume por secções transversas" (6.13),

$$V = \int_a^b A(x)\, dx = \lim_{\|P'\| \to 0} \sum_k A(u_k)\, \Delta x_k$$

em que P' é uma partição do intervalo $[a, b]$, u_k é um número arbitrário no k^{mo} subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ de P' e $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. De acordo com a Figura 17.15, $A(u_k)\, \Delta x_k$ é o volume de uma lâmina L_k com face paralela ao plano-yz e base retangular de largura Δx_k no plano-xy. Assim, *o volume V é o limite de uma soma de volumes de tais lâminas.*

A integral iterada $V = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$ pode expressar-se também em termos de limites de somas. Primeiro aplicamos a definição de integral definida como a seguir. Se x está em $[a, b]$, então

$$A(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy = \lim_{\|P''\| \to 0} \sum_j f(x, v_j)\, \Delta y_j$$

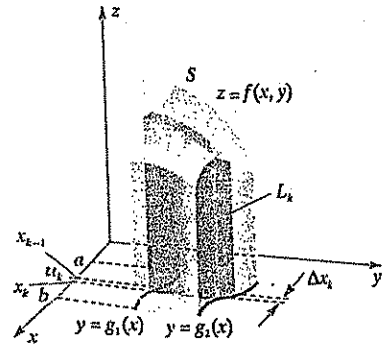


Figura 17.15

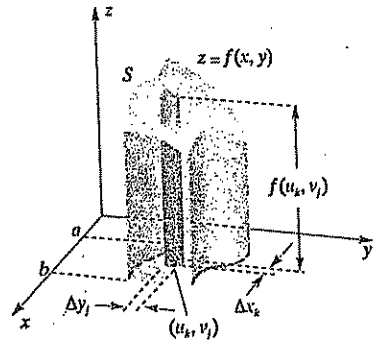


Figura 17.16

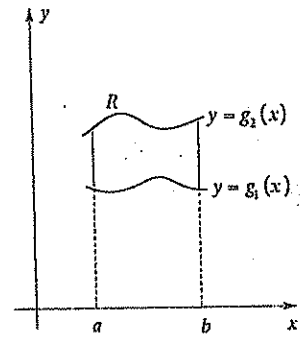


Figura 17.17

em que P'' é uma partição do intervalo-y $[g_1(x), g_2(x)]$, v_j é um número arbitrário no j^{mo} subintervalo $[y_{j-1}, y_j]$ de P'' e $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$. Logo, para cada u_k em $[a, b]$,

$$A(u_k) = \lim_{\|P''\| \to 0} \sum_j f(u_k, v_j)\, \Delta y_j$$

Conseqüentemente,

$$V = \int_a^b A(x)\, dx = \lim_{\|P'\| \to 0} \sum_k A(u_k)\, \Delta x_k$$

$$= \lim_{\|P'\| \to 0} \sum_k \left[\lim_{\|P''\| \to 0} \sum_j f(u_k, v_j)\, \Delta y_j \right] \Delta x_k$$

Desconsiderando os limites nesta fórmula, obtemos uma **soma dupla**

$$\sum_k \sum_j f(u_k, v_j)\, \Delta y_j\, \Delta x_k$$

Referindo-nos à Figura 17.16, vemos que $f(u_k, v_j)\, \Delta y_j\, \Delta x_k$ é o volume de um prisma de área de base $\Delta y_j\, \Delta x_k$ e altura $f(u_k, v_j)$. A soma dupla pode ser interpretada como a seguir. *Mantendo x fixo*, somamos os volumes dos prismas na direção do eixo-y, obtendo assim o volume da lâmina ilustrada na Figura 17.15. Os volumes de todas essas lâminas são então somados na direção do eixo-x. Em certo sentido, a integral iterada faz isto e, ao mesmo tempo, toma limites quando as bases dos prismas tendem para pontos. Esta interpretação costuma ser útil para visualizar aplicações da integral dupla. Para enfatizar este ponto de vista, por vezes expressamos o volume como segue, em que $\|P\|$ é o comprimento da maior diagonal das bases do prisma.

Volume como limite de somas duplas (17.9)

$$V = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_k \sum_j f(u_k, v_j)\, \Delta y_j\, \Delta x_k = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$$

As áreas também podem ser consideradas limites de somas duplas. Começamos denotando a integral dupla $\iint_R 1\, dA$ por $\iint_R dA$. Se R é a região R_x na Figura 17.17, então, pelo Teorema (17.8)(i),

$$\iint_R dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} 1\, dy\, dx = \int_a^b \Big[y \Big]_{g_1(x)}^{g_2(x)} dx$$

$$= \int_a^b [g_2(x) - g_1(x)]\, dx$$

o que, de acordo com o Teorema (6.1), é igual à área A de R. Fórmula análoga vale se R é uma região R_y. Tudo isto é também evidente pela definição de integral dupla, pois, se $f(x, y) = 1$ em toda a R, então a soma de Riemann da Definição (17.3) é uma soma de áreas de retângulos em uma partição interior P de R. Quando a norma $\|P\|$ tende para zero, esses retângulos cobrem mais e mais de R, e o limite é igual à área de R.

Se se utiliza uma integral iterada para achar uma área, ela pode ser considerada como um limite de somas duplas da mesma maneira que no caso de volume. Especificamente, tal como em (17.9), com $f(x, y) = 1$, temos o seguinte resultado.

Área como limite de somas duplas (17.10)

$$A = \iint_R dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy\, dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_k \sum_j \Delta y_j\, \Delta x_k$$

Tal como para funções de uma variável (ver Diretrizes (6.3)), podemos empregar o seguinte método *intuitivo* para memorizar a fórmula (17.10) do limite de somas.

Diretrizes para achar a área de uma região R_x por meio de uma integral dupla (17.11)

1 Esboçar a região, conforme Figura 17.18(i) e exibir um retângulo típico de dimensões dx e dy.

2 *Mantendo x fixo*, encarar $\int_{g_1(x)}^{g_2(x)}$ como um operador que soma os elementos de área $dydx$ na mesma direção do eixo-y, da fronteira inferior para a fronteira superior. A expressão $\left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy\right] dx$ representa a área do retângulo vertical da Figura 17.18(ii).

3 Aplicar o operador $\int_a^b$ a $\left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy\right] dx$, o que equivale a tomar um limite de somas de áreas dos retângulos verticais na Diretriz 2, de $x = a$ a $x = b$.

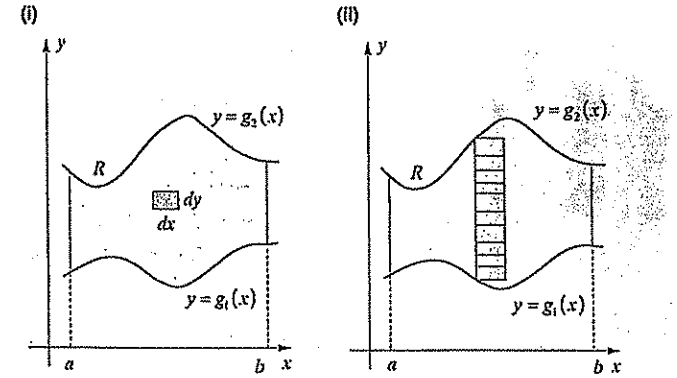


Figura 17.18

É importante lembrar que, ao aplicarmos as Diretrizes (17.11) a uma região R_x, a primeira integração é em relação a y e a segunda em relação a x. Podemos, naturalmente, obter a área da região da Figura 17.18 pelos métodos da Seção 6.1. A razão para utilizarmos uma integral dupla é adquirir prática em lidar com limites de somas duplas. Esta mesma técnica será empregada em problemas que não podem ser resolvidos por métodos de uma variável.

EXEMPLO 1

Ache a área A da região do plano-xy delimitada pelos gráficos de $2y = 16 - x^2$ e $x + 2y = 4$.

SOLUÇÃO

Seguindo a diretriz 1, esboçamos a região e um retângulo típico de área $dydx$, conforme Figura 17.19(i). Resolvemos as equações em relação a y em termos de x e rotulamos as fronteiras da região $y = 2 - \frac{1}{2}x$ e $y = 8 - \frac{1}{2}x^2$.

Tal como na diretriz 2, a integração parcial

$$\int_{2-(x/2)}^{8-(x^2/2)} dy\, dx = \left[\int_{2-(x/2)}^{8-(x^2/2)} dy\right] dx$$

representa a soma dos elementos de área $dydx$ da fronteira inferior até a fronteira superior. Isto nos dá a área do retângulo vertical na Figura 17.19 (ii).

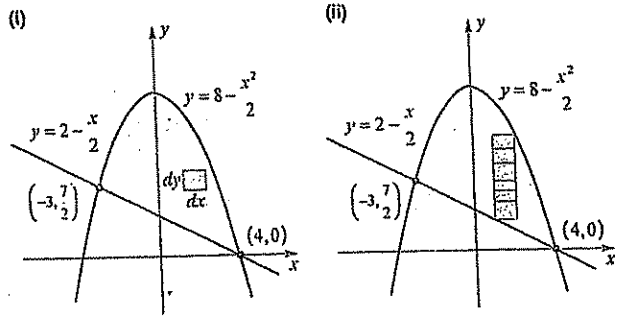


Figura 17.19

Finalmente, utilizando a diretriz 3, aplicamos o operador $\int_{-3}^{4}$, o que equivale a tomar um limite de somas desses retângulos verticais de $x = -3$ a $x = 4$:

$$A = \int_{-3}^{4} \int_{2-(x/2)}^{8-(x^2/2)} dy\, dx = \int_{-3}^{4} \left[y \right]_{2-(x/2)}^{8-(x^2/2)} dx$$

$$= \int_{-3}^{4} \left[\left(8 - \frac{x^2}{2}\right) - \left(2 - \frac{x}{2}\right) \right] dx$$

$$= \left[6x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{4} \right]_{-3}^{4} = \frac{343}{12} \approx 28{,}6$$

Damos a seguir, para regiões R_y, diretrizes análogas a (17.11).

Diretrizes para achar a área de uma região R_y por meio de uma integral dupla (17.12)

1 Esboçar a região, como na Figura 17.20(i), e exibir um retângulo típico de dimensões dx e dy.

2 *Mantendo y fixo*, encarar $\int_{h_1(y)}^{h_2(y)}$ como um operador que soma os elementos de área $dxdy$ na direção do eixo-x, da fronteira esquerda para a fronteira direita. A expressão $\left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx\right] dy$ representa a área do retângulo horizontal na Figura 17.20(ii).

3 Aplicar o operador $\int_c^d$ a $\left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx\right] dy$, o que equivale a tomar um limite de somas de áreas dos retângulos horizontais na diretriz 2, de $y = c$ a $y = d$.

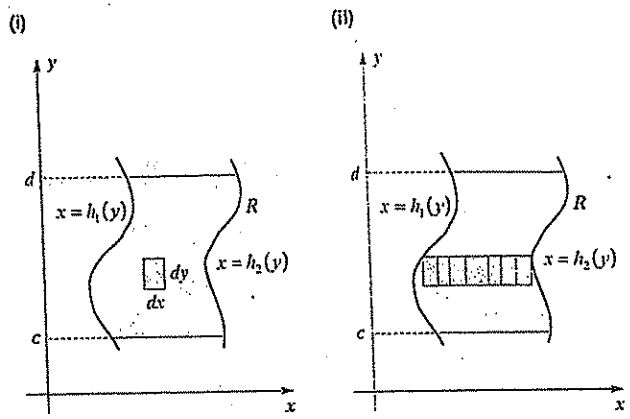


Figura 17.20

Note que, ao aplicar as Diretrizes (17.12) a uma região R_y, a primeira integração é em relação a x e a segunda em relação a y.

EXEMPLO 2

Ache a área A da região do plano-xy delimitada pelos gráficos de $x = y^3$, $x + y = 2$ e $y = 0$.

SOLUÇÃO

A Figura 17.21(i) é um esboço da região, juntamente com um retângulo de área $dxdy$. Tal como na Diretriz 2 de (17.12), a integração parcial

$$\int_{y^3}^{2-y} dx\, dy = \left[\int_{y^3}^{2-y}\right] dy$$

representa a soma de elementos de área $dxdy$ da fronteira esquerda para a fronteira direita. Isto nos dá a área do retângulo horizontal da Figura 17.21(ii).

De acordo com a diretriz 3, aplicamos o operador $\int_0^1$, o que equivale a tomar um limite de somas desses retângulos horizontais de $y = 0$ a $y = 1$:

$$A = \iint_R dA = \int_0^1 \int_{y^3}^{2-y} dx\, dy = \int_0^1 \left[x\right]_{y^3}^{2-y} dy$$

$$= \int_0^1 (2 - y - y^3)\, dy = \left[2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4}\right]_0^1 = \frac{5}{4}$$

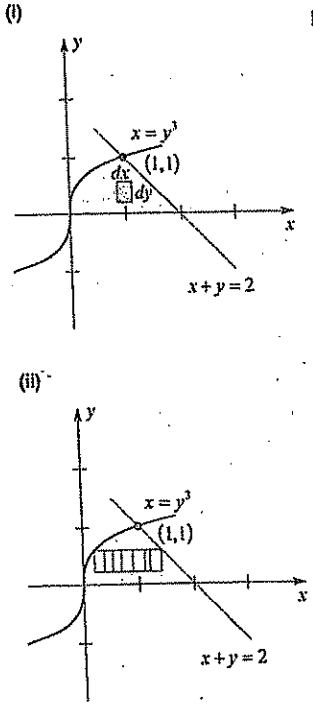


Figura 17.21

Poder-se-ia também achar a área aplicando o Teorema (17.8)(i); entretanto, em tal caso, seria necessário dividir R em duas partes por meio de uma reta vertical por (1, 1). Teríamos então

$$A = \int_0^1 \int_0^{\sqrt[3]{x}} dy\ dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} dy\ dx$$

Nos dois próximos exemplos vamos calcular volumes por meio de (17.9).

EXEMPLO 3

Ache o volume V do sólido do primeiro octante delimitado pelos planos coordenados, pelo paraboloide $z = x^2 + y^2 + 1$ e pelo plano $2x + y = 2$.

SOLUÇÃO

De acordo com a Figura 17.22(i), o sólido está abaixo do paraboloide e acima da região triangular R do plano-xy delimitada pelos eixos coordenados e a reta $y = 2 - 2x$.

Pela Definição (17.4), com $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$,

$$V = \iint_R (x^2 + y^2 + 1)\ dA$$

Podemos interpretar esta integral como um limite de somas duplas, como em (17.9), e calculá-la utilizando as Diretrizes (17.11). Representando dA por $dy dx$, então

$$(x^2 + y^2 + 1)\ dy\ dx$$

representa o volume do prisma ilustrado na Figura 17.22(i). A Figura 17.22(ii) mostra a região R do plano-xy e um retângulo correspondente à seguinte integração parcial em relação a y (mantendo-se x fixo):

$$\int_0^{2-x} (x^2 + y^2 + 1)\ dy\ dx = \left[\int_0^{2-x} (x^2 + y^2 + 1)\ dy \right] dx$$

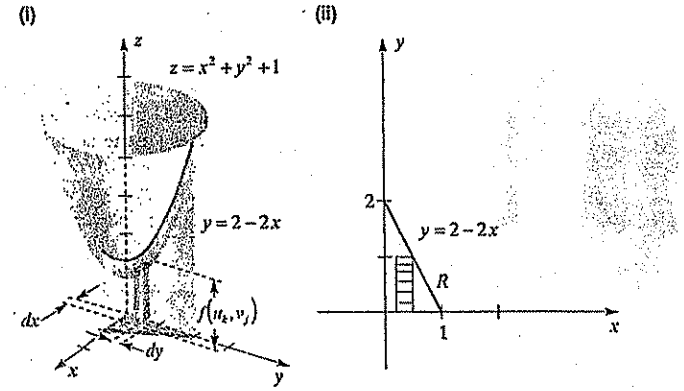


Figura 17.22

Esta fórmula representa a soma de volumes de prismas $(x^2 + y^2 + 1)\ dy\ dx$ *na direção paralela ao eixo-y* e dá o volume de uma lâmina cuja face é paralela ao plano-yz. Finalmente, aplicamos o operador $\int_0^1$, isto é, tomamos um limite de somas desses volumes laminares de $x = 0$ a $x = 1$. Assim,

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \left[\int_0^{2-2x} (x^2 + y^2 + 1)\ dy \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[x^2 y + \tfrac{1}{3} y^3 + y \right]_0^{2-2x} dx \\ &= \int_0^1 \left(-\tfrac{14}{3} x^3 + 10x^2 - 10x + \tfrac{14}{3} \right) dx \\ &= \left[-\tfrac{7}{6} x^4 + \tfrac{10}{3} x^3 - 5x^2 + \tfrac{14}{3} x \right]_0^1 = \tfrac{11}{6} \end{aligned}$$

Podemos também achar V integrando primeiro em relação a x; a integral iterada toma então a forma

$$V = \int_0^2 \int_0^{(2-y)/2} (x^2 + y^2 + 1)\ dx\ dy$$

EXEMPLO 4

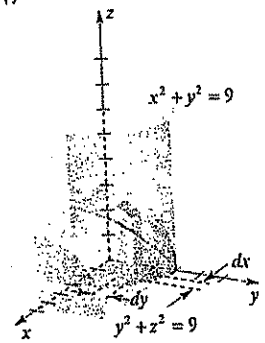
Ache o volume V do sólido que está no primeiro octante e é delimitado pelos três planos coordenados e pelos cilindros $x^2 + y^2 = 9$ e $y^2 + z^2 = 9$.

SOLUÇÃO

O cilindro $y^2 + z^2 = 9$ tem raio 3 e eixo sobre o eixo-x, com a parte no primeiro octante acima do plano-xy, conforme se vê na Figura 17.23(i). O cilindro $x^2 + y^2 = 9$ tem raio 3 e eixo ao longo do eixo-z, com a parte no primeiro octante interceptando o plano-xy em um quarto de círculo. Assim, o sólido está situado *abaixo* do gráfico de $z = \sqrt{9 - y^2}$ e *acima* da região R exibida na Figura 17.23(ii). Pela Definição (17.4),

$$V = \iint_R \sqrt{9 - y^2}\, dA$$

(i)



(ii)

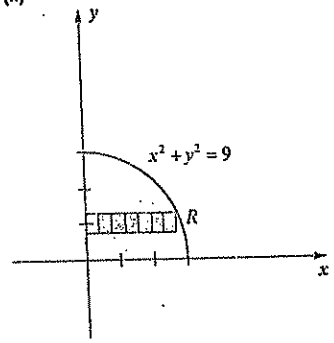


Figura 17.23

Podemos considerar a integral como um limite de somas duplas de volume de prismas do tipo exibido na Figura 17.23(i). Primeiro somamos na direção do eixo-x de $x = 0$ a $x = \sqrt{9 - y^2}$. (A Figura 17.23(ii) mostra uma faixa no plano-xy correspondente a esta primeira somação). Esta soma nos dá o volume de uma lâmina cuja face é paralela ao plano-xz. Somamos então estes volumes laminares na direção do eixo-y de $y = 0$ a $y = 3$. Utilizando uma integral iterada, temos

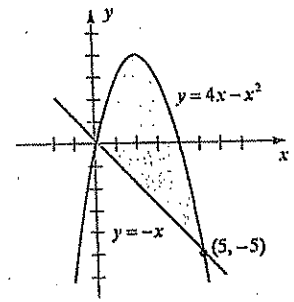
$$\begin{aligned} V &= \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \sqrt{9 - y^2}\, dx\, dy \\ &= \int_0^3 \sqrt{9 - y^2} \left[x\right]_0^{\sqrt{9-y^2}} dy \\ &= \int_0^3 (9 - y^2)\, dy \\ &= \left[9y - \tfrac{1}{3}y^3\right]_0^3 = 18 \end{aligned}$$

Poderíamos também calcular a integral dupla integrando primeiro em relação a y; todavia, esta ordem de integração é muito mais complicada.

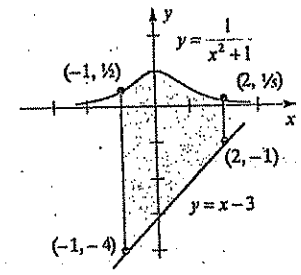
EXERCÍCIOS 17.2

Exercs. 1-4: Estabeleça uma integral dupla iterada para achar a área da região.

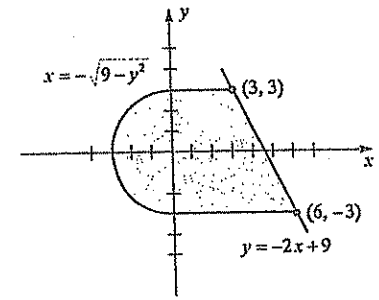
1



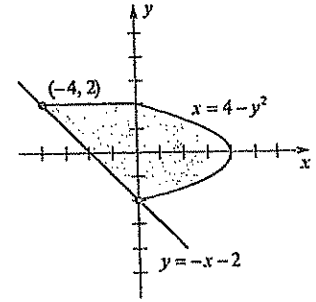
2



3



4



Exercs. 5-12: Esboce a região delimitada pelos gráficos das equações e ache sua área utilizando uma ou mais integrais duplas.

5 $y = 1/x^2$, $y = -x^2$, $x = 1$, $x = 2$

6 $y = \sqrt{x}$, $y = -x$, $x = 1$, $x = 4$

7 $y^2 = -x$, $x - y = 4$, $y = -1$, $y = 2$

8 $x = y^2$, $y - x = 2$, $y = -2$, $y = 3$

9 $y = x$, $y = 3x$, $x + y = 4$

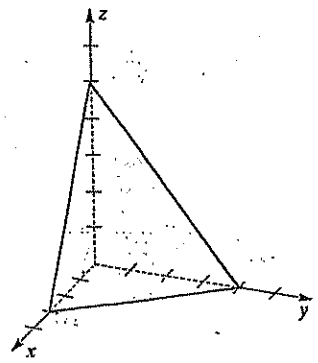
10 $x - y = -1$, $7x - y = 17$, $2x + y = -2$

11 $y = e^x$, $y = \operatorname{sen} x$, $x = -\pi$, $x = \pi$

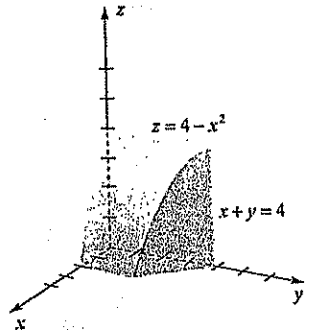
12 $y = x^2$, $y = 1/(x^2 + 1)$

Exercs. 13-16: Estabeleça uma integral dupla para calcular o volume do sólido.

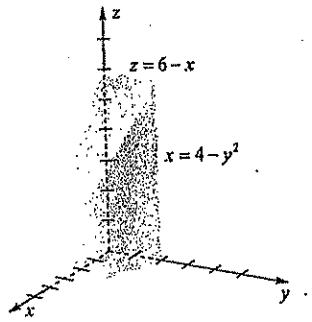
13



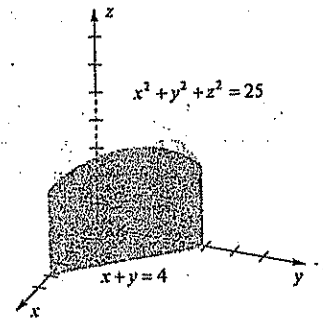
14



15



16



Exercs. 17-20: A integral dupla iterada representa o volume de um sólido sob uma superfície S e sobre uma região R do plano-xy. Descreva S e esboce R.

17 $\int_0^4 \int_{-1}^{2} 3 \, dy \, dx$

18 $\int_0^1 \int_{3-x}^{3-x^2} \sqrt{25 - x^2 - y^2} \, dy \, dx$

19 $\int_{-2}^{1} \int_{x-1}^{1-x^2} (x^2 + y^2) \, dy \, dx$

20 $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{y}} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy$

Exercs. 21-22: Ache o volume do sólido situado abaixo do gráfico da equação e acima da região do plano-xy delimitada pelo polígono de vértices dados.

21 $z = 4x^2 + y^2$; (0, 0), (0, 1), (2, 0); (2, 1)

22 $z = x^2 + 4y^2$; (0, 0), (1, 0), (1, 2)

Exercs. 23-30: Esboce o sólido no primeiro octante delimitado pelos gráficos das equações e ache seu volume.

23 $x^2 + z^2 = 9$, $y = 2x, y = 0$, $z = 0$

24 $z = 4 - x^2$, $x + y = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

25 $2x + y + z = 4$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

26 $y^2 = z$, $y = x$, $x = 4$, $z = 0$

27 $z = x^2 + y^2$, $y = 4 - x^2, x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

28 $z = y^3$, $y = x^3$, $x = 0$, $z = 0$, $y = 1$

29 $z = x^3$, $x = 4y^2$, $16y = x^2$, $z = 0$

30 $x^2 + y^2 = 16$, $x = z$, $y = 0$, $z = 0$

Exercs. 31-32: Ache o volume do sólido delimitado pelos gráficos das equações.

31 $z = x^2 + 4$, $y = 4 - x^2$, $x + y = 2$, $z = 0$

32 $y = x^3$, $y = x^4$, $z - x - y = 4$, $z = 0$

Exercs. 33-34: Ref. (17.9). Aproxime o volume $V = \int_0^1 \int_0^{1/2} f(x, y) \, dy \, dx$ para a função f dada, utilizando

$$\sum_{k=1}^{4} \sum_{j=1}^{2} f(u_k, v_j) \, \Delta y_j \, \Delta x_k$$

com $\Delta x_4 = \frac{1}{4}$, $\Delta y_j = \frac{1}{4}$, $u_k = \frac{1}{4}k - \frac{1}{8}$, e $v_j = \frac{1}{4}j - \frac{1}{8}$ para k = 1, 2, 3, 4 e j = 1, 2.

33 $f(x, y) = \text{sen}\,[\cos(xy)]$

34 $f(x, y) = \sqrt{x^3 + y^3}$

17.3 INTEGRAIS DUPLAS EM COORDENADAS POLARES

Nesta seção veremos como calcular uma integral dupla sobre uma região R delimitada por gráficos de equações polares. Consideremos primeiro a *região polar elementar* da Figura 17.24, delimitada por arcos de círculos de raios r_1 e r_2, com centros na origem, e por dois raios emanados da origem. Se $\Delta\theta$ é a medida em radianos do ângulo entre os raios e se $\Delta r = r_2 - r_1$, então a área ΔA da região é

$$\Delta A = \tfrac{1}{2} r_2^2 \, \Delta\theta - \tfrac{1}{2} r_1^2 \, \Delta\theta$$

Esta fórmula pode também ser escrita

$$\Delta A = \tfrac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2) \, \Delta\theta = \tfrac{1}{2}(r_2 + r_1)(r_2 - r_1) \, \Delta\theta$$

Denotando por $\bar{r}$ o **raio médio** $\frac{1}{2}(r_2 + r_1)$ então

$$\Delta A = \bar{r} \, \Delta r \, \Delta\theta$$

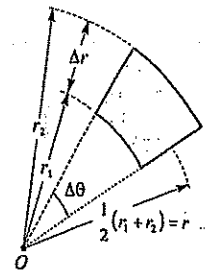


Figura 17.24 $\Delta A = \bar{r} \Delta r \Delta\theta$.

Em seguida, consideremos a região R do tipo ilustrado na Figura 17.25 (i), delimitada por dois raios que fazem ângulos positivos α e β com o eixo polar, e pelos gráficos de suas equações polares $r = g_1(\theta)$ e $r = g_2(\theta)$, em que g_1 e g_2 são funções contínuas e $g_1(\theta) \le g_2(\theta)$ para $\alpha \le \theta \le \beta$. Se R é subdividida por meio de arcos circulares e raios conforme Figura 17.25(ii), então a coleção de regiões polares elementares $R_1, R_2, \ldots, R_n$ que estão completamente dentro de R é chamada uma **partição polar interior** P de R. A norma $\|P\|$ da partição é o comprimento da maior diagonal dos R_k. Escolhido um ponto (r_k, θ_k) em R_k tal que r_k seja o raio médio, então

$$\Delta A_k = r_k \, \Delta r_k \, \Delta\theta_k$$

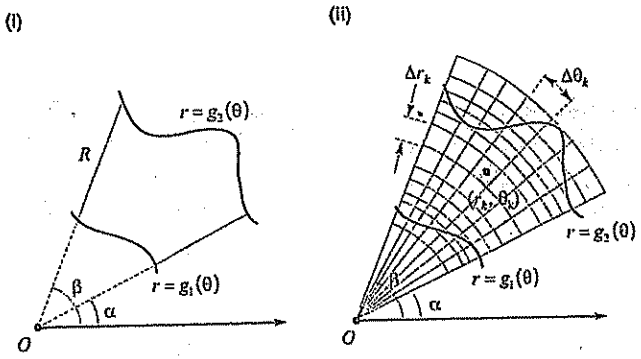


Figura 17.25

Se f é uma função contínua das variáveis polares r e θ, então pode-se provar o seguinte.

Teorema de cálculo (17.13)

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_k f(r_k,\theta_k) r_k \Delta r_k \Delta\theta_k = \iint_R f(r,\theta)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r,\theta) r\, dr\, d\theta$$

Note que o integrando à direita de (17.13) é o produto de $f(r, \theta)$ e r. Isto porque ΔA_k é igual a $r_k \Delta r_k \Delta\theta_k$.

Podemos considerar a integral iterada (17.13) um limite de somas duplas. Primeiro, *mantemos* θ *fixo* e somamos ao longo da região em forma de cunha exibida na Figura 17.26, do gráfico de g_1 até o gráfico de g_2. Para a segunda somatória, *varremos* a região fazendo θ variar de α a β. A integral iterada denota o limite dessas somas quando $\|P\| \to 0$.

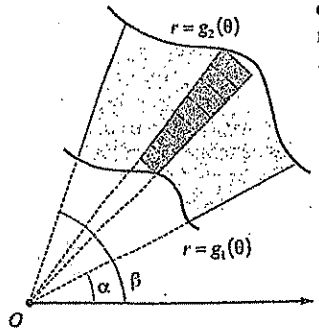


Figura 17.26

Se $f(r, \theta) = 1$ em toda R, então a integral em (17.13) é igual à área de R. Isto decorre também do que vimos no Capítulo 13, pois, após efetuar a integração parcial em relação a r, obtemos a fórmula do Teorema (13.11).

EXEMPLO 1

Ache a área da região R exterior ao círculo $r = a$ e interior ao círculo $r = 2a$ sen θ.

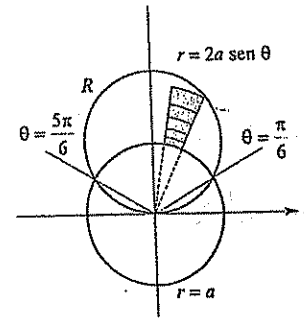


Figura 17.27

SOLUÇÃO

A Figura 17.27 é um esboço da região, juntamente com uma cunha típica de regiões polares elementares obtidas somando-se da fronteira interior $r = a$ à fronteira exterior $r = 2a$ sen θ. Varremos então a região fazendo θ variar de $\pi/6$ a $5\pi/6$. (Um erro comum consiste em fazer θ variar de 0 a π. Onde está o erro?)

Pelo Teorema (17.13) com $f(r,\theta) = 1$,

$$A = \iint_R dA = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \int_a^{2a \text{ sen } \theta} r\, dr\, d\theta.$$

Para simplificar o cálculo, podemos utilizar a simetria de R em relação ao eixo-y. Neste caso, fazemos θ variar de $\pi/6$ a $\pi/2$ e duplicamos o valor da integral. Assim,

$$A = \iint_R dA = 2\int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_a^{2a \text{ sen } \theta} r\, dr\, d\theta$$

$$= 2\int_{\pi/6}^{\pi/2} \left[\tfrac{1}{2} r^2\right]_a^{2a \text{ sen } \theta} d\theta = \int_{\pi/6}^{\pi/2} (4a^2 \text{ sen}^2\, \theta - a^2)\, d\theta$$

$$= a^2 \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(4\frac{1-\cos 2\theta}{2} - 1\right) d\theta = a^2 \int_{\pi/6}^{\pi/2} (1 - 2\cos 2\theta)\, d\theta$$

$$= a^2 \left[\theta - \text{sen } 2\theta\right]_{\pi/6}^{\pi/2} = a^2 \left[\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$$

$$= a^2 \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 1{,}9a^2$$

EXEMPLO 2

Ache a área da região R delimitada por um laço da lemniscata $r^2 = a^2$ sen 2θ, $a > 0$.

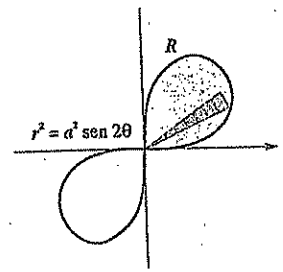


Figura 17.28

SOLUÇÃO

A Figura 17.28 ilustra a lemniscata, juntamente com uma cunha de regiões polares elementares obtida somando-se da origem ($r = 0$) à fronteira $r^2 = a^2$ sen 2θ de R no primeiro quadrante. Varremos então o laço fazendo θ variar de 0 a $\pi/2$. (Note que r *não é definido* se $\pi/2 < \theta < \pi$ ou $3\pi/2 < \theta < 2\pi$.)

Pelo Teorema (17.13),

$$A = \iint_R dA = \int_0^{\pi/2} \int_0^{a\sqrt{\operatorname{sen} 2\theta}} r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[\tfrac{1}{2} r^2 \right]_0^{a\sqrt{\operatorname{sen} 2\theta}} d\theta = \tfrac{1}{2} \int_0^{\pi/2} a^2 \operatorname{sen} 2\theta\, d\theta$$

$$= -\tfrac{1}{4} a^2 \left[\cos 2\theta \right]_0^{\pi/2} = -\tfrac{1}{4} a^2(-1 - 1) = \tfrac{1}{2} a^2$$

Sob condições adequadas, uma integral dupla iterada em coordenadas retangulares pode ser transformada em uma integral dupla em coordenadas polares. Primeiro, substituímos as variáveis x e y no integrando por $r \cos\theta$ e $r \operatorname{sen}\theta$. Em seguida, na integral iterada, $dydx$ ou $dxdy$ é substituído por $r\, dr\, d\theta$ ou $r\, d\theta\, dr$. A fórmula seguinte indica a forma de um integrando típico. O sinal de integral dupla $\iint_R$ deve ser substituído por sinais convenientes de integrais *iteradas*, e $dA = dxdy$ por $r\, dr\, d\theta$.

Fórmula de mudança de variáveis (17.14)

$$\iint_R f(x, y)\, dy\, dx = \iint_R f(r \cos\theta, r \operatorname{sen}\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

Se o integrando $f(x, y)$ de uma integral dupla $\iint_R f(x, y)\, dA$ contém a expressão $x^2 + y^2$ ou se a região R envolve arcos circulares com centros na origem, então a introdução de coordenadas polares em geral conduz a um cálculo mais simples, porque $x^2 + y^2 = r^2$ e os arcos circulares têm equações da forma $r = k$. O exemplo seguinte ilustra o caso.

EXEMPLO 3

Utilize coordenadas polares para calcular

$$\int_{-a}^{a} \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} (x^2 + y^2)^{3/2}\, dy\, dx$$

SOLUÇÃO

A região de integração é delimitada pelos gráficos de $y = 0$ (o eixo-x) e $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ (um semicírculo), conforme Figura 17.29. Primeiro substituímos no integrando $x^2 + y^2$ por r^2 e $dydx$ por $r\, dr\, d\theta$. Em seguida, passamos os limites para coordenadas polares. Referindo-nos à Figura 17.29, vemos que

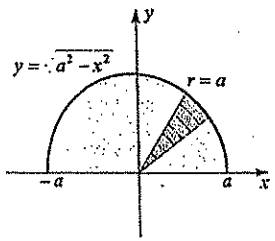


Figura 17.29

$$\int_{-a}^{a} \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} (x^2 + y^2)^{3/2}\, dy\, dx = \int_0^{\pi} \int_0^{a} r^3\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \left[\tfrac{1}{5} r^5 \right]_0^{a} d\theta = \tfrac{1}{5} a^5 \int_0^{\pi} d\theta$$

$$= \tfrac{1}{5} a^5 \left[\theta \right]_0^{\pi} = \tfrac{1}{5} \pi a^5$$

As coordenadas polares também podem ser usadas para integrais duplas se R é uma região do tipo ilustrado na Figura 17.30(i). Neste caso R é delimitada pelos arcos de dois círculos de raios a e b e pelos gráficos de duas equações polares e, em que h_1 e h_2 são funções contínuas $h_1(r) \le h_2(r)$ para $a \le r \le b$. Se f é função de r e e se f é contínua em R, então o limite em (17.13) existe e a fórmula de cálculo é dada no próximo teorema.

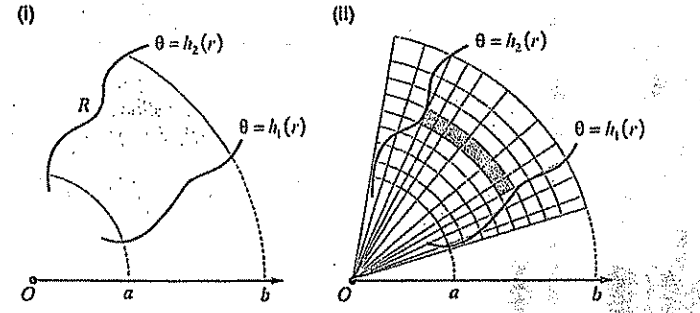


Figura 17.30

Teorema de cálculo (17.15)

$$\iint_R f(r, \theta)\, dA = \int_a^b \int_{h_1(r)}^{h_2(r)} f(r, \theta) r\, d\theta\, dr$$

A integral iterada no Teorema (17.15) pode ser interpretada em termos de limites de somas duplas. Primeiro mantemos r fixo e somamos ao longo de um arco circular ilustrado pela região cinza da Figura 17.30(ii). Em seguida, varremos R somando termos que correspondem às regiões em forma de anel, de $r = a$ a $r = b$.

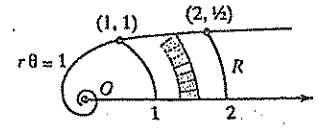


Figura 17.31

EXEMPLO 4

Ache a área da menor das regiões delimitadas pelo eixo polar, pelos gráficos de $r = 1$ e $r = 2$ e pela parte da espiral $r\theta = 1$ de $\theta = \frac{1}{2}$ a $\theta = 1$.

SOLUÇÃO

A Figura 17.31 mostra a região R juntamente com um anel de regiões polares elementares. Apliquemos o Teorema (17.15) com $f(r, \theta) = 1$:

$$A = \iint_R dA = \int_1^2 \int_0^{1/r} r \, d\theta \, dr$$

$$= \int_1^2 r \left[\theta \right]_0^{1/r} dr = \int_1^2 r \left(\frac{1}{r} \right) dr$$

$$= \int_1^2 dr = \left[r \right]_1^2 = 2 - 1 = 1$$

Tal como na seção precedente, se $f(x, y) \geq 0$, o volume V do sólido compreendido abaixo do gráfico de $z = f(x, y)$ e acima de uma região R no plano-xy é dado por

$$V = \iint_R f(x, y) \, dA$$

Às vezes é conveniente calcular esta integral dupla utilizando coordenadas polares, como no próximo exemplo.

EXEMPLO 5

Ache o volume V do sólido delimitado pelo parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ e o plano-xy.

SOLUÇÃO

A Figura 17.32(i) ilustra a porção do sólido no primeiro octante. Por simetria, basta achar o volume desta porção e multiplicar o resultado por 4.

A região R do plano-xy é delimitada pelos eixos coordenados e por um quarto do círculo de equação polar $r = 2$, conforme Figura 17.32(ii), na qual também se ilustra uma cunha de regiões polares elementares. A base do prisma na Figura 17.32(i) corresponde a *uma* região polar elementar. Podemos obter o volume do sólido fazendo $r^2 = x^2 + y^2$ e a mudança de variáveis dada pela Fórmula (17.14).

$$V = 4 \iint_R (4 - x^2 - y^2) \, dA$$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^2 (4 - r^2) \, r \, dr \, d\theta$$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} \left[2r^2 - \tfrac{1}{4} r^4 \right]_0^2 d\theta = 4 \int_0^{\pi/2} 4 \, d\theta = 16 \left[\theta \right]_0^{\pi/2} = 8\pi$$

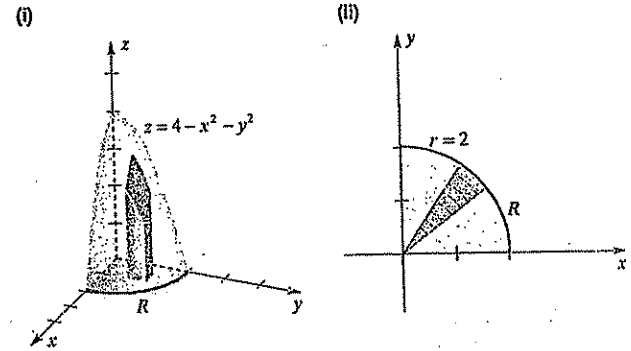


Figura 17.32

O mesmo problema, posto em termos de coordenadas retangulares, conduz à integral dupla seguinte:

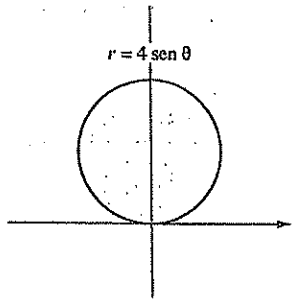
$$V = 4 \iint_R (4 - x^2 - y^2) \, dA = 4 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (4 - x^2 - y^2) \, dy \, dx$$

O cálculo da última integral deve ser suficiente para convencer qualquer um da vantagem do uso de coordenadas polares em certos problemas.

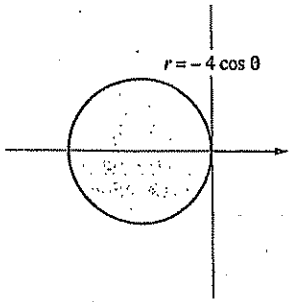
EXERCÍCIOS 17.3

Exercs. 1-6: Expresse a área da região como uma integral dupla iterada em coordenadas polares, utilizando a simetria sempre que possível.

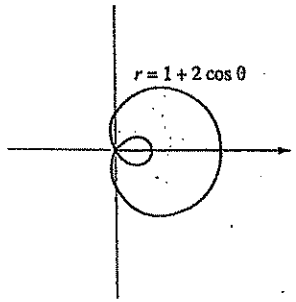
1



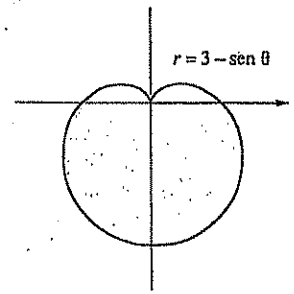
2



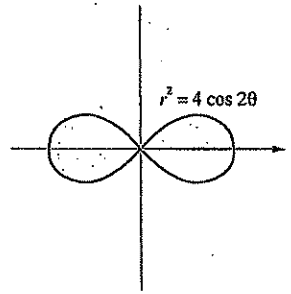
3



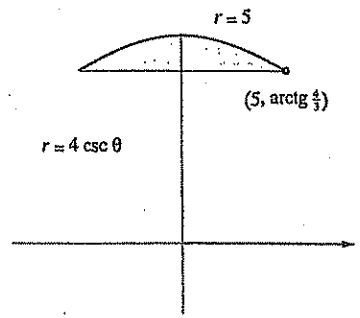
4



5



6



Exercs. 7-12: Use uma integral dupla para achar a área da região da forma indicada.

7 Um laço de $r = 4 \operatorname{sen} 3\theta$

8 Um laço de $r = 2 \cos 4\theta$

9 Interior a $r = 2 - 2 \cos \theta$ e exterior a $r = 3$

10 Delimitada por $r = 3 + 2 \operatorname{sen} \theta$

11 Um laço de $r^2 = 9 \cos 2\theta$

12 Interior a $r = 3 \operatorname{sen} \theta$ e exterior a $r = 1 + \operatorname{sen} \theta$

Exercs. 13-24: Por meio de coordenadas polares, calcule a integral.

13 $\iint_R (x^2 + y^2)^{3/2}\, dA$;

R limitada pelo círculo $x^2 + y^2 = 4$.

14 $\iint_R x^2 (x^2 + y^2)^3\, dA$;

R limitada pelo semicírculo $y = \sqrt{1 - x^2}$ e eixo x.

15 $\iint_R \frac{x^2}{x^2 + y^2}\, dA$;

R é a região anular limitada por $x^2 + y^2 = a^2$ e $x^2 + y^2 = b^2$, $0 < a < b$.

16 $\iint_R (x + y)\, dA$;

R limitada pelo círculo $x^2 + y^2 = 2y$.

17 $\iint_R \sqrt{x^2 + y^2}\, dA$;

R limitada pelo triângulo de vértices (0, 0), (3, 0), (3, 3).

18 $\iint_R \sqrt{x^2 + y^2}\, dA$;

R limitada pelo círculo $y = \sqrt{2x - x^2}$ e a linha $y = x$.

19 $\int_{-a}^{a} \int_{0}^{\sqrt{a^2 - x^2}} e^{-(x^2 + y^2)}\, dy\, dx$

20 $\int_{0}^{a} \int_{0}^{\sqrt{a^2 - x^2}} (x^2 + y^2)^{3/2}\, dy\, dx$

21 $\int_{1}^{2} \int_{0}^{x} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dy\, dx$

22 $\int_{0}^{1} \int_{0}^{\sqrt{1 - x^2}} e^{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dy\, dx$

23 $\int_{0}^{2} \int_{0}^{\sqrt{4 - y^2}} \cos (x^2 + y^2)\, dx\, dy$

24 $\int_{0}^{2} \int_{-\sqrt{2y - y^2}}^{\sqrt{2y - y^2}} x\, dx\, dy$

Exercs. 25-30: Por meio de coordenadas polares ache o volume do sólido que tem a forma de Q.

25 Q é a região interior à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ e exterior ao cilindro $x^2 + y^2 = 9$.

26 Q é cortado do elipsóide $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$ pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

27 Q é delimitada pelo cone $z^2 = x^2 + y^2$ e o cilindro $x^2 + y^2 = x$.

28 Q é delimitada pelo paraboloide $z = 4x^2 + 4y^2$, o cilindro $x^2 + y^2 = 3y$ e o plano $z = 0$.

29 Q é a maior região interior à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e ao cilindro $x^2 + y^2 = 4y$.

30 Q é delimitada pelo paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ e pelo plano $z = 5$.

31 Seja R_a a região delimitada pelo círculo $x^2 + y^2 = a^2$. Definindo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2 + y^2)}\, dx\, dy = \lim_{a \to \infty} \iint_{R_a} e^{-(x^2 + y^2)}\, dA$$

calcule a integral dupla imprópria.

32 (a) Pode-se provar, por métodos mais avançados, que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2 + y^2)}\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, dy$$

Use este fato e o Exercício 31 para mostrar que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$. Interprete este resultado geometricamente.

(b) Utilizando a parte (a), prove o seguinte resultado, importante ao campo da estatística:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx = 1$$

Exercs. 33-34: Às vezes podemos calcular uma integral dupla transformando-a em uma integral simples. (a) Utilize coordenadas polares para transformar a integral dupla dada em uma integral simples envolvendo apenas uma variável r. (b) Use a regra de Simpson com $n = 4$ para obter uma aproximação da integral simples.

33 $\iint_R \sqrt{1 + (x^2 + y^2)^2}\, dA$; R é a região no primeiro quadrante delimitada pelo círculo $x^2 + y^2 = 4$ e os eixos coordenados.

34 $\iint_R \operatorname{sen} \sqrt[3]{x^2 + y^2}\, dA$; R é a região delimitada pelo semicírculo $x = \sqrt{1 - y^2}$ e o eixo-x.

17.4 ÁREA DE UMA SUPERFÍCIE

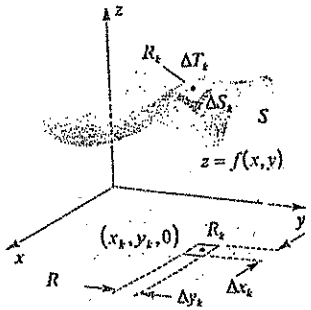


Figura 17.33

Na Seção 6.5 estabelecemos fórmulas para a área de uma superfície de revolução. Estudaremos agora um método para achar áreas de superfícies mais gerais. Suponhamos que $f(x, y) \geq 0$ em toda uma região R no plano-xy e que f tenha derivadas parciais primeiras contínuas em R. Denotemos por S a porção do gráfico de f cuja projeção no plano-xy é R, conforme ilustrado na Figura 17.33. Para simplificar, admitiremos que não haja nenhum vetor normal a S paralelo ao plano-xy. Queremos definir a área A de S e obter uma fórmula para calcular A.

Seja $P = \{R_k\}$ uma partição interior de R, e sejam Δx_k e Δy_k as dimensões do retângulo R_k. Para cada k, escolhamos um ponto arbitrário $(x_k, y_k, 0)$ em R_k e seja $B_k(x_k, y_k, f(x_k, y_k))$ o ponto correspondente em S. Consideremos em seguida o plano tangente a S em B_k (ver Figura 17.33), e sejam ΔT_k e ΔS_k as áreas das regiões no plano tangente e em S, respectivamente, obtidas projetando-se R_k verticalmente para cima. Se a norma $\|P\|$ da partição é pequena, então ΔT_k é uma aproximação de ΔS_k e $\sum_k \Delta T_k$ é uma aproximação da área A de S. Esta aproximação deve melhorar à medida que $\|P\|$ tende para 0, o que nos leva à seguinte definição.

Definição (17.16)

$$A = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_k \Delta T_k$$

Para achar uma fórmula de integral para A, escolhamos $(x_k, y_k, 0)$ como o canto de R_k mais próximo da origem. De acordo com a visão isolada de ΔT_k da Figura 17.34, consideremos os vetores a e b com ponto inicial $B_k(x_k, y_k, f(x_k, y_k))$, tangentes aos traços de S nos planos $y = y_k$ e $x = x_k$, respectivamente. Pelo Teorema (16.10), os coeficientes angulares das retas determinadas por a e b nesses planos são $f_x(x_k, y_k)$ e $f_y(x_k, y_k)$, respectivamente. Segue-se que

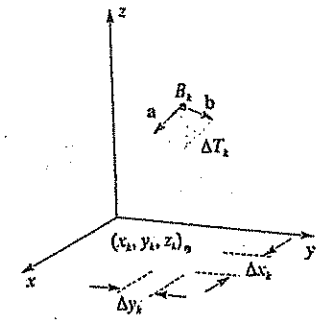


Figura 17.34

$$\mathbf{a} = \Delta x_k \mathbf{i} + f_x(x_k, y_k)\, \Delta x_k \mathbf{k}$$

$$\mathbf{b} = \Delta y_k \mathbf{j} + f_y(x_k, y_k)\, \Delta y_k \mathbf{k}$$

Pela Seção 14.4, a área ΔT_k do paralelogramo definido por a e b é $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$. Como

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \Delta x_k & 0 & f_x(x_k, y_k)\, \Delta x_k \\ 0 & \Delta y_k & f_y(x_k, y_k)\, \Delta y_k \end{vmatrix}$$

temos

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -f_x(x_k, y_k)\, \Delta x_k\, \Delta y_k \mathbf{i} - f_y(x_k, y_k)\, \Delta x_k\, \Delta y_k \mathbf{j} + \Delta x_k\, \Delta y_k \mathbf{k}$$

Conseqüentemente,

$$\Delta T_k = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \sqrt{[f_x(x_k, y_k)]^2 + [f_y(x_k, y_k)]^2 + 1}\; \Delta x_k\, \Delta y_k$$

onde $\Delta x_k\, \Delta y_k = \Delta A_k$. Se, como em (17.16), tomarmos o limite de somas dos ΔT_k e aplicarmos a definição de integral dupla, obteremos o seguinte:

Integral para a área de uma superfície (17.17)

$$A = \iint_R \sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1}\; dA$$

A fórmula (17.17) é válida também se $f(x, y) \leq 0$ em R.

EXEMPLO 1

Seja R a região triangular no plano-xy de vértices (0, 0, 0), (0, 1, 0) e (1, 1, 0). Ache a área da superfície da porção do gráfico de $z = 3x + y^2$ que está acima de R.

SOLUÇÃO

A região R no plano-xy é limitada pelos gráficos de $y = x$, $x = 0$ e $y = 1$, conforme Figura 17.35. Fazendo $f(x, y) = 3x + y^2$ e aplicando (17.17), temos

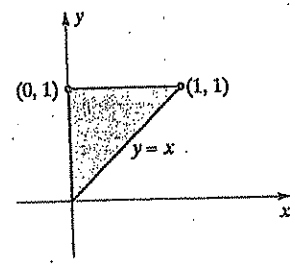


Figura 17.35

$$A = \iint_R \sqrt{3^2 + (2y)^2 + 1}\; dA = \int_0^1 \int_0^y (10 + 4y^2)^{1/2}\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 (10 + 4y^2)^{1/2} \left[x\right]_0^y dy = \int_0^1 (10 + 4y^2)^{1/2} y\, dy$$

$$= \left[\frac{1}{12}(10 + 4y^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{14^{3/2} - 10^{3/2}}{12} \approx 1{,}7 \text{ unidade de área}$$

EXEMPLO 2

Ache a área da superfície do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ para $z \geq 0$.

SOLUÇÃO

A Figura 17.36(i) ilustra o parabolóide. Aplicando (17.17) com $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$, temos

$$A = \iint_R \sqrt{(-2x)^2 + (-2y)^2 + 1}\, dA$$

$$= \iint_R \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dA$$

em que R é a região do plano-xy delimitada pelo círculo $x^2 + y^2 = 4$. Por simetria, podemos achar a área correspondente à parte de R no primeiro quadrante, conforme Figura 17.36(ii) e então multiplicar este resultado por 4. Com uma integral iterada, temos

$$A = 4 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dy\, dx$$

(i) (ii)

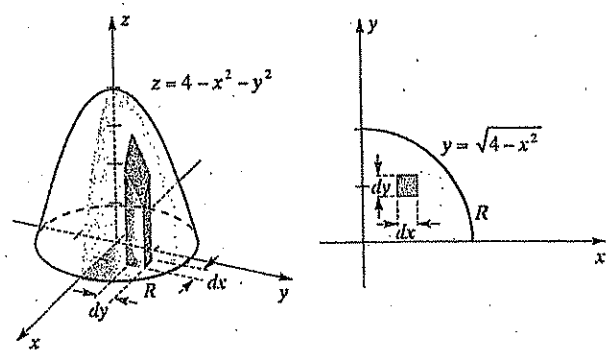


Figura 17.36

Seria muito trabalhoso calcular diretamente esta integral; passamos, pois, para coordenadas polares e procedemos como a seguir:

$$A = 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^2 \sqrt{4r^2 + 1}\, r\, dr\, d\theta$$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} \left[\tfrac{1}{12} (4r^2 + 1)^{3/2} \right]_0^2 d\theta$$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{12} (17^{3/2} - 1)\, d\theta$$

$$= \tfrac{1}{3} (17^{3/2} - 1) \left[\theta \right]_0^{\pi/2} = \tfrac{\pi}{6} (17^{3/2} - 1) \approx 36{,}2$$

Podem-se estabelecer fórmulas análogas a (17.17) no caso de a superfície ter projeções convenientes nos planos yz ou xz. Assim, se S é o gráfico de uma equação $y = g(x, z)$ e se a projeção no plano-xz é R_1, então

$$A = \iint_{R_1} \sqrt{[g_x(x, z)]^2 + [g_z(x, z)]^2 + 1}\, dA$$

Pode-se estabelecer fórmula análoga se S é dado por $x = h(y, z)$.

EXERCÍCIOS 17.4

Exercs. 1-4: Estabeleça uma integral dupla iterada para calcular a área da parte do gráfico da equação situada acima da região R no plano-xy e com a fronteira indicada. Utilize a simetria sempre que possível.

1 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$;

quadrado de vértices $(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$

2 $x^2 - y^2 + z^2 = 1$;

quadrado de vértices $(0, 1), (1, 0), (-1, 0), (0, -1)$

3 $36z^2 = 16x^2 + 9y^2 + 144$;

círculo de centro na origem e raio 3

4 $9y^2 = 225z^2 + 25x^2$;

triângulo de vértices $(0, 0), (3, 5), (-3, 5)$

Exercs. 5-6: Ache a área da parte do gráfico da equação que está acima da região R no plano-xy que tem a fronteira indicada.

5 $z = y + \frac{1}{2}x^2$;

quadrado com vértices $(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)$

6 $z = y^2$;

triângulo com vértices $(0, 0), (0, 2), (2, 2)$

7 Corta-se uma parte do plano $(x/a) + (y/b) + (z/c) = 1$ pelo cilindro $x^2 + y^2 = k^2$, em que a, b, c e k são positivos. Ache a área da parte cortada.

8 Ache a área da parte, no primeiro octante, do cilindro $y^2 + z^2 = 9$ interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 9$ (ver Figura 17.23).

Exercs. 9-12: Ache a área da superfície S.

9 S é a parte do parabolóide $z = x^2 + y^2$ cortada pelo plano $z = 1$.

10 S é a parte do plano $z = y + 1$ interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

11 S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ interior ao cilindro $x^2 + y^2 = ay$.

12 S é a parte, no primeiro octante, do parabolóide hiperbólico $z = x^2 - y^2$ interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

13 Uma tenda em forma de cúpula deve ter o chão circular com raio de 5 m e teto em forma do gráfico de $z = 7 - \frac{7}{25}(x^2 + y^2)$, $z \geq 0$. Aproxime o número de metros quadrados de material necessário para construir a tenda. (Desconsidere perdas ou superposição de material.)

14 Um gerador de Van de Graaff pode produzir milhões de volts de eletricidade estática e grandes centelhas. Parte do gerador consiste em uma capa metálica esférica com um orifício circular feito na base. A carga total C (em coulombs) gerada é dada por $C = \delta A$, em que A é a área da superfície metálica e δ é a densidade de carga por área na

superfície. Suponha que a esfera possa ser representada por $x^2+y^2+z^2=1$, e que o furo seja obtido pela intersecção do cilindro $x^2 + y^2 = \frac{1}{16}$ com a esfera, para $z < 0$, e x, y e z sejam medidos em metros. Aproxime C se $\delta = 1{,}2 \times 10^{-5}$ coulomb/m^2. (Este valor de C corresponde a um potencial de voltagem de aproximadamente 1,35 milhão de volts.)

Exercs. 15-16: Ref. Exercícios 51-52 da Seção 17.1. Use a *regra do trapézio* com $n = 2$ para aproximar a área da parte do gráfico de f que está acima da região quadrada R de vértices dados no plano-xy.

15 $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + \cos y$; $(0, 0), (0, 1), (1, 1), (1, 0)$

16 $f(x, y) = x^3y$; $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}), (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}), (\frac{3}{4}, \frac{1}{4}), (\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$

17.5 INTEGRAIS TRIPLAS

Podemos definir as *integrais triplas* para uma função f de *três* variáveis x, y, z utilizando um processo de quatro passos análogo ao apresentado na Seção 17.1 para funções de duas variáveis. O caso mais simples ocorre se f é contínua em toda uma região em forma de paralelepípedo Q em três dimensões do seguinte tipo:

$$Q = \{(x, y, z): a \le x \le b, c \le y \le d, m \le z \le n\}$$

A Figura 17.37(i) ilustra uma posição possível de Q. Dividindo-se Q em sub-regiões Q_1, Q_2,..., Q_n por meio de planos paralelos aos três planos coordenados (ver Figura 17.37(ii)), então a coleção $\{Q_k\}$ é uma **partição** P de Q. A **norma** $\|P\|$ da partição é o comprimento da maior diagonal de todos os Q_k. De acordo com a Figura 17.37(iii), se Δx_k, Δy_k e Δz_k são as dimensões de Q_k, então seu volume ΔV_k é

$$\Delta V_k = \Delta x_k \, \Delta y_k \, \Delta z_k$$

(i) (ii) (iii)

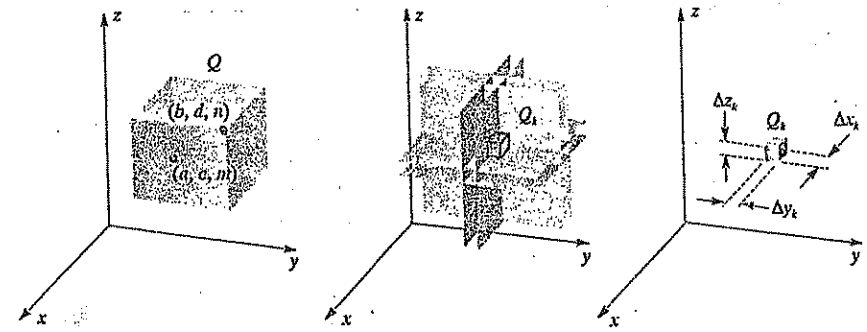


Figura 17.37

Uma **soma de Riemann** de f para P é

$$\sum_k f(u_k, v_k, w_k) \, \Delta V_k$$

em que (u_k, v_k, w_k) é um ponto arbitrário em Q_k. A definição de limite de uma soma de Riemann, quando $\|P\| \to 0$, é análoga à das funções de duas variáveis. Se o limite existe, é chamado **integral tripla de f sobre Q** e se denota por $\iiint_Q f(x, y, z) \, dV$. Com a notação de limite, temos o seguinte:

Integral tripla de f sobre Q (17.18)

$$\iiint_Q f(x, y, z) \, dV = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_k f(u_k, v_k, w_k) \, \Delta V_k$$

Pode-se mostrar que, se Q é a região da Figura 17.37(i), então

$$\iiint_Q f(x, y, z) \, dV = \int_m^n \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

Calcula-se a integral iterada à direita começando pela integral *mais interna* e procedendo para fora. Assim, a primeira integração é em relação a x (com y e z fixos), a segunda é em relação a y (com z fixo) e a terceira é em relação a z. Há cinco outras integrais iteradas iguais à integral tripla de f sobre Q. Por exemplo, integrando na ordem y, z, x,

$$\iiint_Q f(x, y, z) \, dV = \int_a^b \int_m^n \int_c^d f(x, y, z) \, dy \, dz \, dx$$

Pode-se mostrar que, para o paralelepípedo Q da Figura 17.37(i), a ordem de integração é irrelevante.

EXEMPLO 1

Calcule $\iiint_Q (xy^2 + yz^3) \, dV$ se

$$Q = \{(x, y, z): -1 \le x \le 1, 3 \le y \le 4, 0 \le z \le 2\}$$

SOLUÇÃO

Das seis integrais iteradas possíveis, utilizaremos a seguinte:

$$\int_3^4 \int_{-1}^1 \int_0^2 (xy^2 + yz^3) \, dz \, dx \, dy$$

$$= \int_3^4 \int_{-1}^1 \left[\int_0^2 (xy^2 + yz^3) \, dz \right] dx \, dy$$

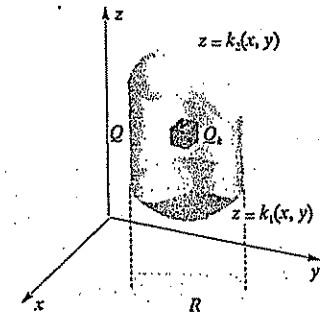


Figura 17.38

$$= \int_3^4 \int_{-1}^{1} \left[xy^2 z + y\left(\frac{z^4}{4}\right) \right]_0^2 dx\, dy$$

$$= \int_3^4 \int_{-1}^{1} (2xy^2 + 4y)\, dx\, dy$$

$$= \int_3^4 \left[2\left(\frac{x^2}{2}\right) y^2 + 4yx \right]_{-1}^{1} dy$$

$$= \int_3^4 [(y^2 + 4y) - (y^2 - 4y)]\, dy$$

$$= \int_3^4 8y\, dy = 8\left[\frac{y^2}{2}\right]_3^4 = 28$$

As integrais triplas podem ser definidas sobre uma região mais complicada do que um paralelepípedo. Suponhamos, por exemplo, que R seja a região do plano-xy que possa ser dividida em regiões R_x e R_y e que Q seja a região em três dimensões definida por

$$Q = \{(x, y, z): (x, y) \text{ em } R \text{ e } k_1(x, y) \le z \le k_2(x, y)\}$$

em que k_1 e k_2 são funções dotadas de derivadas parciais primeiras contínuas em toda a R. A região Q está entre os gráficos de $z = k_1(x, y)$ e $z = k_2(x, y)$ e sobre (ou sob) a região R (ver Figura 17.38). Subdividindo Q por planos paralelos aos três planos coordenados, então as regiões (pequenas) em forma de paralelepípedos resultantes $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ que estão completamente dentro de Q formam uma **partição interior** P de Q. A Figura 17.38 exibe um elemento típico Q_k de uma partição interior de Q.

Uma **soma de Riemann** de f para P é qualquer soma da forma $\sum_k f(u_k, v_k, w_k)\, \Delta V_k$, em que (u_k, v_k, w_k) é um ponto arbitrário de Q_k e ΔV_k é o volume de Q_k. A integral tripla de f sobre Q é novamente definida como o limite (17.18). Se f é contínua em toda Q, é possível provar o seguinte.

Teorema de cálculo (17.19)

$$\iiint_Q f(x, y, z)\, dV = \iint_R \left[\int_{k_1(x,y)}^{k_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right] dA$$

UFPB/BIBLIOTECA/PIRAI

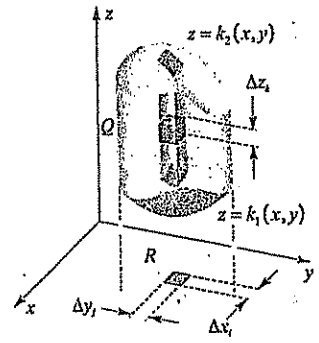


Figura 17.39

A notação à direita de (17.19) significa que, após integrar primeiro em relação a z, calculamos a integral dupla resultante sobre a região R do plano-xy aplicando os métodos da Seção 17.1. Assim, para uma região R_x como a da Figura 17.8(i),

$$\iiint_Q f(x, y, z)\, dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{k_1(x,y)}^{k_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

O símbolo à direita desta equação é uma **integral tripla iterada**. É calculada por meio de integrações parciais $f(x, y, z)$ na ordem z, y, x, com os limites indicados substituídos na forma usual. Analogamente, para uma região R_y como a da Figura 17.8(ii),

$$\iiint_Q f(x, y, z)\, dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{k_1(x,y)}^{k_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy$$

É conveniente encarar qualquer uma das duas últimas integrais como um limite de uma *soma tripla*,

$$\sum_i \sum_j \sum_k f(u_i, v_j, w_k)\, \Delta z_k\, \Delta y_j\, \Delta x_i$$

em que a primeira somatório (em relação a k) corresponde a uma coluna de (pequenas) caixas, na direção paralela ao eixo-z, da superfície inferior (com equação $z = k_1(x, y)$) para a superfície superior (com equação $z = k_2(x, y)$), conforme ilustrado na Figura 17.39. As duas somatórias restantes se efetuam sobre a região R do plano-xy, de acordo com o que vimos no caso das integrais duplas na Seção 17.1.

EXEMPLO 2

Expresse $\iiint_Q f(x, y, z)\, dV$ como uma integral iterada se Q é a região do primeiro octante delimitada pelos planos coordenados, pelo parabolóide $z = 2 + x^2 + \frac{1}{4}y^2$ e pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

SOLUÇÃO

Como se vê na Figura 17.40(i), Q está sob o parabolóide e sobre o plano-xy. A região R no plano-xy é delimitada pelos eixos coordenados e pelo gráfico de $y = \sqrt{1 - x^2}$. A figura exibe também uma coluna que corresponde a uma primeira somatória sobre os paralelepípedos de volumes $\Delta z_k\, \Delta y_j\, \Delta x_i$ na direção do eixo-z.

Como a coluna se estende do plano-xy ao parabolóide, o limite inferior de integração em relação a z é $z = 0$ e o limite superior é $z = 2 + x^2 + \frac{1}{4}y^2$. A segunda e a terceira integrações se efetuam sobre a região R no plano-xy (ver Figura 17.40(ii)).

(i) (ii)

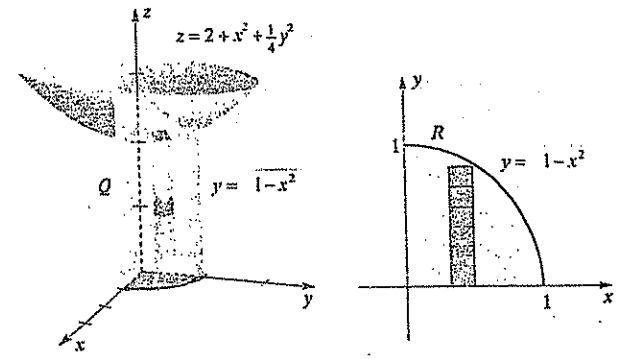


Figura 17.40

Assim, a integral em (17.19) tem a forma

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{2+x^2+(1/4)y^2} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

Se $f(x, y, z) = 1$ em toda uma região Q, então a integral tripla de f sobre Q se escreve $\iiint_Q dV$ e seu valor é o volume de Q. No Exemplo 2, o volume V da região Q da Figura 17.40(i) é dado por

$$V = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{2+x^2+(1/4)y^2} dz\, dy\, dx$$

Poderíamos, naturalmente, obter o volume por meio de uma integral dupla, como na Seção 17.2. A razão por que utilizamos uma integral tripla aqui e nos exemplos seguintes é que desejamos desenvolver a prática em lidar com limites de somas triplas. Esta mesma técnica será usada mais adiante em problemas que *não podem* ser resolvidos por integrais duplas.

EXEMPLO 3

Ache o volume V do sólido delimitado pelo cilindro $y = x^2$ e pelos planos $y + z = 4$ e $z = 0$.

SOLUÇÃO

A Figura 17.41(i) ilustra o sólido, juntamente com uma coluna correspondente a uma primeira somatória na direção do eixo-z. Note que a coluna se estende de $z = 0$ a $z = 4 - y$. A região R no

plano-xy aparece na Figura 17.41(ii), juntamente com um retângulo correspondente à primeira integração (de uma integral dupla) em relação a y. Aplicando (17.19) com $f(x, y, z) = 1$, temos

$$V = \int_{-2}^{2} \int_{x^2}^{4} \int_0^{4-y} dz\, dy\, dx = \int_{-2}^{2} \int_{x^2}^{4} \left[z \right]_0^{4-y} dy\, dx$$

$$= \int_{-2}^{2} \int_{x^2}^{4} (4 - y)\, dy\, dx = \int_{-2}^{2} \left[4y - \tfrac{1}{2}y^2 \right]_{x^2}^{4} dx$$

$$= \int_{-2}^{2} (8 - 4x^2 + \tfrac{1}{2}x^4)\, dx = \left[8x - \tfrac{4}{3}x^3 + \tfrac{1}{10}x^5 \right]_{-2}^{2}$$

$$= \frac{256}{15} \approx 17$$

(i) (ii)

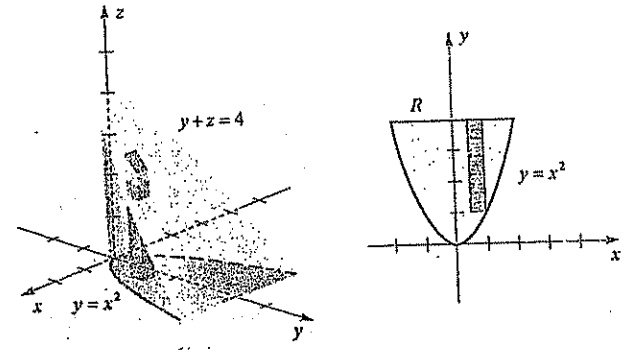


Figura 17.41

Tomando a ordem $dx\,dy$ para a integral dupla, o retângulo na Figura 17.41(ii) será horizontal e a fórmula para V se tornará

$$V = \int_0^4 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \int_0^{4-y} dz\, dx\, dy$$

Algumas integrais triplas podem ser calculadas por uma integral tripla iterada em que a primeira integração é em relação a y. Assim, consideremos

$$Q = \{(x, y, z): a \le x \le b, h_1(x) \le z \le h_2(x), k_1(x, z) \le y \le k_2(x, z)\}$$

em que h_1 e h_2 são funções contínuas em $[a, b]$ e k_1 e k_2 são funções dotadas de derivadas parciais primeiras contínuas na região R do plano-xz exibido na Figura 17.42. Note que Q está entre os gráficos de $y = k_1(x, z)$ e $y = k_2(x, z)$. A projeção R de Q sobre o plano-xz é uma região R_{xz}. Neste caso temos:

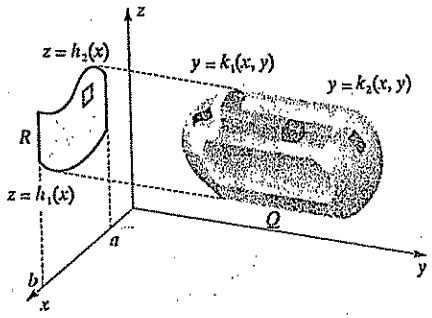


Figura 17.42

Teorema de cálculo (17.20)

$$\iiint_Q f(x, y, z)\, dV = \int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int_{k_1(x,z)}^{k_2(x,z)} f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx$$

A integral iterada em (17.20) pode ser interpretada como um limite de somas triplas obtidas somando-se primeiro sobre uma linha de pequenos paralelepípedos na direção paralela ao eixo-y da superfície à esquerda (com equação $y = k_1(x, z)$) para a superfície à direita (com equação $y = k_2(x, z)$), conforme indicado na Figura 17.42. Calcula-se então a integral dupla resultante sobre a região R no plano-xz, como ilustrado no próximo exemplo.

EXEMPLO 4

Ache o volume da região Q delimitada pelos gráficos de $z = 3x^2$, $z = 4 - x^2$, $y = 0$ e $z + y = 6$.

SOLUÇÃO

Conforme Figura 17.43(i), Q está sob o cilindro $z = 4 - x^2$, sobre o cilindro $z = 3x^2$, à direita do plano-xz e à esquerda do plano $z + y = 6$. Logo, Q é uma região do tipo ilustrado na Figura 17.42 com $k_1(x, z) = 0$ e $k_2(x, z) = 6 - z$. A Figura 17.43(ii) ilustra a região R no plano-xz. Aplicando (17.20), temos

$$V = \iiint_Q dV = \int_{-1}^{1} \int_{3x^2}^{4-x^2} \int_0^{6-z} dy\, dz\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \int_{3x^2}^{4-x^2} \left[y \right]_0^{6-z} dz\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \int_{3x^2}^{4-x^2} (6 - z)\, dz\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[6z - \tfrac{1}{2} z^2 \right]_{3x^2}^{4-x^2} dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (16 - 20x^2 + 4x^4)\, dx$$

$$= \frac{304}{15} \approx 20{,}3$$

(i) (ii)

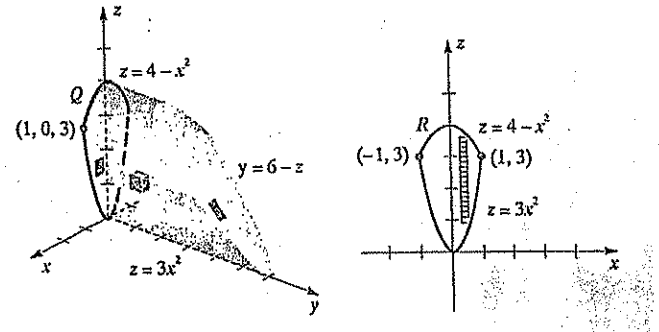


Figura 17.43

Se tivéssemos tomado uma ordem diferente de integração, teriam sido necessárias várias integrais triplas. (Você vê a razão disto?)

Finalmente, se Q é uma região do tipo ilustrado na Figura 17.44, em que as funções p_1 e p_2 têm derivadas parciais primeiras

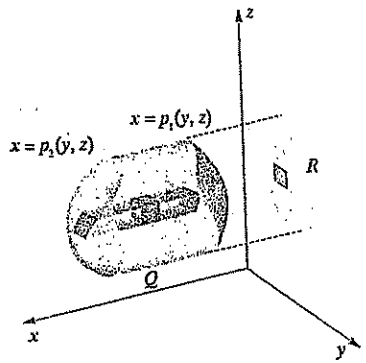


Figura 17.44

contínuas em uma região conveniente R do plano-yz, então

$$\iiint_Q f(x, y, z)\, dV = \iint_R \left[\int_{p_1(y,z)}^{p_2(y,z)} f(x, y, z)\, dx \right] dA$$

Na integral dupla iterada final, dA será substituído por $dz\,dy$ ou $dy\,dz$.

EXEMPLO 5

No Exemplo 3 consideramos o sólido delimitado pelo cilindro $y = x^2$ e os planos $y + z = 4$ e $z = 0$. Estabeleça uma integral tripla para o volume deste sólido, com a primeira integração em relação a x.

SOLUÇÃO

O sólido está reesboçado na Figura 17.45(i). Uma primeira integração em relação a x corresponde a uma somatória ao longo de uma coluna de pequenos paralelepípedos na direção paralela ao eixo-x, estendendo-se do gráfico de $x = -\sqrt{y}$ ao gráfico de $x = \sqrt{y}$. A região R no plano-yz está entre esses gráficos e é delimitada pelos eixos y e z e a reta $y + z = 4$, conforme Figura 17.45(ii).

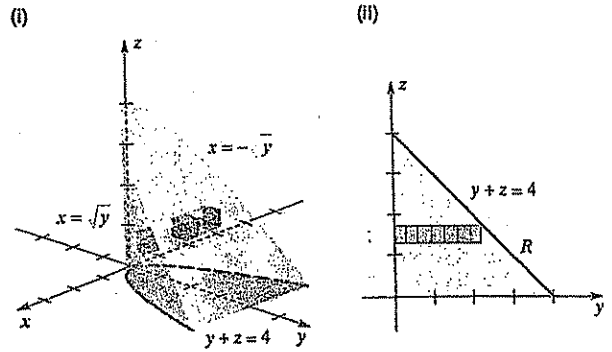


Figura 17.45

Se a segunda integração é em relação a y, conforme indicado pela linha de retângulos na Figura 17.45(ii), então

$$V = \int_0^4 \int_0^{4-z} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx\, dy\, dz$$

Tomando a segunda integração em relação a z em lugar de y, a integral iterada é

$$V = \int_0^4 \int_0^{4-y} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx\, dz\, dy$$

Na próxima seção utilizaremos integrais triplas para achar o *centro de massa* de um sólido. Concluiremos esta seção discutindo as aplicações preliminares da determinação da massa de um sólido.

Se um sólido tem massa m e volume V e se a massa é distribuída uniformemente por todo o sólido, dizemos que o sólido é **homogêneo**. A **densidade de massa** δ se define como

$$\delta = \frac{m}{V} \quad \text{ou} \quad m = \delta V$$

Assim, δ é massa por unidade de volume. Se, por exemplo, m está em quilogramas e V em metros cúbicos, então δ está em kg/m^3.

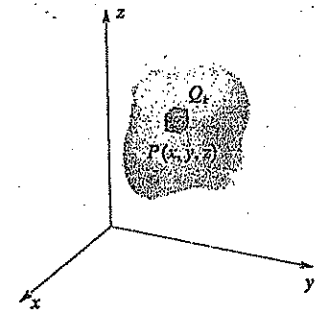


Figura 17.46

Consideremos a seguir um **sólido não-homogêneo**, em que a densidade de massa não é a mesma em todo ele. Por exemplo, um objeto pode consistir em metais diferentes, tais como cobre, ferro e ouro, formando um todo único. Começamos

por introduzir um sistema de coordenadas como na Figura 17.46, em que o sólido tem a forma da região Q. Para definir a densidade de massa $\delta(x, y, z)$ em um ponto $P(x, y, z)$, consideremos uma sub-região Q_k em forma de caixa que contenha P e tenha volume ΔV_k e massa Δm_k (ver Figura 17.46). Se a maior diagonal $\|\Delta V_k\|$ da caixa é pequena, é de se esperar que $\Delta m_k/\Delta V_k$ seja uma aproximação de $\delta(x, y, z)$. Isto motiva a definição seguinte.

Definição de densidade de massa (17.21)

$$\delta(x, y, z) = \lim_{\|\Delta V_k\| \to 0} \frac{\Delta m_k}{\Delta V_k}$$

Se o limite em (17.21) existe e $\|\Delta V_k\| \approx 0$, então

$$\Delta m_k \approx \delta(x, y, z)\, \Delta V_k$$

Em alguns casos poderemos conhecer a densidade $\delta(x, y, z)$ e querer achar a massa. Se δ é uma função contínua e Q é uma região conveniente, então consideramos uma partição interior $\{Q_k\}$ de Q, escolhemos um ponto (x_k, y_k, z_k) em cada Q_k, e formamos a soma de Riemann $\sum_k \delta(x_k, y_k, z_k)\, \Delta V_k$. Podemos definir a massa m de Q como um limite de tais somas, o que nos dá o seguinte.

Massa de um sólido (17.22)

$$m = \iiint_Q \delta(x, y, z)\, dV$$

EXEMPLO 6

Um sólido tem a forma de um cilindro circular reto com raio da base a e altura h. Ache a massa se a densidade em um ponto P é diretamente proporcional à distância de uma das bases a P.

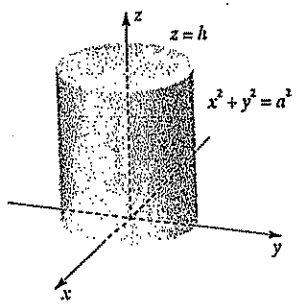


Figura 17.47

SOLUÇÃO

Introduzindo um sistema coordenado como o da Figura 17.47, o sólido é limitado pelos gráficos de $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$ e $z = h$. Pela hipótese, a densidade em (x, y, z) é $\delta(x, y, z) = kz$ para uma constante k. Pela forma de δ e a simetria do sólido podemos calcular m para a parte do primeiro octante e multiplicar o resultado por 4. Aplicando (17.22), temos

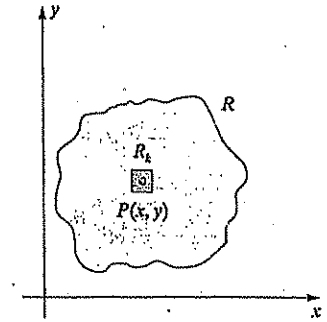


Figura 17.48

$$m = 4\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^h kz\, dz\, dy\, dx$$

$$= 4k\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \left[\tfrac{1}{2}z^2\right]_0^h dy\, dx$$

$$= 4k\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \tfrac{1}{2}h^2\, dy\, dx$$

$$= 4k \cdot \tfrac{1}{2}h^2 \int_0^a \left[y\right]_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx$$

$$= 2kh^2 \int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\, dx$$

$$= 2kh^2 \cdot \tfrac{1}{4}\pi a^2 = \tfrac{1}{2}\pi k h^2 a^2$$

Discussão análoga à precedente vale para uma lâmina com a forma de uma região R do plano-xy. Consideremos uma sub-região retangular R_k que contenha o ponto P e tenha área ΔA_k (ver Figura 17.48). Neste caso, a **densidade de massa por área** em $P(x, y)$ é definida por

$$\delta(x, y) = \lim_{\|\Delta A_k\| \to 0} \frac{\Delta m_k}{\Delta A_k}$$

As unidades de $\delta(x, y)$ são *massa por unidade de área*, como kg/m^2. Vale para uma lâmina de fórmula análoga a (17.22):

Massa de uma lâmina (17.23)

$$m = \iint_R \delta(x, y)\, dA$$

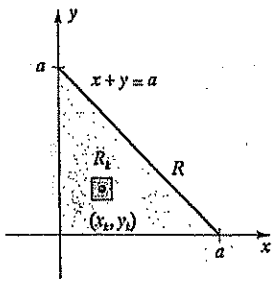


Figura 17.49

EXEMPLO 7

Uma lâmina tem a forma de um triângulo retângulo isósceles com lados iguais de comprimento a. Ache a massa, se a densidade de massa por área em um ponto P é diretamente proporcional ao quadrado da distância de P ao vértice oposto à hipotenusa.

SOLUÇÃO

É conveniente introduzir um sistema coordenado como o da Figura 17.49, com o vértice na origem e a hipotenusa do triângulo ao longo da reta $x + y = a$. A figura exibe também um retângulo típico R_k (de área ΔA_k) de uma partição interior com um ponto (x_k, y_k) no retângulo.

Por hipótese, a densidade de massa por área em (x, y) é $\delta(x, y) = k(x^2 + y^2)$ para uma constante k. Pela Definição (17.23) e o Teorema (17.8), a massa é

$$m = \iint_R k(x^2 + y^2)\, dA = \int_0^a \int_0^{a-x} k(x^2 + y^2)\, dy\, dx$$

$$= k \int_0^a \left[x^2 y + \tfrac{1}{3} y^3 \right]_0^{a-x} dx$$

$$= k \int_0^a [x^2(a-x) + \tfrac{1}{3}(a-x)^3]\, dx$$

A última integral é igual a $\frac{1}{6} ka^4$.

EXERCÍCIOS 17.5

Exercs. 1-6: Calcule a integral iterada.

1 $\int_0^3 \int_{-1}^0 \int_1^2 (x + 2y + 4z)\, dx\, dy\, dz$

2 $\int_0^1 \int_{-1}^2 \int_1^3 (6x^2 z + 5xy^2)\, dz\, dx\, dy$

3 $\int_0^1 \int_{x+1}^{2x} \int_z^{x+z} x\, dy\, dz\, dx$

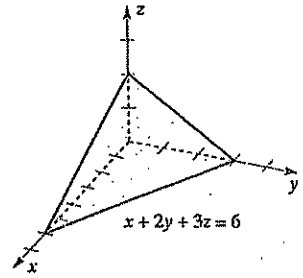
4 $\int_1^2 \int_0^{z^2} \int_{x+z}^{x-z} z\, dy\, dx\, dz$

5 $\int_{-1}^2 \int_1^{x^2} \int_0^{x+y} 2x^2 y\, dz\, dy\, dx$

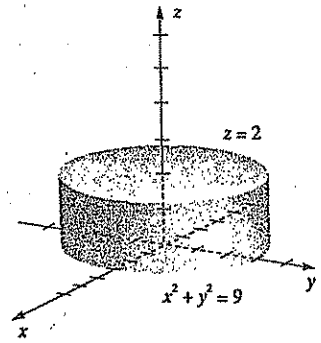
6 $\int_2^3 \int_0^{3y} \int_1^{\sqrt{z}} (2x + y + z)\, dx\, dz\, dy$

Exercs. 7-10: Se f é uma função contínua arbitrária de três variáveis e Q é a região exibida na figura, expresse $\iiint_Q f(x, y, z)\, dV$ como uma integral tripla iterada de seis maneiras diferentes.

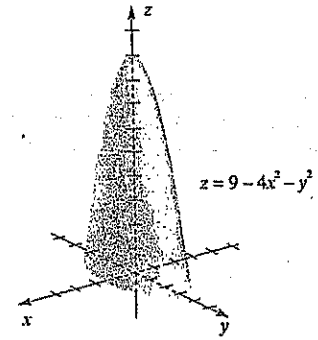
7



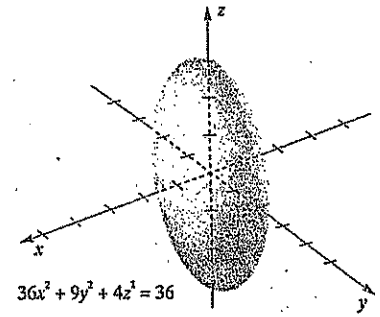
8



9



10



Exercs. 11-20: Esboce a região delimitada pelos gráficos das equações, e use uma integral tripla para achar seu volume.

11 $z + x^2 = 4$, $y + z = 4$, $y = 0$, $z = 0$

12 $x^2 + z^2 = 4$, $y^2 + z^2 = 4$

13 $y = 2 - z^2$, $y = z^2$, $x + z = 4$, $x = 0$

14 $z = 4y^2$, $z = 2$, $x = 2$, $x = 0$

15 $y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 2$, $x = 0$

16 $z = x^2 + y^2$, $y + z = 2$

17 $z = 9 - x^2$, $z = 0$, $y = -1$, $y = 2$

18 $z = e^{x+y}$, $y = 3x$, $x = 2$, $y = 0$, $z = 0$

19 $z = x^3$, $z = x^3$, $y = z^2$, $y = 0$

20 $y = x^2 + z^2$, $z = x^2$, $z = 4$, $y = 0$

Exercs. 21-22: Sejam a, b e c números positivos.

21 Ache o volume do tetraedro delimitado pelos planos coordenados e o plano

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

22 Ache o volume do sólido delimitado pelo elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Exercs. 23-28: A integral iterada representa o volume de uma região Q em um sistema coordenado xyz. Descreva Q.

23 $\int_0^1 \int_{\sqrt{1-z}}^{\sqrt{4-z}} \int_2^3 dx\, dy\, dz$

24 $\int_0^1 \int_{z^3}^{\sqrt{z}} \int_0^{4-x} dy\, dx\, dz$

25 $\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} \int_0^{x+y} dz\, dy\, dx$

26 $\int_0^1 \int_x^{3x} \int_0^{xy} dz\, dy\, dx$

27 $\int_1^2 \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} dy\, dx\, dz$

28 $\int_1^4 \int_{-z}^{z} \int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} dx\, dy\, dz$

Exercs. 29-30: Uma lâmina com densidade de massa por área $\delta(x, y)$ tem a forma da região delimitada pelos gráficos das equações. Estabeleça uma integral tripla iterada para achar a massa da lâmina.

29 $\delta(x, y) = y^2$; $y = e^{-x}$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$

30 $\delta(x, y) = x^2 + y^2$; $xy^2 = 1$, $x = 0$, $y = 1$, $y = 2$

Exercs. 31-32: Um sólido de densidade $\delta(x, y, z)$ tem a forma da região delimitada pelos gráficos das equações. Estabeleça uma integral tripla iterada para calcular a massa do sólido.

31 $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2$; $x + 2y + z = 4$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

32 $\delta(x, y, z) = z + 1$; $z = 4 - x^2 - y^2$, $z = 0$

33 Próximo do nível do mar, a densidade δ da atmosfera terrestre a uma altura de z metros pode ser aproximada por $\delta = 1{,}225 - 0{,}000113z$ kg/m^3. Aproxime a massa de uma região da atmosfera que

tenha a forma de um cubo com 1 quilômetro de aresta e uma das faces apoiada na superfície da terra.

34 Para uma altitude z de até 30.000 metros, a densidade δ (em kg/m^3) da atmosfera terrestre pode ser aproximada por $\delta = 1{,}2 - (1{,}096 \times 10^{-4})z + (3{,}42 \times 10^{-9})z^2 - (3{,}6 \times 10^{-14})z^3$.

A pressão média P (em newtons) em uma região da superfície da terra de área A causada pelo volume Q da atmosfera pode ser estimada por

$$P = \frac{1}{A}\iiint_Q \delta g \, dV$$

em que $g = 9{,}80$ m/seg^2 é uma constante gravitacional. Estime a pressão exercida por uma coluna de ar de 30.000 metros de altura sobre um metro quadrado da superfície terrestre. (A pressão atmosférica padrão sobre um metro quadrado é 101.325 newtons).

Exercs. 35-36: Um sólido cúbico delimitado pelos planos coordenados e pelos planos $x = y = z = 1$ tem a densidade dada $\delta(x, y, z)$. Aproxime sua massa calculando

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \delta(u_i, v_j, w_k)\,\Delta x_k\,\Delta y_j\,\Delta x_i$$

para o valor indicado de n, em que cada incremento é igual a $1/n$ e $u_i = (i - \frac{1}{2})/n$, $v_j = (j - \frac{1}{2})/n$, e $w_k = (k - \frac{1}{2})/n$.

35 $\delta(x, y, z) = \sqrt{x^3 + y^3 + z^3}$; $n = 2$

36 $\delta(x, y, z) = \tan(xy \cos z)$; $n = 4$

17.6 MOMENTOS E CENTROS DE MASSA

Os momentos e o centro de massa de uma lâmina homogênea já foram abordados na Seção 6.7. Podemos utilizar integrais duplas para estender esses conceitos a uma lâmina *não-homogênea* L que tenha a forma de uma região R do plano-xy. Se a densidade de massa por área no ponto (x, y) é $\delta(x, y)$ e δ é uma função contínua em R, então, por (17.23), a massa m de L é dada por

$$m = \iint_R \delta(x, y)\, dA$$

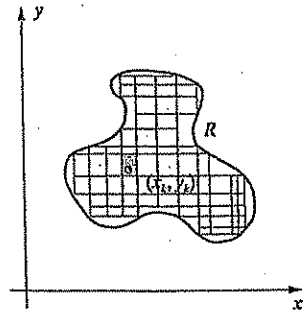


Figura 17.50

Seja uma partição interior $P = \{R_k\}$ de R e, para cada k, seja (x_k, y_k) um ponto arbitrário de R_k (ver Figura 17.50). Como δ é contínua, uma pequena variação em (x, y) acarreta uma pequena variação na densidade $\delta(x, y)$, isto é, δ é *quase constante* em R_k. Logo, se $\|P\| \to 0$, a massa Δm_k que corresponde a R_k pode ser aproximada por $\delta(x_k, y_k)\,\Delta A_k$, em que ΔA_k é a área de R_k. Admitindo a massa Δm_k concentrada em (x_k, y_k), então o momento deste elemento de L em relação ao eixo-x é o produto $y_k\delta(x_k, y_k)\,\Delta A_k$. Como a soma dos momentos $\sum_k y_k\delta(x_k, y_k)\,\Delta A_k$ deve aproximar-se do momento da *lâmina*, definimos o momento M_x de L em relação ao eixo-x como segue:

$$M_x = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_k y_k\delta(x_k, y_k)\,\Delta A_k = \iint_R y\delta(x, y)\, dA$$

Da mesma forma, o momento M_y de L em relação ao eixo-y é

$$M_y = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_k x_k\delta(x_k, y_k)\,\Delta A_k = \iint_R x\delta(x, y)\, dA$$

Tal como na Definição (6.24), definimos o centro de massa (ou centro de gravidade) da lâmina como o ponto $(\bar{x}, \bar{y})$ tal que $\bar{x} = M_y/m$, $\bar{y} = M_x/m$.

Isto nos dá:

Definição (17.24)

Seja L uma lâmina com a forma de uma região R do plano-xy. Se a densidade de massa por área em (x, y) é $\delta(x, y)$ e se δ é contínua em R, então a massa m, os momentos M_x e M_y e o centro de massa $(\bar{x}, \bar{y})$ são

(i) $$m = \iint_R \delta(x, y)\, dA$$

(ii) $$M_x = \iint_R y\delta(x, y)\, dA, \quad M_y = \iint_R x\delta(x, y)\, dA$$

(iii) $$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\iint_R x\delta(x, y)\, dA}{\iint_R \delta(x, y)\, dA}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\iint_R y\delta(x, y)\, dA}{\iint_R \delta(x, y)\, dA}$$

Se L é homogênea, então a densidade de massa por área $\delta(x, y)$ é constante e pode ser cancelada em (17.24)(iii).

Assim, como na Seção 6.7, o centro de massa de uma lâmina homogênea depende apenas de sua forma; $(\bar{x}, \bar{y})$ é o centróide da região R.

EXEMPLO 1

Uma lâmina tem a forma de um triângulo retângulo isósceles com lados iguais de comprimento a. A densidade de massa por área no ponto P é diretamente proporcional ao quadrado da distância de P ao vértice oposto à hipotenusa. Ache o centro de massa.

SOLUÇÃO

A lâmina é a mesma que a do Exemplo 7 da Seção 17.5, em que colocamos o triângulo conforme a Figura 17.51. Utilizando a densidade de massa por área $\delta(x, y) = k(x^2 + y^2)$ obtivemos $m = \frac{1}{6}ka^4$. Pela Definição (17.24)(ii),

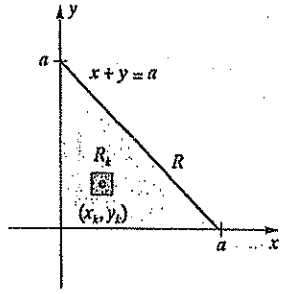


Figura 17.51

$$M_y = \iint_R xk(x^2 + y^2)\, dA = \int_0^a \int_0^{a-x} xk(x^2 + y^2)\, dy\, dx$$

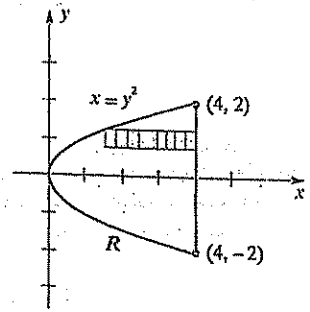


Figura 17.52

que é igual a $\frac{1}{15}ka^5$. Pela Definição (17.24)(iii),

$$\bar{x} = \frac{\frac{1}{15}ka^5}{\frac{1}{6}ka^4} = \frac{2}{5}a$$

Analogamente, $M_x = \frac{1}{15}ka^5$ e $\bar{y} = \frac{2}{5}a$. Assim, o centro de massa (*ponto de equilíbrio*) da lâmina é $(\frac{2}{5}a, \frac{2}{5}a)$.

EXEMPLO 2

Uma lâmina tem a forma da região R do plano-xy delimitada pela parábola $x = y^2$ e a reta $x = 4$. A densidade de massa por área no ponto $P(x, y)$ é diretamente proporcional à distância do eixo-y a P. Ache o centro de massa.

SOLUÇÃO

A Figura 17.52 ilustra a região. Por hipótese, a densidade de massa por área em (x, y) é $\delta(x, y) = kx$ para uma constante k. Segue-se, da forma de δ e da simetria da região, que o centro de massa está sobre o eixo-x, isto é, $\bar{y} = 0$.

Pela Definição (17.24)(i) e integrando primeiro em relação a x, conforme indicado pela linha de retângulos na Figura 17.52, temos

$$m = \iint_R kx\,dA = k\int_{-2}^{2}\int_{y^2}^{4} x\,dx\,dy$$

$$= k\int_{-2}^{2}\left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_{y^2}^{4} dy = \tfrac{1}{2}k\int_{-2}^{2}(16 - y^4)\,dy = \tfrac{128}{5}k$$

Pela Definição (17.24)(ii),

$$M_y = \iint_R x(kx)\,dA = k\int_{-2}^{2}\int_{y^2}^{4} x^2\,dx\,dy$$

$$= k\int_{-2}^{2}\left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_{y^2}^{4} dy = \tfrac{1}{3}k\int_{-2}^{2}(64 - y^6)\,dy = \tfrac{512}{7}k$$

Conseqüentemente,

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{512k}{7}\cdot\frac{5}{128k} = \frac{20}{7} \approx 2{,}86$$

Logo, o centro de massa é $(\frac{20}{7}, 0)$.

Os momentos M_x e M_y na Definição (17.24) são também chamados *primeiros momentos* de L em relação aos eixos coordenados. Tomando os *quadrados* das distâncias dos eixos coordenados, obtemos os *segundos momentos*, ou **momentos de inércia**, I_x e I_y em relação ao eixo-x e ao eixo-y, respectivamente. A soma $I_0 = I_x + I_y$ é o **momento polar de inércia**, ou **momento de inércia em relação à origem**. Na fórmula seguinte, I_0 pode ser obtido como limite de uma soma, utilizando-se o *quadrado* da distância da origem a (x_k, y_k) na Figura 17.50.

Momentos de inércia de uma lâmina (17.25)

$$I_x = \lim_{\|P\|\to 0}\sum_k y_k^2\delta(x_k, y_k)\,\Delta A_k = \iint_R y^2\delta(x, y)\,dA$$

$$I_y = \lim_{\|P\|\to 0}\sum_k x_k^2\delta(x_k, y_k)\,\Delta A_k = \iint_R x^2\delta(x, y)\,dA$$

$$I_0 = \lim_{\|P\|\to 0}\sum_k (x_k^2 + y_k^2)\delta(x_k, y_k)\,\Delta A_k = \iint_R (x^2 + y^2)\delta(x, y)\,dA$$

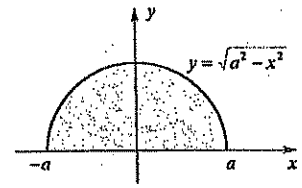


Figura 17.53

EXEMPLO 3

Uma lâmina tem a forma semicircular da Figura 17.53. A densidade de massa por área é diretamente proporcional à distância do eixo-x. Ache o momento de inércia em relação ao eixo-x.

SOLUÇÃO

Por hipótese, a densidade de massa por área em (x, y) é $\delta(x, y) = ky$. Aplicando (17.25), vemos que o momento de inércia em relação ao eixo-x é

$$I_x = \int_{-a}^{a}\int_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}} y^2(ky)\,dy\,dx = k\int_{-a}^{a}\left[\tfrac{1}{4}y^4\right]_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx$$

$$= \tfrac{1}{4}k\int_{-a}^{a}(a^4 - 2a^2x^2 + x^4)\,dx = \tfrac{4}{15}ka^5$$

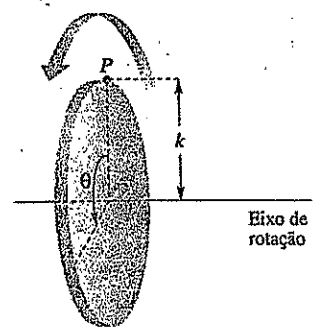


Figura 17.54

Os momentos de inércia são úteis em problemas que envolvem a rotação de um objeto em torno de um eixo fixo, como, por exemplo, a rotação de uma roda (ou um disco) em torno de um eixo (ver Figura 17.54). Se uma partícula P da roda tem massa m e está a uma distância k do eixo de rotação, então o momento de inércia I de P em relação ao eixo é mk^2. Se a velocidade

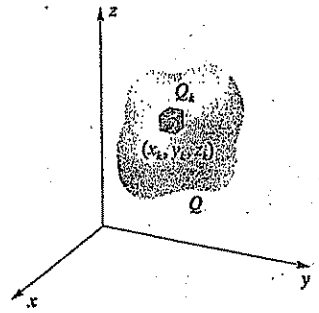


Figura 17.55

angular $d\theta/dt$ é uma constante ω, então a velocidade v da partícula é $k\omega$. Da física, sabemos que a energia cinética EC de P é

$$\text{EC} = \tfrac{1}{2} m v^2$$

Como $v = k\omega$, $$\text{EC} = \tfrac{1}{2} m k^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Representando a roda por um disco e introduzindo um limite de somas, pode-se deduzir a mesma fórmula para a energia cinética da roda. A fórmula pode aplicar-se também a lâminas de forma não circular. A energia cinética de um objeto em rotação indica ao engenheiro ou ao físico a quantidade de trabalho necessária para fazer parar o objeto. Como $\text{EC} = \frac{1}{2} I\omega^2$, *a energia cinética é diretamente proporcional ao momento de inércia*. Para ω fixo, quanto maior o momento de inércia, maior a quantidade de trabalho necessária para cessar a rotação.

Consideremos agora um sólido com a forma de uma região tridimensional Q. Suponhamos que a densidade de massa (massa por unidade de volume) em (x, y, z) seja $\delta(x, y, z)$ e que δ seja contínua em toda Q. Seja $\{Q_k\}$ uma partição interior de Q, e seja ΔV_k o volume de Q_k. Se (x_k, y_k, z_k) é um ponto de Q_k (ver Figura 17.55), então a massa correspondente é aproximadamente $\delta(x_k, y_k, z_k)\,\Delta V_k$. Por (17.22), a massa do sólido é o limite de tais somas – isto é, $\iiint_Q \delta(x, y, z)\, dV$.

O *momento em relação ao plano-xy* da parte do sólido que corresponde Q_k é aproximado por $z_k\delta(x_k, y_k, z_k)\,\Delta V_k$ (ver Figura 17.55). Somando e tomando limite, obtemos o **momento M_{xy} do sólido em relação ao plano-xy** (ver (17.26)(ii)). Os **momentos M_{xz} e M_{yz} em relação aos planos xz e yz**, respectivamente, obtêm-se de maneira análoga. O **centro de massa** $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ do sólido se define em (17.26)(iii).

Momentos e centros de massa em três dimensões (17.26)

(i) $$m = \iiint_Q \delta(x, y, z)\, dV$$

(ii) $$M_{xy} = \iiint_Q z\delta(x, y, z)\, dV$$
$$M_{xz} = \iiint_Q y\delta(x, y, z)\, dV$$
$$M_{yz} = \iiint_Q x\delta(x, y, z)\, dV$$

(iii) $$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}; \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m}; \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}$$

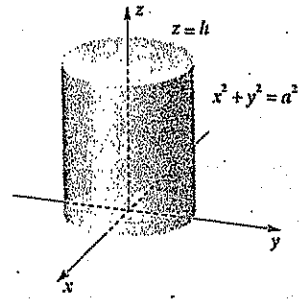


Figura 17.56

Por (iii) de (17.26),

$$m\bar{x} = M_{yz}, \quad m\bar{y} = M_{xz}, \quad m\bar{z} = M_{xy}$$

Como $m\bar{x}$, $m\bar{y}$, $m\bar{z}$ são os momentos, em relação aos planos yz, xz e xy, respectivamente, de um ponto de massa localizado em $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, podemos interpretar o centro de massa de um sólido como o ponto em que a massa total pode concentrar-se para originar os momentos M_{yz}, M_{xz} e M_{xy} do sólido.

Se o sólido é homogêneo, a densidade de massa δ é constante e, assim, δ pode ser cancelada após substituição em (17.26)(iii). Conseqüentemente, o centro de massa de um sólido homogêneo depende somente da forma de Q. Tal como em duas dimensões, o ponto correspondente para sólidos geométricos é chamado **centróide** do sólido. Para achar o centróide, fazemos $\delta(x, y, z) = 1$ em (17.26).

EXEMPLO 4

Um sólido tem a forma de um cilindro circular reto de raio da base a e altura h. A densidade em um ponto P é diretamente proporcional à distância de uma das bases a P. Ache o centro de massa.

SOLUÇÃO

No Exemplo 6 da Seção 17.5 situamos o sólido como na Figura 17.56. Com $\delta(x, y, z) = kz$, obtivemos $m = \frac{1}{2}\pi k h^2 a^2$.

O centro de massa está no eixo-z, de modo que basta achar $\bar{z} = M_{xy}/m$. Além disso, em razão da forma de δ e da simetria do sólido, podemos calcular M_{xy} para a parte do primeiro octante e multiplicar por 4. Utilizando (17.26), temos

$$\begin{aligned}
M_{xy} &= 4\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^h z(kz)\, dz\, dy\, dx \\
&= 4k\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^h dy\, dx \\
&= 4k\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{h^3}{3}\, dy\, dx \\
&= \tfrac{4}{3}kh^3 \int_0^a \Big[y\Big]_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx \\
&= \tfrac{4}{3}kh^3 \int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\, dx \\
&= \tfrac{4}{3}kh^3 \cdot \tfrac{1}{4}\pi a^2 = \tfrac{1}{3}\pi k h^3 a^2
\end{aligned}$$

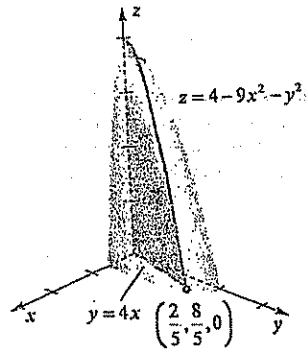


Figura 17.57

Finalmente, calculamos o centro de massa:

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\frac{1}{3}\pi k h^3 a^2}{\frac{1}{2}\pi k h^2 a^2} = \frac{2}{3}h$$

Logo, o centro de massa está sobre o eixo do cilindro, a dois terços da distância da base inferior.

EXEMPLO 5

Um sólido tem a forma da região do primeiro octante delimitada pelo paraboloide $z = 4 - 9x^2 - y^2$ e os planos $y = 4x$, $z = 0$ e $y = 0$. A densidade em $P(x, y, z)$ é proporcional à distância da origem a P. Estabeleça integrais iteradas para calcular $\bar{x}$.

SOLUÇÃO

A Figura 17.57 ilustra a região. A densidade em (x, y, z) é $\delta(x, y, z) = k(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ para algum k. (17.26) nos dá

$$m = \int_0^{8/5} \int_{y/4}^{\sqrt{4-y^2}/3} \int_0^{4-9x^2-y^2} k(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}\, dz\, dx\, dy$$

$$M_{yz} = \int_0^{8/5} \int_{y/4}^{\sqrt{4-y^2}/3} \int_0^{4-9x^2-y^2} xk(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}\, dz\, dx\, dy$$

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}$$

Se uma partícula de massa m está no ponto (x, y, z), então sua distância ao eixo-z é $(x^2 + y^2)^{1/2}$ e seu **momento de inércia I_z em relação ao eixo-z** define-se como $(x^2 + y^2)m$. Da mesma forma, **os momentos de inércia I_x e I_y em relação aos eixos x e y** são $(y^2 + z^2)m$ e $(x^2 + z^2)m$, respectivamente. Para sólidos com a forma de Q na Figura 17.55, empregamos limites de somas na maneira usual para obter o seguinte.

Momentos de inércia de sólidos (17.27)

$$I_z = \iiint_Q (x^2 + y^2)\delta(x, y, z)\, dV$$

$$I_x = \iiint_Q (y^2 + z^2)\delta(x, y, z)\, dV$$

$$I_y = \iiint_Q (x^2 + z^2)\delta(x, y, z)\, dV$$

EXEMPLO 6

Ache o momento de inércia, em relação ao eixo de simetria, do sólido cilíndrico descrito no Exemplo 4.

SOLUÇÃO

O sólido está esboçado na Figura 17.56. Utilizando (17.27) com $\delta(x, y, z) = kz$ e lançando mão da simetria e do fato de que δ é uma função de z somente, temos

$$I_z = 4\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^h (x^2 + y^2)\, kz\, dz\, dy\, dx$$

$$= 4k\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (x^2 + y^2)\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^h dy\, dx$$

$$= 2kh^2\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (x^2 + y^2)\, dy\, dx$$

$$= 2kh^2\int_0^a \left[x^2 y + \tfrac{1}{3}y^3\right]_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx$$

$$= 2kh^2\int_0^a \left[x^2\sqrt{a^2 - x^2} + \tfrac{1}{3}\sqrt{(a^2 - x^2)^3}\right] dx$$

A última integral pode ser calculada por substituição trigonométrica ou com auxílio de uma tábua de integrais. O resultado é $I_z = \frac{1}{4}\pi k h^2 a^4$.

EXEMPLO 7

Um sólido homogêneo tem a forma da região Q delimitada pelo cone $x^2 - y^2 + z^2 = 0$ e o plano $y = 3$. Estabeleça uma integral tripla para calcular seu momento de inércia em relação ao eixo-y.

SOLUÇÃO

A Figura 17.58 ilustra a região. Note que o traço do cone no plano-xy é o par de retas $x = \pm y$. Denotando por k a densidade constante, e aplicando (17.27), temos

$$I_y = \int_0^3 \int_{-y}^{y} \int_{-\sqrt{y^2-x^2}}^{\sqrt{y^2-x^2}} (x^2 + z^2)\, k\, dz\, dx\, dy$$

Poderíamos também achar I_y multiplicando por 4 o momento de inércia da parte do sólido que está no primeiro octante. Assim,

$$I_y = 4\int_0^3 \int_0^{y} \int_0^{\sqrt{y^2-x^2}} (x^2 + z^2)\, k\, dz\, dx\, dy$$

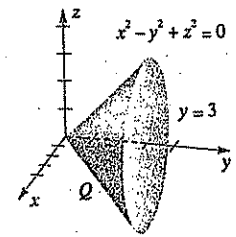


Figura 17.58

Concluiremos esta seção com uma demonstração do seguinte teorema, enunciado sem prova em (6.26).

Teorema de Pappus (17.28)

Seja R uma região de um plano situada inteiramente a um lado de uma reta l do plano. Fazendo R revolver uma vez em torno de l, o volume do sólido resultante é o produto da área de R pela distância percorrida pelo centróide de R.

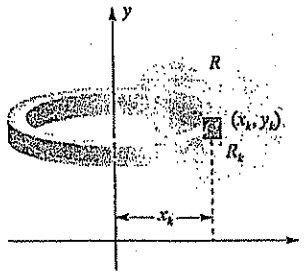


Figura 17.59

DEMONSTRAÇÃO

Podemos admitir que l seja o eixo-y e R uma região no primeiro quadrante, conforme Figura 17.59. Seja $\{R_k\}$ uma partição interior P de R, e denotemos por ΔA_k a área de R_k. Para cada k, escolhamos (x_k, y_k) como centro do retângulo R_k.

Fazendo R revolver em torno do eixo-y, então, conforme Figura 17.59, R_k gera uma casca cilíndrica de volume $2\pi x_k\,\Delta A_k$. Assim, o volume V do sólido gerado por R é

$$V = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_k 2\pi x_k\,\Delta A_k = \iint_R 2\pi x\,dA$$

Se aplicarmos a Definição (17.24) aos centróides, tomando $\delta(x, y) = 1$ e $m = A$, então

$$V = 2\pi \iint_R x\,dA = 2\pi M_y = 2\pi \bar{x} A$$

Podemos, assim, achar o volume V multiplicando a área A de R pela distância $2\pi\bar{x}$ percorrida pelo centróide quando R revolve uma vez em torno do eixo-y.

EXERCÍCIOS 17.6

Exercs. 1-8: Ache a massa e o centro de massa da lâmina que tem a forma da região delimitada pelos gráficos das equações dadas e a densidade massa por área indicada.

1 $y = \sqrt{x}$, $x = 9$, $y = 0$; $\delta(x, y) = x + y$

2 $y = \sqrt[3]{x}$, $x = 8$, $y = 0$; $\delta(x, y) = y^2$

3 $y = x^2$, $y = 4$;
a densidade em $P(x, y)$ é diretamente proporcional à distância do eixo-y a P.

4 $y = x^3$, $y = 2x$;
a densidade em $P(x, y)$ é diretamente proporcional à distância do eixo-x a P.

5 $y = e^{-x^2}$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$; $\delta(x, y) = |xy|$

6 $y = \operatorname{sen} x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$; $\delta(x, y) = y$

7 $y = \sec x$, $x = -\pi/4, x = \pi/4$, $y = \frac{1}{2}$; $\delta(x, y) = 4$

8 $y = \ln x$, $y = 0$, $x = 2$; $\delta(x, y) = 1/x$

9 Ache I_x, I_y e I_O para a lâmina do Exercício 1.

10 Ache I_x, I_y e I_O para a lâmina do Exercício 2.

11 Ache I_x, I_y e I_O para a lâmina do Exercício 3.

12 Ache I_x, I_y e I_O para a lâmina do Exercício 4.

13 Uma lâmina homogênea tem a forma de um quadrado de lado a. Ache o momento de inércia em relação a

(a) um lado (b) uma diagonal

(c) centro de massa

14 Uma lâmina homogênea tem a forma de um triângulo eqüilátero de lado a. Ache o momento de inércia em relação a: (a) uma altura, (b) um lado, (c) um vértice.

15 Se um sólido de massa m tem momento de inércia I em relação a uma reta, então o *raio de giração* é, por definição, o número d tal que $I = md^2$. Esta fórmula implica que o raio de giração é a distância da reta em que toda a massa se concentraria *sem alterar* o momento de inércia do sólido. Ache o raio de giração em (a) do Exercício 13.

16 Ref. Exercício 15. Ache o raio de giração em (a) do Exercício 14.

Exercs. 17-18: Ache o centro de massa de Q.

17 A densidade de um ponto P de um sólido cúbico Q de aresta a é diretamente proporcional ao quadrado da distância de P a um vértice fixo do cubo.

18 Seja Q o tetraedro delimitado pelos planos coordenados e o plano $2x + 5y + z = 10$. A densidade em $P(x, y, z)$ é diretamente proporcional à distância do plano xz a P.

Exercs. 19-20: Estabeleça integrais iteradas para calcular o centro de massa do sólido que tem a forma da região Q e densidade $\delta(x, y, z)$.

19 Q é delimitada pelo paraboloide $x = y^2 + 4z^2$ e o plano $x = 4$; $\delta(x, y, z) = x^2 + z^2$.

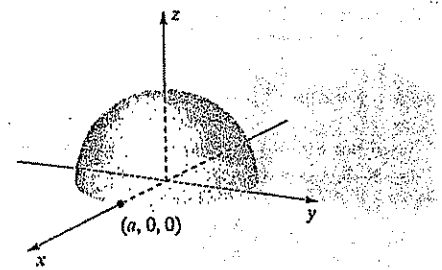
20 Q é delimitada pelo hiperboloide $y^2 - x^2 - z^2 = 1$ e o plano $y = 2$; $\delta(x, y, z) = x^2y^2z^2$.

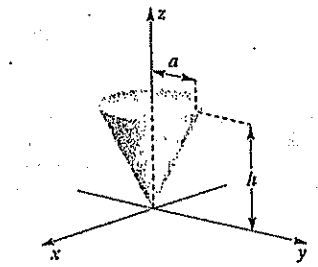
21 Seja Q o sólido no primeiro octante delimitado pelos planos coordenados e pelos gráficos de $z = 9 - x^2$ e $2x + y = 6$.

(a) Estabeleça integrais iteradas para achar o centróide.

(b) Ache o centróide.

Exercs. 22-23: Estabeleça integrais iteradas para achar o centróide do sólido exibido nas figuras.





24 Estabeleça integrais iteradas para achar o centróide do sólido delimitado pelos gráficos de $z = x^2$, $y = x^2$, $y = x^3$ e $z = 0$.

Exercs. 25-28: Estabeleça uma integral iterada para achar o momento de inércia em relação ao eixo-z do sólido indicado.

25 A esfera de raio a e centro na origem; $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

26 O cone delimitado pelos gráficos de $x^2 + 9y^2 - z^2 = 0$ e $z = 36$; $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2$

27 O tetraedro homogêneo delimitado pelos planos coordenados e o plano $(x/a) + (y/b) + (z/c) = 1$ para números positivos a, b e c.

28 O sólido homogêneo delimitado pelo elipsóide $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) = 1$

Exercs. 29-30: O valor médio de $f(x, y)$ em uma região R de área A é definido por

$$f_{av} = \frac{1}{A} \iint_R f(x, y)\, dA$$

Se os pontos $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ são distribuídos uniformemente em R, então

$$f_{av} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)$$

e

$$\iint_R f(x, y)\, dA = A \cdot f_{av} = \frac{A}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)$$

Se os (x_k, y_k) são gerados por números aleatórios, este processo é chamado *método de Monte Carlo*. (Se sua calculadora não gera números aleatórios, escolha dez pontos distribuídos eqüitativamente em R.) Use este método, com $n = 10$, para aproximar a massa de uma lâmina que tem a densidade de massa por área dada $\delta(x, y)$ e a forma de R.

29 $\delta(x, y) = \ln [3 + \operatorname{sen}(xy)]$; R é o quadrado de vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ e $(1, 0)$.

30 $\delta(x, y) = 2 + \cos \sqrt[4]{x^2 + y^2}$; R é a região do primeiro quadrante delimitada pelo círculo $x^2 + y^2 = 1$ e os eixos coordenados. (Note que, quando (x_k, y_k) é gerado, se $x_k^2 + y_k^2 > 1$ então (x_k, y_k) não está em R e não deve ser usado).

Exercs. 31-32: Estenda o método de Monte Carlo dos Exercícios 29-30 a $f(x, y, z)$ e uma região Q de volume V, e use esta extensão, com $n = 10$, para aproximar a massa de um sólido que tem a densidade de massa $\delta(x, y, z)$ dada e a forma de Q.

31 $\delta(x, y, z) = 1 + \operatorname{sen} \sqrt{xyz}$; Q é a região cúbica do primeiro octante delimitada pelos planos coordenados e os planos $x = 1$, $y = 1$ e $z = 1$.

32 $\delta(x, y, z) = \ln (2 + \sqrt[3]{x^2 + y^2 + z^2})$; Q é a região do primeiro octante delimitada pelos planos coordenados e pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

17.7 COORDENADAS CILÍNDRICAS

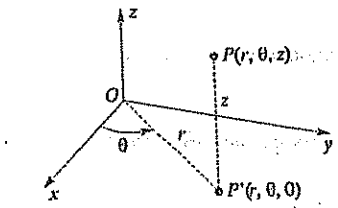


Figura 17.60

É fácil estender o sistema de coordenadas polares a três dimensões. Basta representar um ponto P por um terno ordenado (r, θ, z), em que z é a (terceira) coordenada retangular usual de P e r e θ são coordenadas polares da projeção P' de P no plano-xy, conforme ilustrado na Figura 17.60. (r, θ, z) são as **coordenadas cilíndricas** de P. A principal aplicação das coordenadas cilíndricas consiste em simplificar certos tipos de integrais múltiplas.

Como as coordenadas polares são usadas no plano-xy, as fórmulas do Teorema (13.8) dão relações entre coordenadas retangulares e coordenadas cilíndricas. Reestabeleçamos estas fórmulas:

Teorema (17.29)

As coordenadas retangulares (x, y, z) e as coordenadas cilíndricas (r, θ, z) de um ponto P estão relacionadas a seguir:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad z = z$$

Se $r_0 > 0$, então o gráfico da equação $r = r_0$, ou, equivalentemente, $x^2 + y^2 = r_0^2$, é um cilindro circular de raio r_0 com eixo ao longo do eixo-z. Se θ_0 e z_0 são números, então o gráfico de $\theta = \theta_0$ é um plano contendo o eixo-z e o gráfico de $z = z_0$ é um plano perpendicular ao eixo-z. A Figura 17.61 ilustra gráficos típicos.

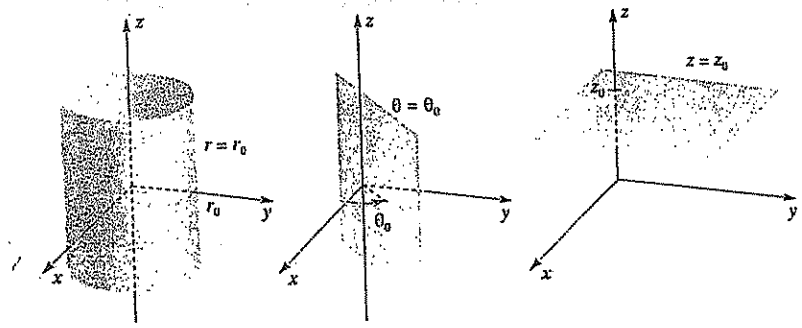


Figura 17.61

EXEMPLO 1

Escreva a equação $z^2 = x^2 + y^2$ em coordenadas cilíndricas e esboce o gráfico.

SOLUÇÃO

Utilizando o Teorema (17.29), obtemos

$$z^2 = r^2 \qquad \text{ou} \qquad z = \pm r$$

Como r pode ser positivo ou negativo, $z = \pm r$ é equivalente a $z = r$. O gráfico é um cone circular com eixo ao longo do eixo-z, ilustrado na Figura 17.62.

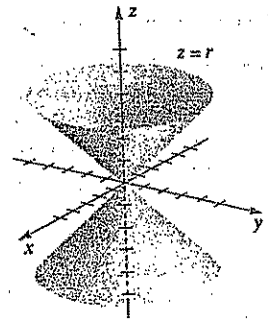


Figura 17.62

EXEMPLO 2

Escreva a equação em coordenadas retangulares e esboce seu gráfico em um sistema coordenado xyz:

(a) $z = 4r^2$ (b) $r = 4 \operatorname{sen} \theta$

SOLUÇÃO

(a) Aplicando o Teorema (17.29), temos

$$z = 4(x^2 + y^2) \qquad \text{ou} \qquad z = 4x^2 + 4y^2$$

O gráfico é o parabolóide de revolução da Figura 17.63.

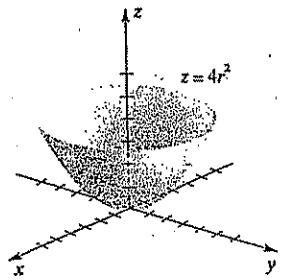


Figura 17.63

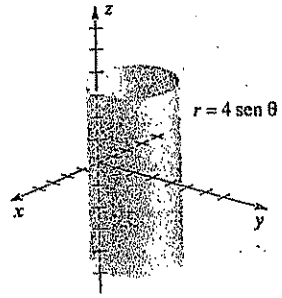


Figura 17.64

(b) Multiplicando ambos os membros de $r = 4 \operatorname{sen} \theta$ por r, obtemos $r^2 = 4r \operatorname{sen} \theta$. Utilizando (17.29), temos $x^2 + y^2 = 4y$, ou, equivalentemente,

$$x^2 + (y-2)^2 = 4$$

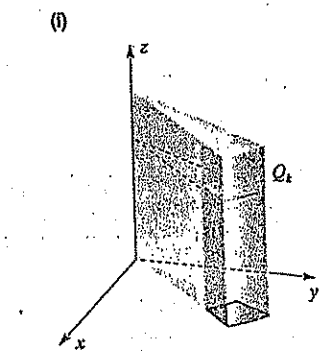
O gráfico é um cilindro de geratrizes paralelas ao eixo-z, exibido na Figura 17.64. Uma diretriz do cilindro é o círculo de raio 2 no plano-xy, cujo centro em coordenadas retangulares é (0, 2, 0).

Às vezes é conveniente utilizar coordenadas cilíndricas para calcular integrais triplas. O caso mais simples ocorre quando uma função f de r, θ e z é contínua em toda uma região da forma

$$Q = \{(r, \theta, z);\ a \le r \le b,\ c \le \theta \le d,\ m \le z \le n\}$$

Dividimos Q em sub-regiões $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ que têm a mesma forma de Q utilizando gráficos de equações da forma $r = a_k$, $\theta = c_k$ e $z = m_k$, em que a_k, c_k e m_k estão nos intervalos $[a, b]$, $[c, d]$ e $[m, n]$, respectivamente. Se $a_k \neq 0$, estes gráficos são cilíndricos circulares, planos contendo o eixo-z e planos paralelos ao plano-xy, respectivamente (ver Figura 17.61).

A Figura 17.65(i) ilustra uma sub-região típica Q_k. Se $\overline{r}_k$ é o *raio médio* da base de Q_k, conforme Figura 17.65(ii), então o volume ΔV_k de Q_k é a área da base $\overline{r}_k\ \Delta r_k\ \Delta\theta_k$ (ver Seção 17.3) vezes a altura Δz_k: $\Delta V_k = \overline{r}_k\ \Delta r_k\ \Delta\theta_k\ \Delta z_k$



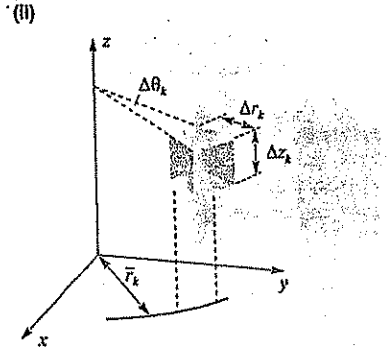


Figura 17.65

Se (r_k, θ_k, z_k) é um ponto arbitrário em Q_k e $\|P\|$ é o comprimento da maior diagonal dos Q_k, então a integral tripla de f sobre Q se define como

$$\iiint_Q f(r, \theta, z)\ dV = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_k f(r_k, \theta_k, z_k)\ \Delta V_k$$

Pode-se provar que

$$\iiint_Q f(r, \theta, z)\ dV = \int_m^n \int_c^d \int_a^b f(r, \theta, z) r\ dr\ d\theta\ dz$$

Há cinco outras ordens possíveis de integração para esta integral iterada.

Por meio de partições interiores, as integrais triplas em coordenadas cilíndricas podem ser definidas sobre regiões mais complicadas do que a que acabamos de estudar. Assim, se R é uma região polar do tipo abordado na Seção 17.5, e se

$$Q = \{(r, \theta, z);\ (r, \theta) \text{ está em } R \text{ e } k_1(r, \theta) \le z \le k_2(r, \theta)\}$$

em que k_1 e k_2 são funções dotadas de derivadas parciais primeiras contínuas em toda R, então pode-se mostrar que

$$\iiint_Q f(r, \theta, z)\ dV = \iint_R \left[\int_{k_1(r,\theta)}^{k_2(r,\theta)} f(r, \theta, z)\ dz \right] dA$$

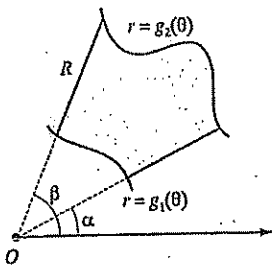


Figura 17.66

Em particular, se R é uma região do tipo ilustrado na Figura 17.66, pode-se calcular como a seguir a integral tripla de f sobre Q:

Teorema de cálculo (coordenadas cilíndricas) (17.30)

$$\iiint_Q f(r,\theta,z)\,dV = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \int_{k_1(r,\theta)}^{k_2(r,\theta)} f(r,\theta,z)\,r\,dz\,dr\,d\theta$$

A integral iterada em (17.30) pode ser interpretada como um limite de somas triplas. A primeira somatória se faz ao longo de uma coluna das sub-regiões Q_k da superfície inferior (com equação $z = k_1(r,\theta)$) para a superfície superior (de equação $z = k_2(r,\theta)$) (ver Figura 17.67).

A segunda somatória se estende sobre uma cunha dessas colunas, com θ fixo e r variando. A esta altura, já somamos sobre uma fatia de Q, conforme ilustrado na Figura 17.67. Finalmente, varremos Q fazendo θ variar de α a β.

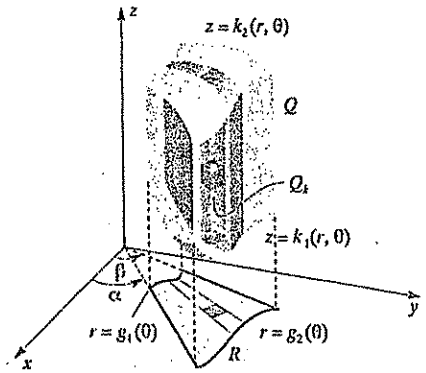


Figura 17.67

Os exemplos a seguir ilustram o uso de (17.30).

EXEMPLO 3

Ache o centróide de um sólido hemisférico Q de raio a.

SOLUÇÃO

Introduzindo um sistema coordenado xyz, conforme Figura 17.68, a equação do hemisfério é $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, ou, em coordenadas cilíndricas, $z = \sqrt{a^2 - r^2}$. Por simetria, o centróide está sobre o eixo-z e, assim, basta achar $\bar{z} = M_{xy}/V$, em que o volume V é dado por $V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi a^3 = \frac{2}{3}\pi a^3$.

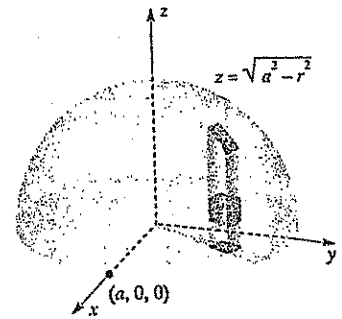


Figura 17.68

Utilizando (17.26)(ii) com $\delta(x,y,z) = 1$, obtemos

$$M_{xy} = \iiint_Q z\,dV$$

Aplicando o Teorema (17.30), notamos que a primeira integração (em relação a z) vai de $z = 0$ (o plano-xy) até o hemisfério $z = \sqrt{a^2 - r^2}$. Esta integração parcial representa o volume da coluna exibida na Figura 17.68. As integrações restantes em relação a r e θ estendem-se à região delimitada pelo círculo $r = a$. Assim,

$$\begin{aligned}
M_{xy} &= \int_0^{2\pi}\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} zr\,dz\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^a \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\sqrt{a^2-r^2}} r\,dr\,d\theta \\
&= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^a (a^2 - r^2)r\,dr\,d\theta \\
&= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^a (a^2 r - r^3)\,dr\,d\theta \\
&= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[a^2\left(\frac{r^2}{2}\right) - \frac{r^4}{4}\right]_0^a d\theta \\
&= \frac{a^4}{8}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{a^4}{8}\left[\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{4}\pi a^4
\end{aligned}$$

Logo,

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{V} = \frac{\frac{1}{4}\pi a^4}{\frac{2}{3}\pi a^3} = \frac{3}{8}a$$

EXEMPLO 4

Um sólido Q é delimitado pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e pelo plano $z = 2$. A densidade em $P(x, y, z)$ é diretamente proporcional ao quadrado da distância da origem a P. Ache sua massa.

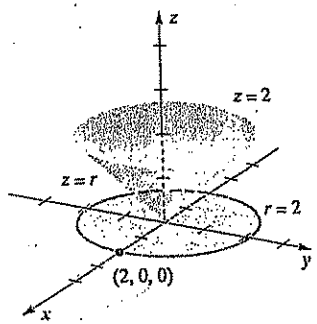


Figura 17.69

SOLUÇÃO

A Figura 17.69 ilustra o sólido. A equação do cone em coordenadas cilíndricas é $z = r$, com $r \geq 0$. Note que, se $z = 2$, então $2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ ou $4 = x^2 + y^2$. Portanto o topo do cone se projeta sobre o círculo $x^2 + y^2 = 4$ ou $r = 2$, no plano-xy. A densidade em (x, y, z) é dada por

$$\delta = k(x^2 + y^2 + z^2) \qquad \text{ou} \qquad \delta = k(r^2 + z^2)$$

Por (17.26) e (17.30)

$$m = \iiint_Q \delta \, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_r^2 k(r^2 + z^2)\, r \, dz \, dr \, d\theta$$

Note que a primeira integração (em relação a z) vai do cone $z = r$ (a superfície inferior) ao plano $z = 2$ (a superfície superior). As integrações restantes em relação a r e θ abrangem a região circular delimitada por $r = 2$. Integrando, obtemos

$$m = k\int_0^{2\pi}\int_0^2 \left[r^2 z + \frac{z^3}{3} \right] r \, dr \, d\theta$$

$$= k\int_0^{2\pi}\int_0^2 \left[\left(2r^2 + \frac{8}{3} \right) - \left(r^3 + \frac{r^3}{3} \right) \right] r \, dr \, d\theta$$

$$= k\int_0^{2\pi}\int_0^2 (2r^3 + \tfrac{8}{3}r - \tfrac{4}{3}r^4)\, dr \, d\theta$$

$$= k\int_0^{2\pi} \left[2\frac{r^4}{4} + \frac{8}{3}\frac{r^2}{2} - \frac{4}{3}\frac{r^5}{5} \right]_0^2 d\theta$$

$$= k\int_0^{2\pi} \tfrac{24}{5}\, d\theta = \tfrac{24}{5} k \left[\theta \right]_0^{2\pi} = \tfrac{48}{5}\pi k$$

EXEMPLO 5

Um sólido tem a forma da região Q interior ao cilindro $r = a$, interior à esfera $r^2 + z^2 = 4a^2$ e acima do plano-xy. A densidade em um ponto P é diretamente proporcional à distância do plano-xy a P. Ache a massa e o momento de inércia I_z do sólido.

SOLUÇÃO

A Figura 17.70 ilustra a região Q, juntamente com uma coluna que corresponde a uma primeira somatória em direção paralela ao eixo-z. Como a densidade no ponto P é dada por kz, para uma constante k, podemos achar a massa m aplicando (17.26)(i), com $\delta(x, y, z) = kz$ e $dV = r \, dz \, dr \, d\theta$. Assim,

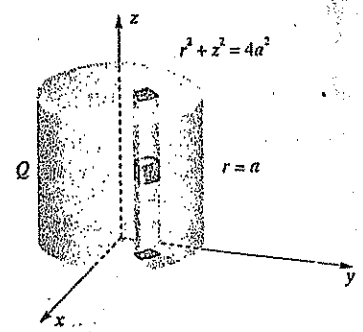


Figura 17.70

$$m = \int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_0^{\sqrt{4a^2-r^2}} (kz)\, r\, dz\, dr\, d\theta$$

$$= k\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\sqrt{4a^2-r^2}} r\, dr\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}k\int_0^{2\pi}\int_0^{a}(4a^2r - r^3)\, dr\, d\theta = \frac{1}{2}k\int_0^{2\pi}\left[2a^2r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^{a} d\theta$$

$$= \frac{7}{8}a^4k\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{7}{8}a^4k\left[\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{7}{4}a^4\pi k$$

Para achar I_z, aplicamos (17.27) e utilizamos coordenadas cilíndricas:

$$I_z = \int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_0^{\sqrt{4a^2-r^2}} r^2(kz) r\, dz\, dr\, d\theta$$

$$= k\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\sqrt{4a^2-r^2}} r^3\, dr\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}k\int_0^{2\pi}\int_0^{a}(4a^2r^3 - r^5)\, dr\, d\theta = \frac{5}{6}a^6\pi k$$

EXEMPLO 6

Uma câmara de vidro será usada em experimentos para testar os efeitos da exposição ao gás radon. A câmara tem a forma do paraboloide $z = 25 - x^2 - y^2$, com $z \geq 0$ e as unidades em centímetros. Se a densidade da energia radioativa deve ser de 6×10^{-11} joule/cm^3, calcule a quantidade total de energia radioativa necessária na câmara.

SOLUÇÃO

A forma da parte da câmara no primeiro quadrante é semelhante à da superfície da Figura 17.36. Neste exemplo, $\delta(x, y, z)$ denota a *densidade de energia* em (x, y, z) em lugar da densidade de massa. Se dV é o volume de uma sub-região dQ dentro da câmara e (x, y, z) é um ponto em dQ, então a energia radioativa dentro de dQ pode ser aproximada por $\delta(x, y, z)dV$. Tomando um limite de somas triplas com $\delta(x, y, z) = \delta = 6 \times 10^{-11}$, vemos que a energia radioativa total E é dada por

$$E = \iiint_V \delta\, dV$$

Empregando coordenadas cilíndricas, obtemos

$$E = \delta\int_0^{2\pi}\int_0^{5}\int_0^{25-r^2} r\, dz\, dr\, d\theta$$

$$= \delta\int_0^{2\pi}\int_0^{5} r\left[z\right]_0^{25-r^2} dr\, d\theta$$

$$= \delta\int_0^{2\pi}\int_0^{5}(25r - r^3)\, dr\, d\theta$$

$$= \frac{625}{2}\pi\delta \approx 5{,}89 \times 10^{-8}\ \text{joule}$$

EXERCÍCIOS 17.7

Exercs. 1-14: Descreva o gráfico da equação em três dimensões.

1 (a) $r = 4$ (b) $\theta = -\pi/2$ (c) $z = 1$

2 (a) $r = -3$ (b) $\theta = \pi/4$ (c) $z = -2$

3 $r = -3\sec\theta$ 4 $r = -\csc\theta$ 5 $z = 4r^2$

6 $z = 4 - r^2$ 7 $r = 6\,\text{sen}\,\theta$ 8 $r\sec\theta = 4$

9 $z = 2r$ 10 $3z = r$ 11 $r^2 = 9 - z^2$

12 $r^2 + z^2 = 16$ 13 $r = 2\csc\theta\cot\theta$ 14 $r = \text{tg}\,\theta\sec\theta$

Exercs. 15-24: Transforme a equação para coordenadas cilíndricas.

15 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 16 $x^2 + y^2 = 4z$

17 $3x + y - 4z = 12$ 18 $y = x$

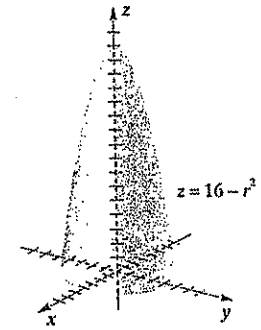
19 $x^2 = 4 - y^2$ 20 $x^2 + (y-2)^2 = 4$

21 $x^2 - 4z^2 + y^2 = 0$ 22 $x^2 - y^2 - z^2 = 1$

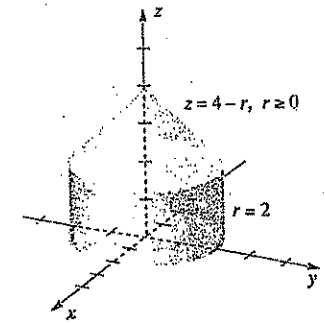
23 $y^2 + z^2 = 9$ 24 $x^2 + z^2 = 9$

Exercs. 25-28: Seja f uma função contínua arbitrária de r, θ e z, e seja Q a região ilustrada na figura. Estabeleça uma integral tripla iterada em coordenadas cilíndricas para $\iiint_Q f(r, \theta, z)\, dV$.

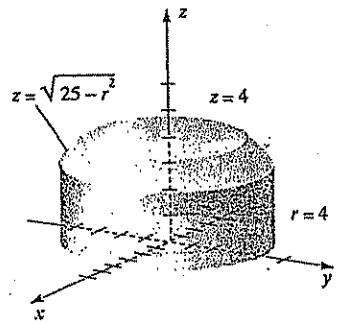
25



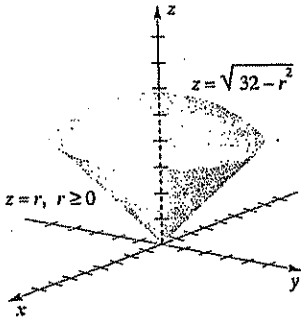
26



27



28



Exercs. 29-38: Use coordenadas cilíndricas.

29 Um sólido é delimitado pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$, pelo cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e pelo plano-xy. Ache (a) seu volume (b) seu centróide.

30 Um sólido é delimitado pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, pelo cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e pelo plano-xy. Ache (a) seu volume (b) seu centróide.

31 Um cilindro circular reto homogêneo de densidade δ tem altura h e raio de base a. Ache seu momento de inércia em relação a (a) o eixo do cilindro e (b) um diâmetro da base.

32 Um sólido homogêneo de densidade δ é delimitado pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$. Ache

(a) seu centro de massa

(b) seu momento de inércia em relação ao eixo-z

33 Um sólido esférico tem raio a, e a densidade em $P(x, y, z)$ é diretamente proporcional à distância de P a uma reta fixa l pelo centro do sólido. Ache sua massa.

34 Um sólido é delimitado pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e pelo plano $z = 4$, e a densidade em $P(x, y, z)$ é diretamente proporcional à distância do eixo-z a P. Ache sua massa.

35 Ache o momento de inércia em relação a l para o sólido descrito no Exercício 33.

36 Ache o momento de inércia em relação ao eixo-z para o sólido descrito no Exercício 34.

37 Para uma altitude z de até 10.000 metros, a densidade δ (em kg/m^3) da atmosfera terrestre pode ser aproximada por

$$\delta = 1{,}2 - (1{,}05 \times 10^{-4})z + (2{,}6 + 10^{-9})z^2$$

Estime a massa de uma coluna de ar de 10 quilômetros de altura com base circular de 3 metros de raio.

38 Um sólido é cortado da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ pelo cilindro $x^2 + y^2 = 2y$. A densidade em $P(x, y, z)$ é diretamente proporcional à distância do plano-xy a P. Ache (a) sua massa e (b) seu centro de massa.

Exercs. 39-40: Use coordenadas cilíndricas para calcular a integral.

39 $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z \, dz \, dx \, dy$

40 $\displaystyle\int_0^2 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^{x^2+y^2} \sqrt{x^2 + y^2} \, dz \, dy \, dx$

17.8 COORDENADAS ESFÉRICAS

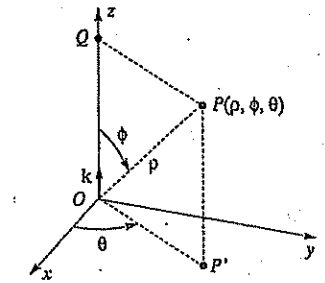


Figura 17.71

Nesta seção estudaremos o sistema de coordenadas esféricas em três dimensões. As *coordenadas esféricas* de um ponto P são dadas por um terno ordenado (ρ, ϕ, θ), em que, conforme Figura 17.71, $\rho = \|\overrightarrow{OP}\|$, ϕ é o ângulo entre $\overrightarrow{OP}$ e o vetor $\mathbf{k}$, e θ é um ângulo polar associado à projeção P' de P sobre o plano-xy. O ponto Q é a projeção de P sobre o eixo-z. Note que $\rho \geq 0$ e $0 \leq \phi \leq \pi$.

Se $\rho_0 > 0$, o gráfico de $\rho = \rho_0$ é uma esfera de raio ρ_0 com centro O (ver Figura 17.72(i)). O gráfico de $\rho = 0$ consiste em um único ponto, a origem.

Se $0 < \phi_0 < \pi$, o gráfico de $\phi = \phi_0$ é um meio-cone de vértice em O (ver Figura 17.72(ii)). O gráfico de $\phi = 0$ é a parte não-negativa do eixo-z, e o gráfico de $\phi = \pi$ é a parte não-positiva.

(i) (ii) (iii)

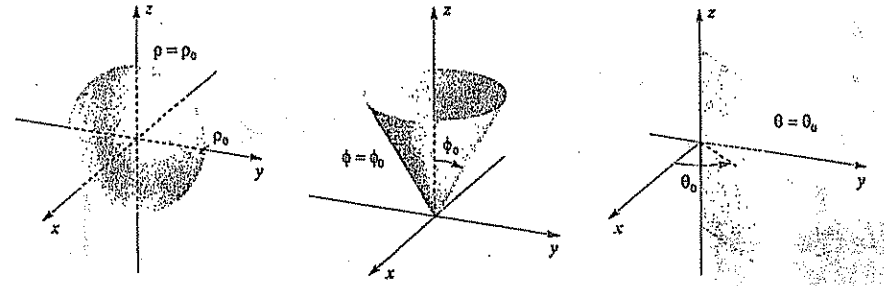


Figura 17.72

O gráfico de $\theta = \theta_0$ é um semiplano contendo o eixo-z (ver Figura 17.72(iii)).

Podemos estabelecer as relações entre as coordenadas esféricas (ρ, ϕ, θ) e as coordenadas retangulares (x, y, z) de um ponto P, referindo-nos à Figura 17.71. Considerando que

$$x = \|\overrightarrow{OP}\| \cos\theta \quad \text{e} \quad y = \|\overrightarrow{OP}\| \operatorname{sen}\theta$$

e que

$$\|\overrightarrow{OP'}\| = \|\overrightarrow{QP}\| = \rho \operatorname{sen}\phi \quad \text{e} \quad \|\overrightarrow{OQ}\| = \rho \cos\phi$$

temos (i) do próximo teorema. A parte (ii) é conseqüência da fórmula da distância (14.13).

Teorema (17.31)

As coordenadas retangulares (x, y, z) e as coordenadas esféricas (ρ, ϕ, θ) de um ponto P estão relacionadas como segue:

(i) $x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \quad y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \quad z = \rho \cos \phi$

(ii) $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$

EXEMPLO 1

Se um ponto P tem coordenadas esféricas $(4, \pi/6, \pi/3)$, ache as coordenadas retangulares e cilíndricas de P.

SOLUÇÃO

O ponto P está grafado na Figura 17.73. Aplicando o Teorema (17.31)(i), com $\rho = 4$, $\phi = \pi/6$ e $\theta = \pi/3$, obtemos as coordenadas retangulares:

$$x = 4 \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{3} = 4\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$y = 4 \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = 4\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$$

$$z = 4 \cos \frac{\pi}{6} = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3}$$

Para achar as coordenadas cilíndricas de P, notemos primeiro que

$$r^2 = x^2 + y^2 = 1 + 3 = 4$$

e, então, $r = \pm 2$. Assim, as coordenadas cilíndricas (r, θ, z) de P são $(2, \pi/3, 2\sqrt{3})$.

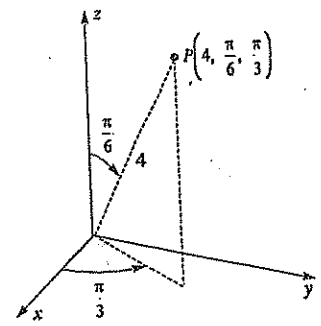


Figura 17.73

EXEMPLO 2

Ache uma equação em coordenadas esféricas cujo gráfico seja o paraboloide $z = x^2 + y^2$.

SOLUÇÃO

Fazendo a substituição conforme (17.31)(i), obtemos

$$\begin{aligned} \rho \cos \phi &= \rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi \cos^2 \theta + \rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi \operatorname{sen}^2 \theta \\ &= \rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi (\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) \\ &= \rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi \end{aligned}$$

ou equivalentemente

$$\rho(\cos \phi - \rho \operatorname{sen}^2 \phi) = 0$$

Logo

$$\rho = 0 \text{ ou } \rho \operatorname{sen}^2 \phi = \cos \phi$$

O gráfico de $\rho = 0$ é a origem, que está também no gráfico de $\rho \operatorname{sen}^2 \phi = \cos \phi$. Logo, $z = x^2 + y^2$ é equivalente a $\rho \operatorname{sen}^2 \phi = \cos \phi$.

Não podemos ter $\operatorname{sen} \phi = 0$ na equação $\rho \operatorname{sen}^2 \phi = \cos \phi$ porque, neste caso, $\phi = 0$ ou $\phi = \pi$, e então $\cos \phi = 1$ ou $\cos \phi = -1$, o que nos leva ao absurdo $0 = 1$ ou $0 = -1$. Portanto, podemos dividir ambos os membros da equação $\rho \operatorname{sen}^2 \phi = \cos \phi$ por $\operatorname{sen}^2 \phi$, obtendo

$$\rho = \frac{\cos \phi}{\operatorname{sen}^2 \phi} = \frac{\cos \phi}{\operatorname{sen} \phi} \frac{1}{\operatorname{sen} \phi}$$

ou equivalentemente

$$\rho = \operatorname{cotg} \phi \csc \phi$$

EXEMPLO 3

Transforme a equação $\rho = 2 \operatorname{sen} \phi \cos \theta$ para coordenadas retangulares e descreva o seu gráfico.

SOLUÇÃO

Como visamos utilizar a primeira fórmula de (17.31)(i), multiplicamos ambos os membros da equação por ρ obtendo

$$\rho^2 = 2\rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta$$

A aplicação de (17.31) nos dá a seguinte equação equivalente em x, y e z:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2x$$

$$(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Por (14.15), o gráfico é uma esfera de raio 1 cujo centro, em coordenadas retangulares, é $(1, 0, 0)$.

Às vezes é conveniente utilizarmos coordenadas esféricas para calcular integrais triplas. O caso mais simples ocorre quando uma função f de ρ, ϕ e θ é contínua em toda uma região da forma

$$Q = \{(\rho, \phi, \theta): a \le \rho \le b, c \le \phi \le d, m \le \theta \le n\}$$

Dividimos Q em sub-regiões $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ que tenham a mesma forma de Q, por meio de gráficos de equações $\rho = a_k$, $\phi = c_k$ e $\theta = m_k$, em que a_k, c_k e m_k são números nos intervalos $[a, b]$, $[c, d]$ e $[m, n]$, respectivamente. Esses gráficos são esferas com centros na origem, cones com eixo ao longo do eixo-z e semiplanos contendo o eixo-z, respectivamente (ver Figura 17.72).

A Figura 17.74(i) ilustra uma sub-região típica Q_k. O incremento $\Delta\rho_k$ é a distância entre duas esferas consecutivas, $\Delta\phi_k$ é a variação no ângulo do vértice entre cones sucessivos e $\Delta\theta_k$ é o ângulo entre dois semiplanos sucessivos. Se, conforme Figura 17.74(ii), P tem coordenadas esféricas $(\rho_k, \phi_k, \theta_k)$ e P' é a projeção de P sobre o eixo-z, então, pela trigonometria, o comprimento do segmento $P'P$ é $\rho_k \operatorname{sen} \phi_k$ e então, pelo Teorema (1.14), o comprimento do arco $\overset{\frown}{PS}$ é $\rho_k \operatorname{sen} \phi_k \Delta\theta_k$. A distância de O a P é ρ_k de modo que o comprimento do arco $\overset{\frown}{PR}$ é $\rho_k \Delta\phi_k$. O comprimento do segmento PQ é $\Delta\rho_k$. Aproximaremos o volume ΔV_k de Q_k considerando-o um paralelepípedo retângulo com essas três dimensões. Assim

$$\Delta V_k \approx (\rho_k \operatorname{sen} \phi_k \Delta\theta_k)(\rho_k \Delta\phi_k)\Delta\rho_k$$

ou

$$\Delta V_k \approx \rho_k^2 \operatorname{sen} \phi_k \, \Delta\rho_k \, \Delta\phi_k \, \Delta\theta_k$$

Definimos a integral tripla de f sobre Q como um limite de somas de Riemann $\sum_k f(\rho_k, \phi_k, \theta_k)\,\Delta V_k$. Demonstra-se o seguinte teorema.

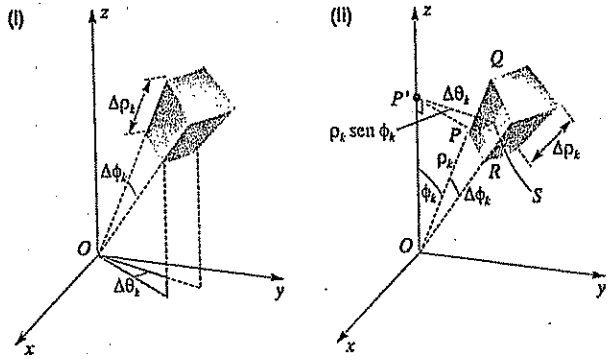


Figura 17.74

Teorema de cálculo (coordenadas esféricas (17.32))

$$\iiint_Q f(\rho, \phi, \theta)\, dV = \int_m^n \int_c^d \int_a^b f(\rho, \phi, \theta)\rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

Há cinco outras ordens possíveis de integração para esta integral iterada.

As coordenadas esféricas podem também ser utilizadas sobre regiões mais complicadas do que a que acabamos de considerar, utilizando-se partições interiores. Em tais casos, os limites de integração da integral iterada devem ser ajustados convenientemente.

Nos dois exemplos seguintes reconsideramos os Exemplos 3 e 4 da seção precedente, os quais resolvemos utilizando coordenadas cilíndricas.

EXEMPLO 4

Ache o centróide de um sólido hemisférico Q de raio a.

SOLUÇÃO

A Figura 17.75 representa o sólido, juntamente com um elemento de volume em coordenadas esféricas e uma coluna indicando uma primeira integração (parcial) em relação a ρ. Tal como no Exemplo 3 da Seção 17.7, basta achar $\bar{z}$. Utilizando coordenadas esféricas, temos

$$M_{xy} = \iiint_Q z \, dV$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^a (\rho \cos \phi)\rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^a \operatorname{sen} \phi \cos \phi \, d\phi \, d\theta$$

$$= \tfrac{1}{4} a^4 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} \phi \cos \phi \, d\phi \, d\theta$$

$$= \tfrac{1}{4} a^4 \int_0^{2\pi} \left[\tfrac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \phi \right]_0^{\pi/2} d\theta$$

$$= \tfrac{1}{8} a^4 \left[\theta \right]_0^{2\pi} = \tfrac{1}{4} \pi a^4$$

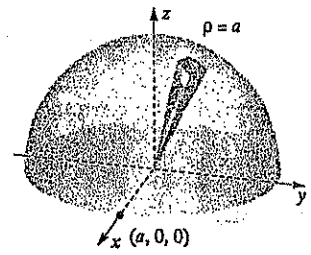


Figura 17.75

Logo

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{V} = \frac{\frac{1}{4}\pi a^4}{\frac{2}{3}\pi a^3} = \frac{3}{8} a$$

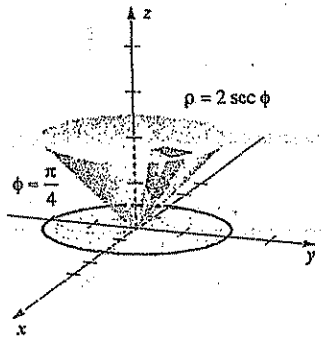


Figura 17.76

EXEMPLO 5

Um sólido Q é delimitado pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e pelo plano $z = 2$. A densidade em $P(x, y, z)$ é diretamente proporcional ao quadrado da distância da origem a P. Ache sua massa.

SOLUÇÃO

O sólido está reesboçado na Figura 17.76, juntamente com um elemento de volume em coordenadas esféricas e uma coluna indicando uma primeira integração (parcial) em relação a ρ. Em coordenadas esféricas, a equação do plano $z = 2$ é $\rho \cos \phi = 2$ ou $\rho = 2 \sec \phi$. A densidade em (x, y, z) é dada por

$$\delta = k(x^2 + y^2 + z^2) = k\rho^2$$

para uma constante k. Logo

$$m = \iiint_Q \delta \, dV$$

$$= k \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{2 \sec \phi} \rho^2 \cdot \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, dp \, d\phi \, d\theta$$

$$= k \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \left[\frac{\rho^5}{5} \right]_0^{2 \sec \phi} \operatorname{sen} \phi \, d\phi \, d\theta$$

$$= k \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \frac{32}{5} \sec^5 \phi \operatorname{sen} \phi \, d\phi \, d\theta$$

$$= \frac{32}{5} k \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \sec^3 \phi \sec \phi \operatorname{tg} \phi \, d\phi \, d\theta$$

$$= \frac{32}{5} k \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{4} \sec^4 \phi \right]_0^{\pi/4} d\theta$$

$$= \frac{8}{5} k \int_0^{2\pi} (4 - 1) \, d\theta = \frac{48}{5} \pi k$$

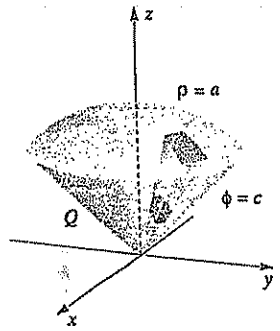


Figura 17.77

EXEMPLO 6

Ache o volume e o centróide da região Q delimitada acima pela esfera $\rho = a$ e abaixo pelo cone $\phi = c$, com $0 < c < \pi/2$.

SOLUÇÃO

A Figura 17.77 ilustra a região Q, juntamente com um elemento de volume em coordenadas esféricas e uma coluna indicando uma primeira integração (parcial) em relação a ρ. O volume V é

$$V = \iiint_Q dV = \int_0^{2\pi} \int_0^c \int_0^a \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^c \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^a \operatorname{sen} \phi \, d\phi \, d\theta$$

$$= \tfrac{1}{3} a^3 \int_0^{2\pi} \int_0^c \operatorname{sen} \phi \, d\phi \, d\theta = \tfrac{1}{3} a^3 \int_0^{2\pi} \left[-\cos \phi \right]_0^c d\theta$$

$$= \tfrac{1}{3} a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos c) \, d\theta = \tfrac{2}{3} \pi a^3 (1 - \cos c)$$

Por simetria, o centróide está sobre o eixo-z, de modo que basta acharmos $\bar{z} = M_{xy}/V$. Aplicando (17.26)(ii) com $\delta(x, y, z) = 1$, obtemos

$$M_{xy} = \iiint_Q z \, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^c \int_0^a (\rho \cos \phi) \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, a\phi \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^c \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^a \operatorname{sen} \phi \cos \phi \, d\phi \, d\theta$$

$$= \tfrac{1}{4} a^4 \int_0^{2\pi} \int_0^c \operatorname{sen} \phi \cos \phi \, d\phi \, d\theta = \tfrac{1}{4} a^4 \int_0^{2\pi} \left[\tfrac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \phi \right]_0^c d\theta$$

$$= \tfrac{1}{8} a^4 \operatorname{sen}^2 c \int_0^{2\pi} d\theta = \tfrac{1}{4} \pi a^4 \operatorname{sen}^2 c$$

O centróide, em coordenadas retangulares, é $(0, 0, \bar{z})$, com

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{V} = \frac{3}{8} a(1 + \cos c)$$

EXERCÍCIOS 17.8

Exercs. 1-2: Transforme as coordenadas esféricas em (a) coordenadas retangulares e (b) coordenadas cilíndricas.

1 $(4, \pi/6, \pi/2)$ 2 $(1, 3\pi/4, 2\pi/3)$

Exercs. 3-4: Transforme as coordenadas retangulares em (a) coordenadas esféricas e (b) em coordenadas cilíndricas.

3 $(1, 1, -2\sqrt{2})$ 4 $(1, \sqrt{3}, 0)$

Exercs. 5-20: Descreva o gráfico da equação em três dimensões.

5 (a) $\rho = 3$ (b) $\phi = \pi/6$ (c) $\theta = \pi/3$

6 (a) $\rho = 5$ (b) $\phi = 2\pi/3$ (c) $\theta = \pi/4$

7 $\rho = 4 \cos \phi$ 8 $\rho \sec \phi = 6$

9 $\rho \cos \phi = 3$ 10 $\rho = 4 \sec \phi$

11 $\rho = 6 \operatorname{sen} \phi \cos \theta$ 12 $\rho = 8 \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta$

13 $\rho = 5 \operatorname{csc} \phi \operatorname{csc} \theta$ 14 $\rho = 2 \operatorname{csc} \phi \sec \theta$

15 $\rho = 5 \operatorname{csc} \phi$ 16 $\rho \operatorname{sen} \phi = 3$

17 $\operatorname{tg} \phi = 2$ 18 $\operatorname{tg} \theta = 4$

19 $\rho = 6 \cot \phi \operatorname{csc} \theta$ 20 $\rho^2 - 3\rho + 2 = 0$

Exercs. 21-30: Transforme a equação para coordenadas esféricas.

21 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

22 $x^2 + y^2 = 4z$

23 $3x + y - 4z = 12$

24 $y = x$

25 $x^2 = 4 - y^2$

26 $x^2 + (y-2)^2 = 4$

27 $x^2 - 4z^2 + y^2 = 0$

28 $x^2 - y^2 - z^2 = 1$

29 $y^2 + z^2 = 9$

30 $x^2 + z^2 = 9$

Exercs. 31-38: Use coordenadas esféricas.

31 Ache a massa e o centro de massa de um sólido hemisférico de raio a se a densidade em um ponto P é diretamente proporcional à distância do centro da base a P.

32 Ache o volume e o centróide do sólido delimitado pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, pelo cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e pelo plano-xy.

33 Ache o momento de inércia, em relação ao eixo de simetria, do hemisfério do Exercício 31.

34 Ache o momento de inércia, em relação a um diâmetro da base, de um sólido hemisférico homogêneo de raio a.

35 Ache o volume do sólido situado acima do cone $z^2 = x^2 + y^2$ e interior à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$.

36 Ache o volume do sólido exterior ao cone $z^2 = x^2 + y^2$ e interior à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

37 Ache a massa do sólido exterior à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e interior à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, se a densidade em um ponto P é diretamente proporcional ao quadrado da distância do centro das esferas a P.

38 Supondo-se a Terra esférica com raio de 6.370 quilômetros, a densidade δ (em kg/m^3) da atmosfera a uma distância de ρ metros do centro da Terra pode ser aproximada por

$$\delta = 619{,}09 - (9{,}7 \times 10^{-5})\rho$$

para $6.370.000 \le \rho \le 6.373.000$.

(a) Estime a massa da atmosfera entre o nível do solo e uma altitude de 3 quilômetros.

(b) A atmosfera se estende além de uma altitude de 100 quilômetros e tem uma massa total de aproximadamente $5{,}1 \times 10^{18}$ quilogramas. Que percentagem da massa está nos 3 quilômetros inferiores da atmosfera?

Exercs. 39-40: Calcule a integral, transformando para coordenadas esféricas.

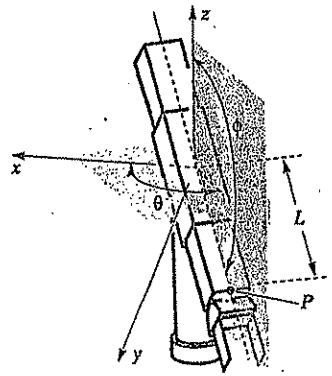
39 $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} (x^2+y^2+z^2)\,dz\,dy\,dx$

40 $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{2}}\int_{y}^{\sqrt{4-y^2}}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz\,dx\,dy$

41 A relação entre coordenadas esféricas e retangulares é importante no planejamento de juntas de braços de robôs. A figura abaixo ilustra o movimento causado pelas três juntas: uma junta em dobradiça faz o braço girar de um ângulo θ em torno do eixo-z, no plano-xy uma junta deslizante estende e contrai o comprimento L do braço, e outra junta move o braço para cima e para baixo de um ângulo ϕ (em coordenadas esféricas).

(a) Se as juntas estão ajustadas em $\theta = 120°$, $\phi = 135°$ e $L = 12$ pol, ache as coordenadas retangulares da junta P na mão do braço.

(b) Descreva as variações de θ, ϕ e L necessárias para apanhar um objeto que está no ponto $(-8, -8, 8)$ (coordenadas retangulares).



42 Utilizam-se pequenos movimentos das juntas dos braços de um robô, chamados *movimentos diferenciais*, para descrever a mudança de posição da mão quando o ajuste das juntas não é exato. Suponha que os ajustes das juntas θ, ϕ e L para o braço no Exercício 41 tenha erros $\Delta\theta$, $\Delta\phi$ e ΔL.

(a) Por meio de diferenciais, estabeleça fórmulas para os erros correspondentes Δx, Δy e Δz nas coordenadas retangulares de P.

(b) Use as fórmulas obtidas em (a) para estimar Δx, Δy e Δz se $\theta = 135°$, $\phi = 45°$, $L = 12$ pol, $\Delta\theta = -1°$, $\Delta\phi = 0{,}5°$ e $\Delta L = 0{,}1$.

17.9 MUDANÇA DE VARIÁVEIS E JACOBIANOS

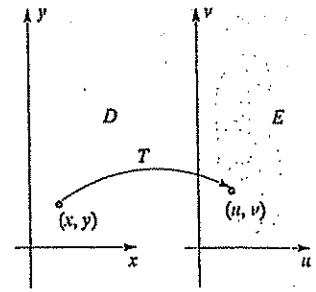


Figura 17.78

Na Seção 17.3 vimos como transformar uma integral dupla em coordenadas retangulares em outra integral dupla em coordenadas polares. Nas duas seções precedentes estudamos integrais triplas em coordenadas cilíndricas e esféricas. Introduziremos agora um método mais geral para a mudança de variáveis em integrais múltiplas. Este método está estreitamente relacionado com as *transformações* (ou *correspondências*) de um sistema retangular para outro.

Comecemos considerando uma função T cujo domínio D é uma região do plano-xy e cujo contradomínio E é uma região do plano-uv. De acordo com a Figura 17.78, a cada ponto (x, y) em D corresponde exatamente um ponto (u, v) em E tal que $T(x, y) = (u, v)$. Chamamos T uma **transformação de coordenadas** do plano-xy para o plano-uv. Como cada par (u, v) é univocamente determinado por (x, y), ambas u e v são funções de x e y. Temos, assim, as seguintes *fórmulas de transformação*, em que f e g são funções que têm o mesmo domínio D que T.

Transformação de coordenadas (17.33)

$$u = f(x, y), \quad v = g(x, y); \ (x, y) \text{ em } D, \ (u, v) \text{ em } E$$

Dada a transformação de coordenadas (17.33), particionemos uma região do plano-uv por meio de retas verticais $u = c_1$, $u = c_2$, $u = c_3$, ... e retas horizontais $v = d_1$, $v = d_2$, $v = d_3$, ..., conforme ilustrado na Figura 17.79(i). As curvas de nível para f e g no plano-xy são os gráficos de

$$u = f(x, y) = c_j \text{ e } v = g(x, y) = d_k$$

para $j = 1, 2, 3, \ldots$ e $k = 1, 2, 3, \ldots$. Estas curvas definem uma *partição curvilínea* de uma região no plano-xy, conforme ilustrado na Figura 17.79(ii). Chamamos as curvas $u = f(x, y) = c_j$ e $v = g(x, y) = d_k$ no plano-xy **curvas-u** e **curvas-v**, respectivamente. Naturalmente, os tipos de curvas obtidas dependem da

natureza das funções f e g. O próximo exemplo ilustra um caso em que cada curva-u e cada curva-v é uma reta.

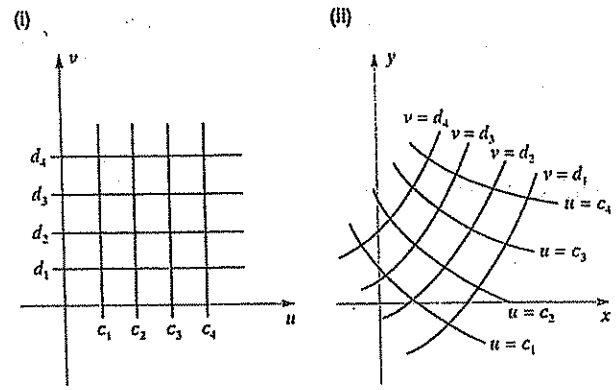


Figura 17.79

EXEMPLO 1

Seja T a transformação de coordenadas do plano-xy para o plano-uv definida por

$$u = x + 2y, v = x - 2y$$

Esboce, no plano-uv, as retas verticais $u = 2$, $u = 4$, $u = 6$, $u = 8$ e as retas horizontais $v = -1$, $v = 1$, $v = 3$, $v = 5$. Esboce as curvas-u e as curvas-v correspondentes no plano-xy.

SOLUÇÃO

A Figura 17.80(i) ilustra as retas verticais e horizontais no plano-uv.

As curvas no plano-xy são as retas

$$x + 2y = 2, x + 2y = 4, x + 2y = 6, x + 2y = 8$$

e as curvas-v são as retas

$$x - 2y = -1, x - 2y = 1, x - 2y = 3, x - 2y = 5$$

A Figura 17.80(ii) ilustra essas retas.

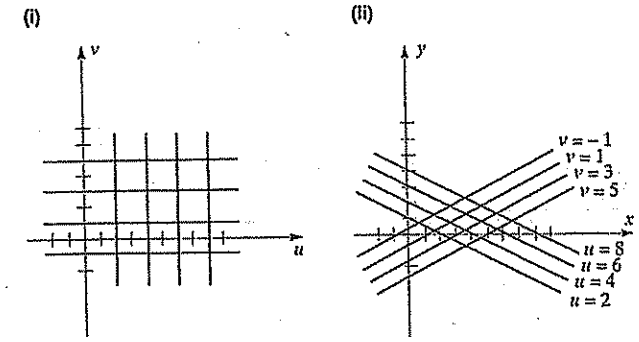


Figura 17.80

A transformação T no Exemplo 1 é um-a-um, isto é, se $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ no plano-xy, então $T(x_1, y_1) \neq T(x_2, y_2)$ no plano-uv. Em geral, se T é uma transformação de coordenadas um-a-um, então, invertendo a correspondência, obtemos uma transformação T^{-1} do plano-uv para o plano-xy chamada **inversa** de T. Podemos representar T^{-1} por equações da forma

$$x = F(u, v), y = G(u, v)$$

para certas funções F e G. Se ilustramos uma transformação T por meio de uma seta, conforme Figura 17.78, então a inversa T^{-1} pode ser ilustrada *invertendo-se* o sentido da seta, conforme Figura 17.81. Note que $T^{-1}(T(x, y)) = (x, y)$ e $T(T^{-1}(u, v)) = (u, v)$, para todo (x, y) em D e todo (u, v) em E.

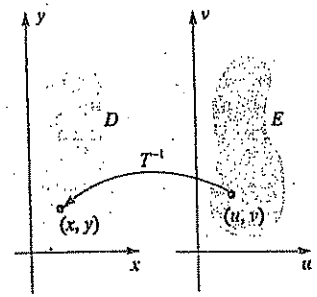


Figura 17.81

EXEMPLO 2

(a) Ache a inversa da transformação T do Exemplo 1.

(b) Ache a curva do plano-uv que T^{-1} transforma na elipse $x^2 + 4y^2 = 1$.

SOLUÇÃO

(a) A transformação T é dada por

$$u = x + 2y, v = x - 2y$$

Somando membro a membro estas equações, obtemos $u + v = 2x$. Subtraindo membro a membro, obtemos $u - v = 4y$. Assim, T^{-1} é dada por

$$x = \tfrac{1}{2}(u + v), \; y = \tfrac{1}{4}(u - v)$$

(b) Como x e y estão relacionados pelas duas últimas equações da parte (a), os pontos (u, v) correspondentes a $x^2 + 4y^2 = 1$ devem satisfazer a equação

$$[\tfrac{1}{2}(u + v)]^2 + 4[\tfrac{1}{4}(u - v)]^2 = 1$$

o que se simplifica para

$$u^2 + v^2 = 2$$

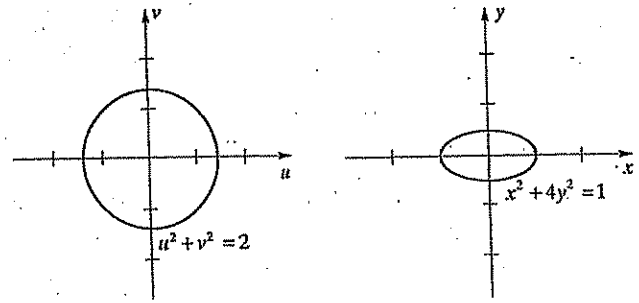


Figura 17.82

Segue-se que o círculo de raio $\sqrt{2}$ de centro na origem no plano-uv é transformado na elipse $x^2 + 4y^2 = 1$ por T^{-1} (ver Figura 17.82).

EXEMPLO 3

Se $P(x, y)$ é um ponto arbitrário com $x \neq 0$ no plano-xy, seja

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

e façamos $P(0, b)$ corresponder a $r = b, \theta = \pi/2$. Assim, r e θ são coordenadas polares de P, e as igualdades precedentes definem uma transformação de coordenadas T do plano-xy para o plano-$r\theta$. Trace, no plano-$r\theta$, os gráficos de $r = 1$, $r = 2$, $r = 3$ e $\theta = -\frac{1}{2}$, $\theta = \frac{1}{2}$, $\theta = \frac{3}{2}$. Esboce as curvas-r e curvas-θ correspondentes no plano-xy.

SOLUÇÃO

A Figura 17.83 é um esboço dos gráficos.

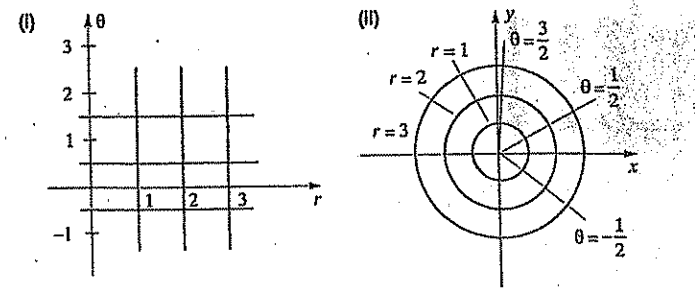


Figura 17.83

Na Seção 5.6 vimos como mudar variáveis em uma integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$. Sob condições convenientes, substituindo $x = g(u)$, então $dx = g'(u)\,du$ e

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(g(u))g'(u)\,du$$

em que $a = g(c)$ e $b = g(d)$ (ver Teorema (5.33)). Obteremos a seguir uma fórmula para mudar variáveis em uma integral dupla.

Consideremos $\iint_R F(x, y)\,dA$, em que R é uma região do plano-xy, e suponhamos a substituição

$$x = f(u, v), y = g(u, v)$$

em que f e g são funções dotadas de derivadas parciais segundas contínuas. Essas equações definem uma transformação de coordenadas W do plano-uv para o plano-xy. Uma vez substituídos x e y, o integrando se torna uma função de u e v. Um de nossos objetivos é achar uma região S do plano-uv que seja transformada em R por W, conforme ilustrado na Figura 17.84, e tal que

$$\iint_R F(x, y)\,dA = \iint_S F(f(u, v), g(u, v))\,dA$$

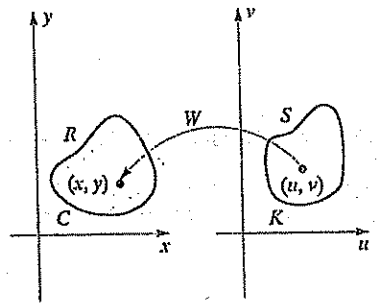


Figura 17.84

Para que exista uma região conveniente S, é necessário impor restrições à região R e ao integrando $F(x, y)$. Admitiremos que R consiste em todos os pontos que estão sobre uma curva simples, fechada, parcialmente suave C ou no interior dela, e que F tenha derivadas parciais primeiras contínuas em toda uma região aberta contendo R. A **direção positiva ao longo de** C é tal que, quando um ponto P percorre C, a região R está sempre à esquerda. Para a **direção negativa**, R está sempre à direita quando P percorre C. Exigiremos também que W transforme uma região S do plano-uv biunivocamente em R, e que S seja limitada por uma curva K simples, fechada, parcialmente suave que W transforme em C. Nossa exigência final é que, quando (u, v) traçar K uma vez na direção positiva, o ponto (x, y) correspondente trace C uma vez no sentido positivo ou no sentido negativo. É possível enfraquecer estas condições, entretanto, isto ultrapassa o âmbito deste livro.

A função de u e v introduzida na próxima definição será usada no processo de mudança de variável. Sua denominação é uma homenagem ao matemático alemão C.G. Jacobi (1804-1851).

Definição (17.34) Se $x = f(u, v)$ e $y = g(u, v)$, então o **jacobiano** de x e y em relação a u e v, denotado por $\partial(x, y)/\partial(u, v)$, é

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}$$

No próximo teorema, *todos os símbolos têm as mesmas significações que anteriormente, e admitiremos que as regiões e funções satisfaçam as condições impostas.* No enunciado do teorema, utilizaremos as notações $dx\,dy$ e $du\,dv$ em lugar de dA, de modo a não restar nenhuma dúvida sobre a região de integração.

Teorema (17.35) Se $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$ é uma transformação de coordenadas, então

$$\iint_R F(x, y)\,dx\,dy = \pm \iint_S F(f(u, v), g(u, v))\,\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\,du\,dv$$

À medida que (u, v) traça a fronteira K de S uma vez na direção positiva, o ponto correspondente (x, y) traça a fronteira C de R uma vez, seja no sentido positivo, quando se escolhe o sinal "mais", ou no sentido negativo, quando se escolhe o sinal "menos".

No Apêndice II damos uma demonstração do Teorema (17.35) baseada no Teorema de Green (18.19).

Fazendo $F(x, y) = 1$ para todo (x, y) em R, então a integral à esquerda em (17.35) é a área A de R; obtemos

$$A = \pm \iint_S \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\,du\,dv$$

Se $\partial(x, y)/\partial(u, v) > 0$ em toda a S, então a integral dupla à direita desta equação é positiva, devendo-se usar o sinal +. Isto mostra que se o jacobiano é sempre positivo, então, quando o ponto (u, v) traça a fronteira K e S uma vez na direção positiva, o ponto (x, y) traça a fronteira C de R uma vez na direção positiva. Se o jacobiano é sempre negativo, então (x, y) traça C uma vez na direção negativa. Isto nos dá o seguinte corolário do Teorema (17.35).

Corolário (17.36) Se $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$ é uma transformação de coordenadas e se o jacobiano $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ não muda de sinal em S, então

$$\iint_R F(x, y)\,dx\,dy = \iint_S F(f(u, v), g(u, v))\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv$$

EXEMPLO 4

Calcule

$$\iint_R e^{(y-x)/(y+x)}\,dx\,dy$$

em que R é a região do plano-xy delimitada pelo trapezóide de vértices (0, 1), (0, 2), (2, 0) e (1, 0).

SOLUÇÃO

O fato de $y-x$ e $y+x$ aparecerem no integrando sugere a seguinte substituição:

$$u = y - x, \quad v = y + x$$

Estas equações definem uma transformação T do plano-xy para o plano-uv. Para aplicar o Teorema (17.35), devemos utilizar a transformação inversa T^{-1}. Para achar T^{-1}, resolvemos as equações precedentes em relação a x e y em termos de u e v, obtendo

$$x = \tfrac{1}{2}(-u + v), \quad y = \tfrac{1}{2}(u + v)$$

Por (17.34), o jacobiano é

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$$

A Figura 17.85(i) ilustra a região R. Para determinar a região S no plano-uv que se transforma em R, notemos que os lados de R estão sobre as retas

$$x = 0, x + y = 2, y = 0, x + y = 1$$

Fazendo $x = \frac{1}{2}(-u + v)$ e $y = \frac{1}{2}(u + v)$, vemos que as curvas correspondentes no plano-uv são, respectivamente,

$$v = u, v = 2, v = -u, v = 1$$

Essas retas definem a fronteira da região trapezoidal S exibida na Figura 17.85(ii).

(i) (ii)

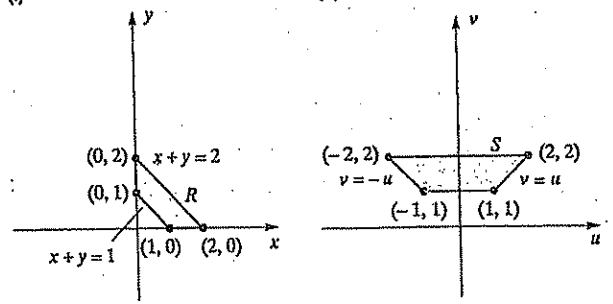


Figura 17.85

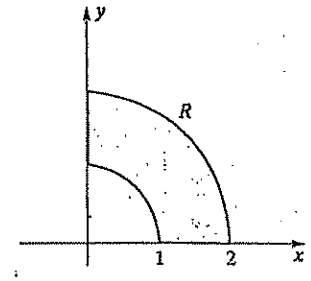


Figura 17.86

Se o ponto (u, v) percorre a reta $v = u$ de (1, 1) a (2, 2), então o ponto correspondente (x, y) percorre a reta $x = 0$ de (0, 1) a (0, 2). Analogamente, se (u, v) percorre a reta $v = 2$ de (2, 2) a (−2, 2), então (x, y) percorre a reta $x + y = 2$ de (0, 2) a (2, 0). Procedendo desta maneira, vê-se que, se (u, v) percorre a fronteira de S uma vez na direção *positiva*, então (x, y) traça a fronteira de R uma vez na direção *negativa*. Pode-se mostrar também, por meio de desigualdades, que pontos interiores de S correspondem a pontos interiores de R.

Aplicando o Teorema (17.35), temos

$$\iint_R e^{(y-x)/(y+x)}\,dx\,dy = -\iint_S e^{u/v}\left(-\tfrac{1}{2}\right)du\,dv$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_1^2 \int_{-v}^{v} e^{u/v}\,du\,dv$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_1^2 \left[ve^{u/v} \right]_{-v}^{v} dv = \tfrac{1}{2}\int_1^2 v(e - e^{-1})\,dv$$

$$= \tfrac{1}{2}(e - e^{-1})\left[\tfrac{1}{2}v^2 \right]_1^2 = \tfrac{3}{4}(e - e^{-1}) \approx 1{,}763$$

EXEMPLO 5

Calcule $\iint_R e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$ para a região R do primeiro quadrante no plano-xy situada entre os arcos circulares da Figura 17.86.

SOLUÇÃO

Poderíamos calcular esta integral transformando-a em coordenadas polares, como fizemos na Seção 17.3, entretanto, nosso objetivo é demonstrar a aplicação do Teorema (17.35). A substituição polar

$$x = r\cos\theta, y = r\operatorname{sen}\theta$$

define uma transformação do plano-$r\theta$ no plano-xy, cujo jacobiano é

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

Pode-se verificar que a região retangular S no plano-$r\theta$ delimitada por $r = 1$, $r = 2$, $\theta = 0$ e $\theta = \pi/2$ (ver Figura 17.87) corresponde a R pela transformação. Além disso, quando (r, θ) percorre a fronteira de S uma vez na direção positiva, o ponto

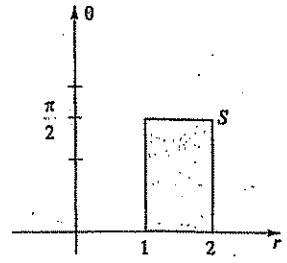


Figura 17.87

correspondente (x, y) percorre R uma vez na direção positiva. Logo, pelo Teorema (17.35),

$$\iint_R e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \iint_S e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta$$
$$= \int_0^{\pi/2}\int_1^2 e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\left[-\tfrac{1}{2}e^{-r^2}\right]_1^2 d\theta$$
$$= -\tfrac{1}{2}(e^{-4}-e^{-1})\int_0^{\pi/2} d\theta$$
$$= -\tfrac{1}{4}\pi(e^{-4}-e^{-1}) \approx 0{,}275$$

Pode-se estender a Definição (17.34) a funções de três variáveis, como a seguir.

Definição (17.37) Se $x = f(u, v, w)$, $y = g(u, v, w)$ e $z = h(u, v, w)$, então o jacobiano de x, y e z em relação a u, v e w, denotado por $\partial(x, y, z)/\partial(u, v, w)$, se define como

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

O teorema seguinte é o análogo tridimensional ao Corolário (17.36).

Teorema (17.38) Se $x = f(u, v, w)$, $y = g(u, v, w)$, $z = h(u, v, w)$ é uma transformação de coordenadas de uma região S em um sistema coordenado-uvw em uma região R em um sistema coordenado-xyz, e se o jacobiano $\partial(x, y, z)/\partial(u, v, w)$ não muda de sinal em S, então

$$\iiint_R F(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_S G(u, v, w)\left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right| du\,dv\,dw$$

em que $G(u, v, w)$ é a expressão obtida pela substituição de x, y, z em $F(x, y, z)$.

Para ilustrar a Definição (17.37), se utilizarmos as fórmulas das coordenadas esféricas (17.31), então

$$x = \rho \operatorname{sen}\phi\cos\theta,\ y = \rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta,\ z = \rho\cos\phi$$

No Exercício 33, pede-se mostrar que

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, \theta)} = \rho^2 \operatorname{sen}\phi$$

Como $\rho^2 \operatorname{sen}\phi \geq 0$, a conclusão do Teorema (17.38) toma a forma

$$\iiint_R F(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_S G(\rho, \phi, \theta)\rho^2 \operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

que concorda com a fórmula (17.32), obtida de maneira intuitiva.

Concluiremos esta seção com um problema aplicado que envolve uma mudança de variáveis em uma integral dupla.

EXEMPLO 6

Senóides elípticas constituem boas aproximações da forma do fundo de muitos lagos. Suponha que a borda de um lago tenha a forma da elipse $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$, com a e b positivos. Se a profundidade máxima da água é h_M, então uma senóide elíptica é dada por

$$f(x, y) = -h_M \cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\right)$$

em que $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) \leq 1$ (ver Figura 17.88). Ache o volume V e a profundidade média $h_{méd}$ da água no lago.

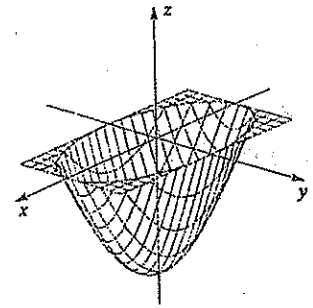
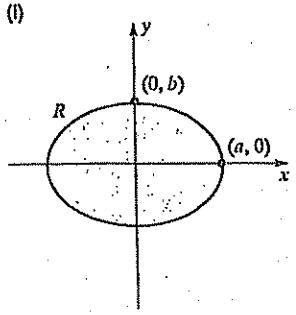


Figura 17.88

SOLUÇÃO

Se R é a região elíptica que corresponde à superfície do lago (ver Figura 17.89(i)), então, como a profundidade da água em (x, y) é $|f(x, y)|$,

(I)



(II)

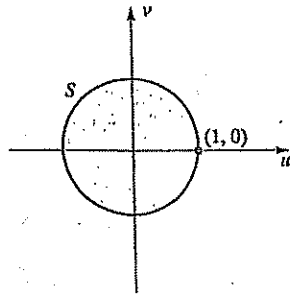


Figura 17.89

$$V = \iint_R |f(x, y)|\, dA = h_M \iint_R \cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}\right) dA$$

A forma do integrando sugere a substituição

$$x = au,\ y = bv$$

Neste caso, o jacobiano é $\partial(x, y)/\partial(u, v) = ab > 0$, e a região S que corresponde a R é o disco circular $u^2 + v^2 \le 1$ (ver Figura 17.89(ii)). Aplicando o Corolário (17.36), obtemos

$$V = abh_M \iint_S \cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{u^2 + v^2}\right) du\, dv$$

Podemos agora calcular a última integral transformando-a em coordenadas polares $u = r\cos\theta$, $v = r\,\text{sen}\,\theta$, o que nos dá

$$V = abh_M \int_0^{2\pi}\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}r\right) r\, dr\, d\theta$$

Utilizando a integração por partes, ou a Fórmula 83 da tábua de integrais, temos

$$V = abh_M \int_0^{2\pi}\left[\frac{4}{\pi^2}\cos\left(\frac{\pi}{2}r\right) + \frac{2}{\pi}r\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}r\right)\right]_0^1 d\theta$$

$$= abh_M \int_0^{2\pi}\left(\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi^2}\right) d\theta$$

$$= abh_M \left(\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi^2}\right) 2\pi \approx 1{,}4535abh_M$$

Esta fórmula pode ser usada para estimar o volume do lago a partir das três medidas a, b e h_M.

A área da região elíptica R é πab. Aplicando às integrais duplas um análogo da Definição (5.29), obtemos a profundidade média:

$$h_{méd} = \frac{1}{\pi ab}\iint_R |f(x, y)|\, dA$$

Logo

$$h_{méd} \approx \frac{1}{\pi ab}(1{,}4535)abh_M \approx 0{,}4627h_M$$

Um estudo de 107 lagos em todo o mundo acusou um valor médio $h_{méd}/h_M$ de 0,467.

EXERCÍCIOS 17.9

Exercs. 1-8: Seja T a transformação do plano-xy para o plano-uv definida pelas fórmulas dadas. (a) Descreva as curvas-u e as curvas-v. (b) Estabeleça fórmulas $x = F(u, v)$, $y = G(u, v)$ que definam T^{-1}.

1 $u = 3x$, $v = 5y$

2 $u = \frac{1}{2}y$, $v = \frac{1}{3}x$

3 $u = x - y$, $v = 2x + 3y$

4 $u = -5x + 4y$, $v = 2x - 3y$

5 $u = x^3$, $v = x + y$

6 $u = x + 1$, $v = 2 - y^3$

7 $u = e^x$, $v = e^y$

8 $u = e^{2y}$, $v = e^{-3x}$

Exercs. 9-12: Seja T a transformação de coordenadas indicada (ver Exercícios 1-4). Ache a curva no plano-uv que corresponde à curva no plano-xy especificada em (a) e (b).

9 $u = 3x$, $v = 5y$

(a) o retângulo de vértices (0, 0), (0, 1), (2, 1), (2, 0).

(b) o círculo $x^2 + y^2 = 1$

10 $u = \frac{1}{2}y$, $v = \frac{1}{3}x$

(a) o triângulo de vértices (0, 0), (3, 6), (9, 4)

(b) a reta $3x - 2y = 4$

11 $u = x - y$, $v = 2x + 3y$

(a) o triângulo de vértices (0, 0), (0, 1), (2, 0)

(b) a reta $x + 2y = 1$

12 $u = -5x + 4y$, $v = 2x - 3y$

(a) o quadrado de vértices (0, 0), (1, −1), (2, 0), (1, 1)

(b) o círculo $x^2 + y^2 = 1$

Exercs. 13-16: Ache o jacobiano $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$.

13 $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$

14 $x = e^u \,\text{sen}\, v$, $y = e^u \cos v$

15 $x = ve^{-2u}$, $y = u^2e^{-v}$

16 $x = \dfrac{u}{u^2 + v^2}$, $y = \dfrac{v}{u^2 + v^2}$

Exercs. 17-18: Ache o jacobiano $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$.

17 $x = 2u + 3v - w$, $y = v - 5w$, $z = u + 4w$

18 $x = u^2 + vw$, $y = 2v + u^2w$, $z = uvw$

Exercs. 19-22: Expresse a integral como uma integral dupla iterada sobre uma região S no plano-uv fazendo a mudança de variáveis indicada.

19 $\iint_R (y - x)\, dx\, dy$

fronteira de R: $y = 2x$, $y = 0$, $x = 2$

mudança de variáveis $x = u + v$, $y = 2v$

20 $\iint_R (3x - 4y)\, dx\, dy$

fronteira de R: $y = 3x$, $y = \frac{1}{2}x$, $x = 4$

mudança de variáveis: $x = u - 2v$, $y = 3u - v$

21 $\iint_R (\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}y^2)\, dx\, dy$

fronteira de R: $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}y^2 = 1$

mudança de variáveis: $x = 2u$, $y = 3v$

22 $\iint_R xy\, dx\, dy$

fronteira de R: $y = 2\sqrt{1 - x}$, $x = 0$, $y = 0$

mudança de variáveis: $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$

Exercs. 23-28: Calcule a integral fazendo a mudança de variáveis indicada.

23 $\iint_R (x - y)^2 \cos^2(x + y)\, dx\, dy$

fronteira de R: o quadrado de vértices (0, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 0)

mudança de variáveis: $u = x - y$, $v = x + y$

24 $\iint_R \operatorname{sen} \frac{y-x}{y+x}\,dx\,dy$

fronteira de R: o trapézio de vértices (1, 1), (2, 2), (4, 0), (2, 0)

mudança de variáveis: $u = y - x$, $v = y + x$

25 $\iint_R (x^2 + 2y^2)\,dx\,dy$

fronteira de R: $xy = 1$, $xy = 2$, $y = |x|$, $y = 2x$

mudança de variáveis: $x = u/v$, $y = v$

26 $\iint_R \frac{1}{(4x - 4y + 1)^2}\,dx\,dy$

fronteira de R: $x = \sqrt{-y}$, $x = y$, $x = 1$

mudança de variáveis: $x = u + v$, $y = v - u^2$

27 $\iint_R \frac{2y + x}{y - 2x}\,dx\,dy$

fronteira de R: o trapézio de vértices $(-1, 0)$, $(-2, 0)$, $(0, 4)$, $(0, 2)$

mudança de variáveis: $u = y - 2x$, $v = 2y + x$

28 $\iint_R (\sqrt{x - 2y} + \frac{1}{4}y^2)\,dx\,dy$

fronteira de R: o triângulo de vértices (0, 0), (4, 0), (4, 2)

mudança de variáveis: $u = \frac{1}{2}y$, $v = x - 2y$

29 Em virtude da rotação, a Terra não é perfeitamente esférica, mas ligeiramente achatada nos pólos, com raio polar de 6.356 quilômetros e raio equatorial de 6.378 quilômetros. Resulta daí que a forma da Terra pode ser aproximada pelo elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

com $a = b = 6.378$ e $c = 6.356$. Estime o volume da Terra. (*Sugestão:* Fazer $x = au$, $y = bv$, $z = cw$.)

30 Um balão tem a forma da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, em que x, y e z são expressos em metros. O balão é aquecido vagarosamente à pressão constante de uma atmosfera, isto é, $1{,}01 \times 10^5$ N/m^2, e se expande até atingir a forma do elipsóide $x^2/10 + y^2/16 + z^2/12 = 1$. Para um gás ideal, o trabalho W efetuado pelo gás é dado por

$$W = \iiint_{V_1}^{V_2} P\,dV$$

em que P é a pressão e V_1 e V_2 são os volumes inicial e final. Use o Exercício 29 para achar W.

31 Ref. Exercício 41, Seção 17.8. É muito difícil achar fórmulas que descrevam a posição final da mão quando se movimentam cinco ou seis juntas do braço de um robô. O processo pode ser simplificado utilizando-se os três *ângulos de Euler* ϕ, θ e ψ para rotação de eixos coordenados. Referindo-nos à figura, primeiro giramos o plano-xy de um ângulo ϕ em torno do eixo-z, obtendo os novos eixos x'' e y''. Em seguida, giramos o plano-$x''z$ de um ângulo θ em torno do eixo-y'', obtendo os novos eixos x''' e z'. Finalmente, giramos o plano-$x'''y''$ de um ângulo ψ em torno do eixo-z', obtendo os novos eixos x' e y'. Se as coordenadas de um ponto P da mão são (x, y, z) no sistema-xyz, então suas coordenadas (x', y', z') no sistema transformado são dadas por

$$x' = (\cos\phi\cos\theta\cos\psi - \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\psi)x + (-\cos\phi\cos\theta\operatorname{sen}\psi - \operatorname{sen}\phi\cos\psi)y + (\cos\phi\operatorname{sen}\theta)z$$

$$y' = (\operatorname{sen}\phi\cos\theta\cos\psi + \cos\phi\operatorname{sen}\psi)x + (-\operatorname{sen}\phi\cos\theta\operatorname{sen}\psi + \cos\phi\cos\psi)y + (\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta)z$$

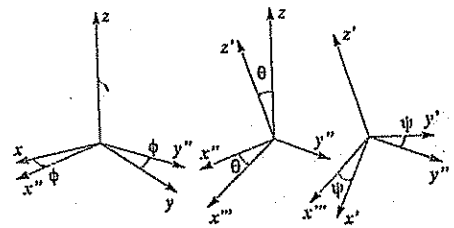
$$z' = (-\operatorname{sen}\theta\cos\psi)x + (\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi)y + (\cos\theta)z$$

(a) Gira-se de um ângulo $\phi = 45°$ a mão de um robô posicionada em $F(\sqrt{2}, 0, 1)$. Ache a nova localização da mão.

(b) Gira-se em seguida a mão de um ângulo $\theta = 90°$. Ache a nova locação da mão.

(c) Finalmente, gira-se a mão de um ângulo $\psi = 90°$. Ache a posição final da mão.

31



32 Se o braço de um robô tem muitas juntas, pode-se posicionar sua mão em uma localização específica de mais de uma maneira, girando as juntas diferentemente. Há exatamente uma escolha para a rotação se e somente se o jacobiano da transformação de coordenadas for diferente de zero.

(a) Ache o jacobiano $\partial(x', y', z')/\partial(x, y, z)$ do Exercício 31 se $\phi = 45°$, $\theta = 90°$ e $\psi = 90°$.

(b) Pode-se posicionar a mão na mesma localização utilizando valores diferentes de ϕ, θ e ψ?

33 Verifique que, para a transformação de coordenadas esféricas,

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, \theta)} = \rho^2 \operatorname{sen}\phi$$

34 Use (17.38) para estabelecer uma fórmula para transformar

$$\iiint_R F(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

de coordenadas retangulares para coordenadas cilíndricas.

35 Se a transformação de coordenadas $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$ é um-a-um, mostre que

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\,\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 1$$

Sugestão: Aplique a propriedade seguinte dos determinantes:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{vmatrix}$$

36 Dadas a transformação $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$ e a transformação $u = h(r, s)$, $v = k(r, s)$, mostre que

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\,\frac{\partial(u, v)}{\partial(r, s)} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, s)}$$

(*Sugestão*: Use a sugestão do Exercício 35.)

Exercs. 37-38: Seja T a transformação indicada do plano-uv para o plano-xy. Grafe os pontos (u, v) tais que $\partial(x, y)/\partial(u, v) = 0$ para os valores indicados de u. (Este gráfico mostra onde T não é um-a-um.)

37 $x = \frac{1}{4}v^4 + u^2$, $y = u - \cos v$; $-\pi \le u \le \pi$

38 $x = \frac{1}{20}u^4 - 10\cos u + \frac{1}{2}v^2$, $y = u + v$; $-5 \le u \le 5$

17.10 EXERCÍCIOS DE REVISÃO

Exercs. 1-6: Calcule a integral iterada.

1 $\int_{-1}^{0}\int_{x+1}^{x^2} (x^2 - 2y)\,dy\,dx$

2 $\int_{1}^{2}\int_{1}^{y^2} \frac{1}{y}\,dx\,dy$

3 $\int_{0}^{3}\int_{r}^{r^2+1} r\,d\theta\,dr$

4 $\int_{2}^{0}\int_{0}^{z^2}\int_{x}^{z} (x + z)\,dy\,dx\,dz$

5 $\int_{0}^{2}\int_{\sqrt{y}}^{1}\int_{x^2}^{y} x\,y^2 z^3\,dx\,dz\,dy$

6 $\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{\pi/4}\int_{0}^{a\cos\phi} \rho^2 \operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$

Exercs. 7-10: Se $f(x, y)$ é uma função contínua arbitrária, expresse $\iint_R f(x, y)\,dA$ como uma integral dupla iterada, em que R é a região delimitada pelos gráficos das equações.

7 $x^2 - y^2 = 4$, $x = 4$

8 $x^2 - y^2 = 4$, $y = 4$, $y = 0$

9 $y^2 = 4 + x$, $y^2 = 4 - x$

10 $y = -x^2 + 4$, $y = 3x^2$

Exercs. 11-14: Esboce a região de integração para a integral iterada.

11 $\int_{-1}^{1} \int_{e^x}^{e^3} dx\ dy$

12 $\int_{-1}^{0} \int_{x}^{-x^2} dy\ dx$

13 $\int_{0}^{\pi} \int_{0}^{2+4\cos\theta} r\ dr\ d\theta$

14 $\int_{0}^{2} \int_{-\sqrt{y^2+1}}^{\sqrt{y^2+1}} \int_{0}^{\sqrt{1-x^2+y^2}} dz\ dx\ dy$

Exercs. 15-16: Inverta a ordem de integração e calcule a integral resultante.

15 $\int_{0}^{3} \int_{y^2}^{9} ye^{-x^2}\ dx\ dy$

16 $\int_{0}^{1} \int_{x}^{\sqrt{x}} e^{x/y}\ dy\ dx$

Exercs. 17-18: Ache o volume do sólido abaixo do gráfico da equação e acima da região R no plano-xy.

17 $z = xy^2$; R é o retângulo de vértices (1, 1), (2, 1), (1, 3), (2, 3).

18 $z = 7 - x^2 - y^2$; R é o círculo $x^2 + y^2 = 4$.

19 Ache a área da parte da superfície do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 4x$.

20 Ache a área da superfície da parte do hiperbolóide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ que está sobre o círculo $x^2 + y^2 = 1$.

21 Por meio de uma integral dupla ache a área da região delimitada pelo eixo polar e os gráficos de $r = e^{\theta}$ e $r = 2$ de $\theta = 0$ a $\theta = \ln 2$.

22 Utilizando coordenadas polares, calcule

$$\int_{-a}^{0} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{a} \sqrt{x^2 + y^2}\ dy\ dx$$

23 Utilizando coordenadas esféricas, calcule

$$\int_{0}^{4} \int_{0}^{\sqrt{16-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{32-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\ dz\ dy\ dx$$

24 Seja f uma função contínua arbitrária de x, y, z e seja Q a região delimitada pelo parabolóide $y = x^2 + 4z^2$ e o plano $y = 4$. Expresse $\iiint_Q f(x, y, z)\ dV$ como uma integral tripla iterada de seis maneiras distintas.

Exercs. 25-26: Ache a massa e o centro de massa da lâmina que tem a forma da região delimitada pelos gráficos das equações e a densidade indicada.

25 $y = x$, $y = 2x$, $x = 3$; densidade de massa por área em $P(x, y)$ diretamente proporcional à distância do eixo-y a P.

26 $y^2 = x$, $x = 4$; densidade de massa por área em $P(x, y)$ diretamente proporcional à distância da reta $x = -1$ a P.

27 Uma lâmina tem a forma da região interior ao caracol $r = 2 + \text{sen}\,\theta$ e exterior ao círculo $r = 1$. A densidade de massa por área em $P(r, \theta)$ é inversamente proporcional à distância do pólo a P. Ache a massa.

28 Uma lâmina tem a forma da região delimitada pelos gráficos de $y = x^2$ e $y = x^3$, e a densidade de massa por área em $P(x, y)$ é diretamente proporcional à distância do eixo-y a P. Ache I_x, I_y e I_O.

29 Uma lâmina tem a forma de um triângulo retângulo de lados com comprimentos a, b e $\sqrt{a^2 + b^2}$. A densidade de massa por área é diretamente proporcional à distância em relação ao lado de comprimento a. Ache o momento de inércia em relação a uma reta contendo o lado de comprimento a.

30 Uma lâmina tem a forma da região entre círculos concêntricos de raios a e b, $a < b$. A densidade de massa por área em um ponto P é diretamente proporcional à distância do centro dos círculos a P. Utilizando coordenadas polares, ache o momento de inércia em relação a uma reta pelo centro.

31 Utilizando integrais triplas, ache o volume e o centróide do sólido delimitado pelos gráficos do cilindro $z = x^2$ e dos planos $y = 0$ e $y + z = 4$.

32 Um sólido é delimitado pelo parabolóide $z = 9x^2 + y^2$ e pelo plano $z = 9$. A densidade em $P(x, y, z)$ é inversamente proporcional ao quadrado da distância de $(0, 0, -1)$ a P. Estabeleça uma integral tripla iterada para achar o momento de inércia em relação ao eixo-z.

33 Um sólido é delimitado pelo hiperbolóide $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ e pelos planos $y = 0$ e $y = 4$. A densidade em $P(x, y, z)$ é diretamente proporcional à distância do eixo-y a P. Estabeleça uma integral tripla iterada para achar o momento de inércia em relação ao eixo-y.

34 Um sólido homogêneo de densidade δ é delimitado pelo parabolóide $z = 9 - x^2 - y^2$, pelo interior do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e pelo plano-xy. Por meio de coordenadas cilíndricas, ache

(a) a massa (b) o centro de massa

(c) o momento de inércia em relação ao eixo-z.

35 Um sólido esférico tem raio a, e a densidade em um ponto arbitrário é diretamente proporcional à distância do ponto ao centro da esfera. Utilize coordenadas esféricas para achar a massa.

Exercs. 36-37: Complete a tabela.

	Coordenadas retangulares	Coordenadas cilíndricas	Coordenadas esféricas
36	$(2, -2, 1)$	_____	_____
37	_____	_____	$(12, \pi/6, 3\pi/4)$

Exercs. 38-43: Escreva a equação em coordenadas retangulares e descreva seu gráfico em três dimensões.

38 $r = -\csc\theta$ 39 $z + 3r^2 = 9$

40 $z = \frac{1}{4}r$ 41 $\rho\,\text{sen}\,\phi = 4$

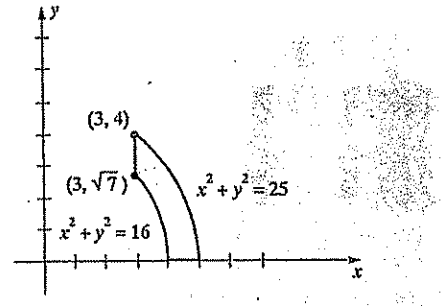
42 $\rho\,\text{sen}\,\phi\cos\theta = 1$ 43 $\rho^2 - 3\rho = 0$

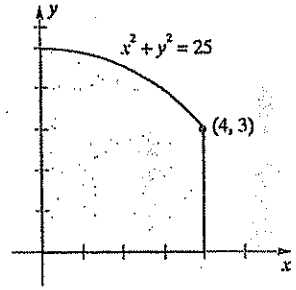
Exercs. 44-47: Transforme a equação para (a) coordenadas cilíndricas e (b) coordenadas esféricas.

44 $x^2 + y^2 = 1$ 45 $z = x^2 - y^2$

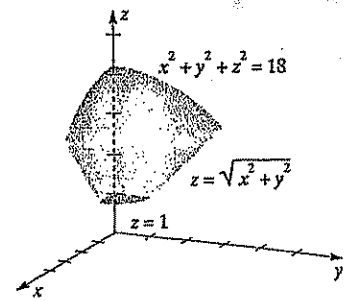
46 $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$ 47 $2x + y - 3z = 4$

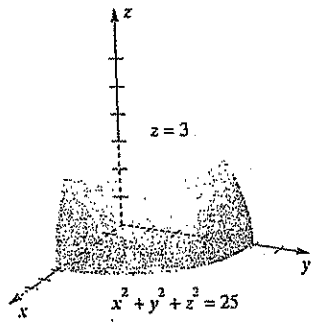
Exercs. 48-49: Expresse a área da região em termos de uma ou mais integrais duplas iteradas que envolvam apenas a ordem de integração (a) $dy\ dx$, (b) $dx\ dy$ e (c) $dr\ d\theta$.





Exercs. 50-51: Expresse a área da região em termos de uma ou mais integrais triplas iteradas em (a) coordenadas retangulares, (b) coordenadas cilíndricas e (c) coordenadas esféricas.





52 Se uma transformação T do plano-xy para o plano-uv é dada por $u = 2x + 5y$, $v = 3x - 4y$, ache

(a) as curvas-u (b) as curvas-v

(c) T^{-1} (d) $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$

(e) a curva do plano-uv correspondente à reta $ax + by + c = 0$

(f) a curva do plano-uv correspondente ao círculo $x^2 + y^2 = a^2$

53 Calcule a integral

$$\int_0^1 \int_y^{2-y} e^{(x-y)/(x+y)}\, dx\, dy$$

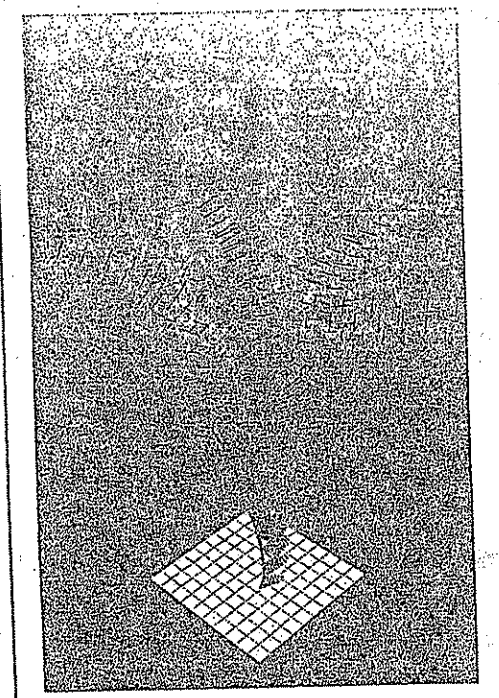
aplicando a mudança de variáveis $u = x - y$, $v = x + y$.

MAKRON Books

Capítulo 18

CÁLCULO VETORIAL

INTRODUÇÃO



Neste capítulo, aplicaremos métodos anteriores a novos conceitos, obtendo resultados que encontram muitas aplicações nas ciências. Abordaremos primeiro os *campos vetoriais*. As principais aplicações envolvem *campos de velocidade* e *campos de força* seja de sólidos, líquidos ou gases – assim chamados porque a cada partícula da substância associamos um vetor velocidade ou um vetor força. De importância primordial são os campos vetoriais *conservativos*, porque incluem os campos gravitacional e eletromagnético, presentes em todo o universo.

As *integrais curvilíneas*, que são generalizações da integral definida, permitem-nos achar o trabalho realizado quando uma partícula se move em um de campo de força. As *integrais de superfície* são extensões das integrais duplas e se aplicam a problemas de fluxo – taxa de fluxo de energia, fluídos e gases através de uma superfície. As integrais curvilíneas e de superfície são usadas na interpretação da *divergência* e do *rotacional* de um campo vetorial. A divergência mede a taxa à qual uma entidade física, como o calor, é absorvida ou gerada na vizinhança de um ponto. O rotacional permite descrever os aspectos rotacionais de um campo vetorial, tais como direção e magnitude da circulação do vento dentro de um tornado.

As seções finais abordam o *teorema da divergência* e o *teorema de Stokes*, que relacionam a divergência com o fluxo, e o trabalho com o rotacional, respectivamente. Estes dois importantes resultados têm conseqüências de largo alcance na ciência e na engenharia.

18.1 CAMPOS VETORIAIS

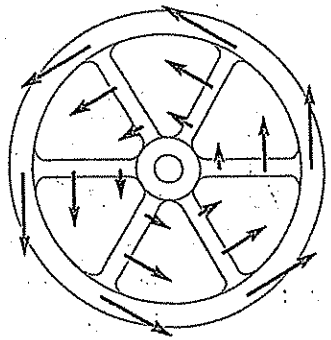


Figura 18.1

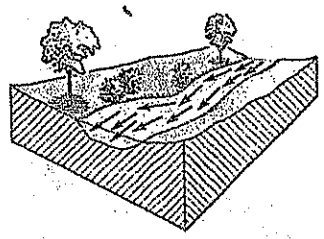


Figura 18.2

Se a cada ponto K de uma região está associado exatamente *um* vetor que tem K como ponto inicial, então a coleção de todos esses vetores constitui um **campo vetorial**. A Figura 18.1 ilustra um campo vetorial definido por uma roda girando em torno de um eixo. A cada ponto da roda corresponde um vetor velocidade. Um campo vetorial deste tipo é um **campo de velocidade**. Pode também determinar um campo de velocidade o fluxo de água ou do vento. A Figura 18.2 exibe vetores velocidade associados a partículas fluídas em movimento em uma corrente. Ilustrações assim exibem apenas uns poucos vetores do campo vetorial. É preciso ter em mente que a *todo* ponto da região está associado um vetor.

Um **campo de forças** é um campo vetorial em que a cada ponto está associado um vetor força. Os campos de força são comuns em estudos de mecânica e eletricidade. Em nossas ilustrações, admitimos que os vetores são independentes do tempo. Tais **campos vetoriais estacionários** são os únicos que estudaremos neste capítulo.

Dado um campo vetorial, introduzamos um sistema coordenado xyz e denotemos por $\mathbf{F}(x, y, z)$ o vetor associado ao ponto $K(x, y, z)$ (ver Figura 18.3). Como os componentes de $\mathbf{F}(x, y, z)$ dependem das coordenadas x, y e z de K, podemos escrever

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$$

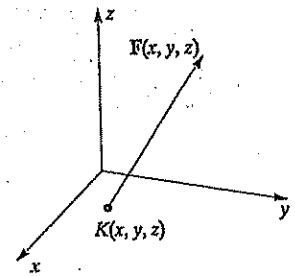


Figura 18.3

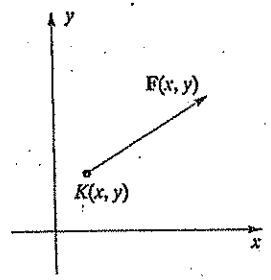


Figura 18.4

onde M, N e P são funções escalares. Reciprocamente, toda equação desse tipo define um campo vetorial. Assim, um campo vetorial pode ser encarado como uma função $\mathbf{F}$ do tipo indicado na definição seguinte.

Definição (18.1)

> Um **campo vetorial em três dimensões** é uma função $\mathbf{F}$ cujo domínio D é um subconjunto de $\mathbb{R}^3$ e cujo contradomínio é um subconjunto de V_3. Se (x, y, z) está em D, então
>
> $$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$$
>
> onde M, N e P são funções escalares.

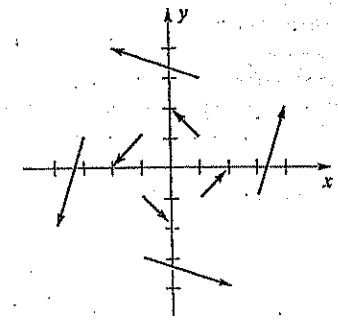


Figura 18.5

Como caso especial de (18.1), se o domínio D corresponde a uma região no plano-xy e se o contradomínio é um subconjunto de V_2 (ver Figura 18.4), então um **campo vetorial $\mathbf{F}$ em duas dimensões** é dado por

$$\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$$

onde M e N são funções escalares. Costumamos descrever um campo vetorial esboçando vetores que correspondam a $\mathbf{F}(x, y, z)$ ou a $\mathbf{F}(x, y)$ para pontos típicos (x, y, z) ou (x, y), conforme exemplo seguinte.

EXEMPLO 1

Descreva o campo vetorial $\mathbf{F}$ se $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

SOLUÇÃO

A tabela abaixo dá os vetores $\mathbf{F}(x, y)$ associados a diversos pontos (x, y); tais vetores estão esboçados na Figura 18.5.

(x, y)	$\mathbf{F}(x, y)$
$(1, 1)$	$-\mathbf{i} + \mathbf{j}$
$(-1, 1)$	$-\mathbf{i} - \mathbf{j}$
$(-1, -1)$	$\mathbf{i} - \mathbf{j}$
$(1, -1)$	$\mathbf{i} + \mathbf{j}$

(x, y)	$\mathbf{F}(x, y)$
$(1, 3)$	$-3\mathbf{i} + \mathbf{j}$
$(-3, 1)$	$-\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$
$(-1, -3)$	$3\mathbf{i} - \mathbf{j}$
$(3, -1)$	$\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

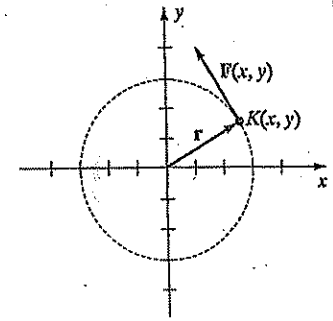


Figura 18.6

Os vetores são análogos aos associados à roda em movimento da Figura 18.1.

Para chegarmos a uma descrição geral do campo vetorial $\mathbf{F}$, consideremos um ponto arbitrário $K(x, y)$ e seja $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ o vetor posição para $K(x, y)$ (ver Figura 18.6). $\mathbf{F}(x, y)$ parece ser ortogonal a $\mathbf{r}$, sendo, assim, tangente ao círculo de raio $\|\mathbf{r}\|$ com centro na origem. Provamo-lo mostrando que $\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}(x, y) = 0$, como a seguir:

$$\begin{aligned}\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}(x, y) &= (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \cdot (-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}) \\ &= -xy + yx = 0\end{aligned}$$

Notemos também que

$$\|\mathbf{F}(x, y)\| = \sqrt{y^2 + x^2} = \|\mathbf{r}\|$$

Logo, o módulo de $\mathbf{F}(x, y)$ é igual ao raio do círculo. Isto implica que, quando o ponto $K(x, y)$ se move afastando-se da origem, o módulo de $\mathbf{F}(x, y)$ aumenta, como no caso da roda da Figura 18.1.

A próxima definição introduz um dos mais importantes campos vetoriais que ocorre nas ciências físicas.

Definição (18.2) Seja $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ o vetor posição de (x, y, z) e denotemos por $\mathbf{u} = (1/\|\mathbf{r}\|)\mathbf{r}$ o vetor unitário que tem a mesma direção de $\mathbf{r}$. Um campo vetorial $\mathbf{F}$ é um **campo quadrado inverso** se

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{c}{\|\mathbf{r}\|^2}\mathbf{u} = \frac{c}{\|\mathbf{r}\|^3}\mathbf{r},$$

onde c é um escalar.

EXEMPLO 2

Descreva o campo quadrado inverso $\mathbf{F}(x, y, z)$ de (18.2).

SOLUÇÃO

Como $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{c}{\|\mathbf{r}\|^3}\mathbf{r} = \frac{c}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

Podemos escrever a última expressão como em (18.1); entretanto, é mais simples analisar os vetores no campo utilizando $\mathbf{r}$. Se $c < 0$, então $\mathbf{F}(x, y, z)$ é um múltiplo escalar negativo de $\mathbf{r}$ e, então, $\mathbf{F}(x, y, z)$ está dirigido para a origem. Além disso, como

$$\|\mathbf{F}(x, y, z)\| = \frac{|c|}{\|\mathbf{r}\|^3}\|\mathbf{r}\| = \frac{|c|}{\|\mathbf{r}\|^2}$$

o módulo de $\mathbf{F}(x, y, z)$ é inversamente proporcional ao quadrado da distância de O ao ponto (x, y, z). Isto significa que, à medida que o ponto $K(x, y, z)$ se move afastando-se da origem, o módulo do vetor $\mathbf{F}(x, y, z)$ diminui. A Figura 18.7(i) ilustra alguns vetores típicos para $c < 0$. Se $c > 0$, os vetores dirigem-se *a partir* da origem, conforme Figura 18.7(ii).

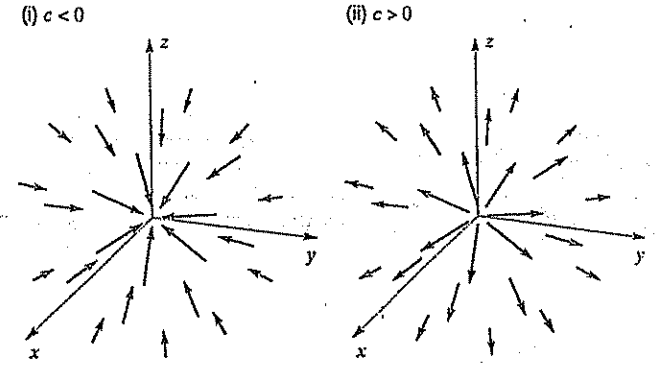


Figura 18.7 Campos vetoriais quadrados inversos.

A força da gravidade determina campos vetoriais quadrados inversos. De acordo com a **lei da gravitação universal de Newton**, se uma partícula de massa m_0 está localizada na origem de um sistema coordenado xyz, então a força exercida sobre uma partícula de massa m localizada em $K(x, y, z)$ é

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -G\frac{m_0 m}{\|\mathbf{r}\|^2}\mathbf{u}$$

onde G é uma constante gravitacional, $\mathbf{r}$ é o vetor posição do ponto K e $\mathbf{u} = (1/\|\mathbf{r}\|)\mathbf{r}$ é um vetor unitário.

Os campos quadrados inversos também ocorrem na teoria elétrica. A **lei de Coulomb** afirma que se uma carga pontual de Q coulombs está situada na origem, então a força $\mathbf{F}(x, y, z)$ que ela exerce sobre uma carga pontual de q coulombs localizada em $K(x, y, z)$ é

$$\mathbf{F}(x, y, z) = c\frac{Qq}{\|\mathbf{r}\|^2}\mathbf{u}$$

onde c é uma constante e $\mathbf{r}$ e $\mathbf{u}$ são os mesmos da Definição (18.2). Note que a lei de Coulomb tem a mesma forma da lei da gravitação universal de Newton.

Se f é uma função de três variáveis, então, conforme (16.31), o *gradiente* de $f(x, y, z)$ é o campo vetorial definido como a seguir:

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\mathbf{k}$$

Os campos vetoriais que são gradientes de funções escalares recebem um nome especial.

Definição (18.3)

> Um campo vetorial **F** é **conservativo** se
>
> $$\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$$
>
> para alguma função escalar f.

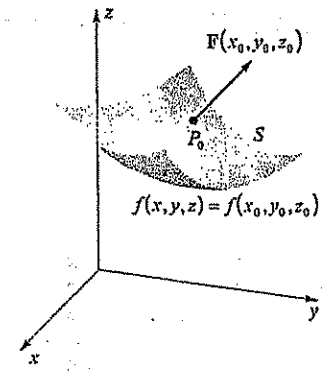


Figura 18.8

Se **F** é conservativo, então a função f em (18.3) é chamada **função potencial** para **F** e $f(x, y, z)$ é o **potencial** no ponto (x, y, z). Lembremos, do Teorema (16.36), que, se (x_0, y_0, z_0) está no domínio de $\mathbf{F} = \nabla f$, então o vetor gradiente $\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \mathbf{F}(x_0, y_0, z_0)$ é normal à superfície de nível S de f que contém P_0 (x_0, y_0, z_0). A superfície S é o gráfico da equação $f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0)$. Assim, *todo vetor* $\mathbf{F}(x_0, y_0, z_0)$ *em um campo vetorial conservativo é normal à superfície de nível de uma função potencial* f *para* **F** *que contém* $P_0(x_0, y_0, z_0)$. A Figura 18.8 ilustra um caso típico. Na Seção 16.6, provamos que $\|\mathbf{F}(x_0, y_0, z_0)\|$ é a taxa máxima de variação do potencial em P_0. Em aplicações onde $f(x, y, z)$ é a temperatura (ou potencial) em (x, y, z), esta taxa máxima de variação de f é normal à superfície isotérmica (ou equipotencial) que contém P_0.

O próximo teorema é importante nas aplicações.

Teorema (18.4)

> Todo campo vetorial quadrado inverso é conservativo.

DEMONSTRAÇÃO

Se **F** é um campo quadrado inverso, então, como na solução do Exemplo 2,

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{cx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,\mathbf{i} + \frac{cy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,\mathbf{j} + \frac{cz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,\mathbf{k}$$

onde c é uma constante. Pela Definição (18.3), se **F** é conservativo, então $\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$ para alguma função escalar f, e os componentes de **F** são $f_x(x, y, z)$, $f_y(x, y, z)$ e $f_z(x, y, z)$, respectivamente. A integração parcial desses componentes em relação a x, y e z, respectivamente, sugerem que

$$f(x, y, z) = \frac{-c}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$$

O cálculo das derivadas parciais de f prova que a suposição é correta. Temos o seguinte:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) = \nabla\left(\frac{-c}{r}\right)$$

onde $r = \|\mathbf{r}\| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$

As superfícies de nível para a função potencial f do campo vetorial quadrado inverso **F** na demonstração do Teorema (18.4) são os gráficos de equações da forma

$$\frac{-c}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} = k$$

onde $k < 0$. Elevando ambos os membros ao quadrado e tomando os inversos, obtemos

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{c^2}{k^2}$$

Assim, as superfícies de nível são esferas com centro na origem. Os vetores $\mathbf{F}(x, y, z)$ são ortogonais a essas esferas, sendo, pois, orientados para O ou a partir de O, conforme Figura 18.7.

Na física, a função potencial de um campo vetorial conservativo **F** se define como a função p tal que $\mathbf{F}(x, y, z) = -\nabla p(x, y, z)$. Neste caso, fazendo $p = -f$ na demonstração do Teorema (18.4), obtemos $\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla(c/r)$. Aduziremos novas informações sobre campos vetoriais conservativos mais adiante neste capítulo. Em particular, na Seção 18.3, estudaremos um método para achar $f(x, y, z)$, dado $\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$.

O operador diferencial vetorial ∇ em três dimensões é

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

Por (16.31), se ∇ opera sobre uma função *escalar* f, produz o gradiente de f,

$$\nabla f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathbf{k}$$

Aplicaremos a seguir o operador ∇ a um campo *vetorial*, para definir outro campo vetorial chamado *rotacional* de **F**, que denotaremos por rot **F**, ou $\nabla \times \mathbf{F}$.

Definição (18.5)

Seja $\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$, onde M, N e P têm derivadas parciais em alguma região. O **rotacional** de $\mathbf{F}$ é dado por

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Usaremos também o símbolo rot $\mathbf{F}$ ou $\nabla \times \mathbf{F}$ para denotar o vetor rot $\mathbf{F}(x, y, z)$ ou $\nabla \times \mathbf{F}(x, y, z)$ associado a (x, y, z). A expressão de rot $\mathbf{F}$ pode escrever-se na forma de um determinante, como a seguir:

Notação para rot F como determinante (18.6)

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix}$$

A expressão à direita em (18.6) não é propriamente um determinante, pois a primeira linha é composta de vetores, a segunda linha de símbolos de derivação parcial e a terceira linha de funções escalares; todavia, constitui um dispositivo extremamente útil para rememorar a incômoda fórmula da Definição (18.5).

EXEMPLO 3

Se $\mathbf{F}(x, y, z) = xy^2z^4\mathbf{i} + (2x^2y + z)\mathbf{j} + y^3z^2\mathbf{k}$, ache $\nabla \times \mathbf{F}$.

SOLUÇÃO

Aplicando (18.6), temos

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xy^2z^4 & (2x^2y + z) & (y^3z^2) \end{vmatrix}$$

$$= (3y^2z^2 - 1)\mathbf{i} + 4xy^2z^3\mathbf{j} + (4xy - 2xyz^4)\,\mathbf{k}$$

Na Seção 18.7 veremos que, se $\mathbf{F}$ é o campo de velocidade de um fluido ou gás em movimento em um sistema-xyz, então rot $\mathbf{F}$ nos dá informações sobre aspectos rotacionais do movimento. Se considerarmos um ponto $K(x, y, z)$ em que o fluido ou gás está rotando, ou "redemoinhando", então rot $\mathbf{F}$ está sobre o eixo de rotação (ver Figura 18.9) e pode ser usado para descrever propriedades rotacionais do campo.

Pode-se também utilizar o operador ∇ para obter uma função *escalar* a partir de um campo vetorial $\mathbf{F}$, como a seguir.

Definição (18.7)

Seja $\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$, com M, N e P dotadas de derivadas parciais em alguma região. A **divergência** de $\mathbf{F}$, denotada por div $\mathbf{F}$ ou $\nabla \cdot \mathbf{F}$ é dada por

$$\text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$$

Usamos o símbolo $\nabla \cdot \mathbf{F}$ para a divergência porque a fórmula pode ser obtida por meio do que *parece* ser o produto escalar de ∇ e $\mathbf{F}$, como segue

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right) \cdot (M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k})$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(M) + \frac{\partial}{\partial y}(N) + \frac{\partial}{\partial z}(P)$$

Tal como no próximo exemplo, usaremos o símbolo $\nabla \cdot \mathbf{F}$ para denotar o valor funcional $(\nabla \cdot \mathbf{F})(x, y, z)$. O valor de $\nabla \cdot \mathbf{F}$, ou div $\mathbf{F}$, em um ponto particular k, se denota por

$$[\nabla \cdot \mathbf{F}]_k \text{ ou } [\text{div } \mathbf{F}]_k$$

EXEMPLO 4

Se $\mathbf{F}(x, y, z) = xy^2z^4\mathbf{i} + (2x^2y + z)\mathbf{j} + y^3z^2\mathbf{k}$, ache $\nabla \cdot \mathbf{F}$.

SOLUÇÃO

Pela Definição (18.7),

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy^2z^4) + \frac{\partial}{\partial y}(2x^2y + z) + \frac{\partial}{\partial z}(y^3z^2)$$

$$= y^2z^4 + 2x^2 + 2y^3z$$

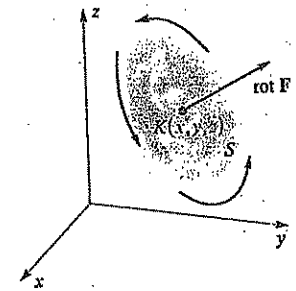


Figura 18.9

Na Seção 18.6 veremos que, se $\mathbf{F}$ é o campo de velocidade de um fluido ou gás, então div $\mathbf{F}$ nos informa sobre o fluxo de massa. Se K é um ponto e $[\text{div } \mathbf{F}]_k < 0$, há maior quantidade de massa fluindo para o ponto do que saindo dele; dizemos que existe um poço em K. Se $[\text{div } \mathbf{F}]_k > 0$, flui maior quantidade de

massa de K do que para K, há então uma fonte em K. Se $[\text{div } \mathbf{F}]_k = 0$, o que é verdadeiro para fluidos incompressíveis, não há poço nem fonte em K. Da mesma forma, se $\mathbf{F}$ representa o fluxo de calor e se $[\nabla \cdot \mathbf{F}]_k > 0$, então há uma fonte de calor em K (isto é, o calor está *deixando* K e, assim, a temperatura em K está decrescendo). Se $[\nabla \cdot \mathbf{F}]_k < 0$, o calor está sendo *absorvido* em K (a temperatura em K está aumentando).

Podem-se estabelecer várias propriedades algébricas para *div* e *rot*. No próximo exemplo, abordamos uma propriedade análoga à regra do produto para derivadas. Outras propriedades constam dos Exercícios 23-26.

EXEMPLO 5

Sejam f uma função escalar e $\mathbf{F}$ uma função vetorial. Se as derivadas parciais existem, mostre que

$$\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = f(\nabla \cdot \mathbf{F}) + (\nabla f) \cdot \mathbf{F}$$

SOLUÇÃO

Escrevendo $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$, onde M, N e P são funções de x, y e z, então

$$f\mathbf{F} = fM\mathbf{i} + fN\mathbf{j} + fP\mathbf{k}$$

Aplicando a Definição (18.7), obtemos

$$\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = \frac{\partial}{\partial x}(fM) + \frac{\partial}{\partial y}(fN) + \frac{\partial}{\partial z}(fP)$$

$$= f\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}M + f\frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}N + f\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z}P$$

Reagrupando os termos:

$$\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = f\left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\right) + f\left(\frac{\partial f}{\partial x}M + \frac{\partial f}{\partial y}N + \frac{\partial f}{\partial z}P\right)$$

$$= f(\nabla \cdot \mathbf{F}) + (\nabla f) \cdot \mathbf{F}$$

Finalmente, se um campo vetorial $\mathbf{F}$ é descrito como em (18.1), então podemos definir limites, continuidade, derivadas parciais e integrais múltiplas por meio dos componentes de $\mathbf{F}(x, y, z)$, como fizemos no caso de funções com valores vetoriais no Capítulo 15. Por exemplo, para diferenciar ou integrar $\mathbf{F}(x, y, z)$, diferenciamos ou integramos cada componente. Podemos estabelecer os teoremas usuais: $\mathbf{F}$ é contínua se e somente se as funções componentes M, N e P o são; $\mathbf{F}$ tem derivadas parciais se o mesmo ocorre com M, N e P etc.

EXERCÍCIOS 18.1

Exercs. 1-10: Trace um número suficiente de vetores para ilustrar o padrão dos vetores no campo $\mathbf{F}$.

1 $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$

2 $\mathbf{F}(x, y) = -x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

3 $\mathbf{F}(x, y) = 2x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j}$

4 $\mathbf{F}(x, y) = 3\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

5 $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1/2}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$

6 $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + z\mathbf{k}$

7 $\mathbf{F}(x, y, z) = -x\mathbf{i} - y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$

8 $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

9 $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

10 $\mathbf{F}(x, y, z) = 2\mathbf{k}$

Exercs. 11-14: Ache um campo vetorial conservativo que tenha o potencial indicado.

11 $f(x, y, z) = x^2 - 3y^2 + 4z^2$

12 $f(x, y, z) = \text{sen}(x^2 + y^2 + z^2)$

13 $f(x, y) = \text{arctg}(xy)$

14 $f(x, y) = y^2e^{-3x}$

Exercs. 15-18: Ache $\nabla \times \mathbf{F}$ e $\nabla \cdot \mathbf{F}$.

15 $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2z\mathbf{i} + y^2x\mathbf{j} + (y + 2z)\mathbf{k}$

16 $\mathbf{F}(x, y, z) = (3x + y)\mathbf{i} + xy^2z\mathbf{j} + xz^2\mathbf{k}$

17 $\mathbf{F}(x, y, z) = 3xyz^2\mathbf{i} + y^2 \text{ sen } z\mathbf{j} + xe^{2z}\mathbf{k}$

18 $\mathbf{F}(x, y, z) = x^3 \ln z\mathbf{i} + xe^{-y}\mathbf{j} - (y^2 + 2z)\mathbf{k}$

19 Se $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, prove que

(a) $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$ (b) $\nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$ (c) $\nabla\|\mathbf{r}\| = \mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|$

20 Se $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ e $\mathbf{a}$ é um vetor constante, prove que (a) rot $(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{a}$ (b) div $(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = 0$

21 Prove que o rotacional e a divergência de um campo vetorial quadrado inverso são $\mathbf{0}$ e 0, respectivamente.

22 Se um campo vetorial $\mathbf{F}$ é conservativo e tem derivadas parciais contínuas, prove que rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Exercs. 23-26: Verifique a identidade.

23 $\nabla \times (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla \times \mathbf{F} + \nabla \times \mathbf{G}$

24 $\nabla \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla \cdot \mathbf{G}$

25 $\nabla \times (f\mathbf{F}) = f(\nabla \times \mathbf{F}) + (\nabla f) \times \mathbf{F}$

26 $\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - (\nabla \times \mathbf{G}) \cdot \mathbf{F}$

Exercs. 27-30: Se f e $\mathbf{F}$ têm derivadas parciais segundas contínuas e $\mathbf{a}$ é um vetor constante, verifique a identidade.

27 rot grad $f = \mathbf{0}$

28 div rot $\mathbf{F} = 0$

29 rot (grad f + rot $\mathbf{F}$) = rot rot $\mathbf{F}$

30 rot $\mathbf{a} = \mathbf{0}$

31 Sejam $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ e $r = \|\mathbf{r}\|$. Se $\mathbf{F}(x, y, z) = (c/r^k)\mathbf{r}$, onde c e k são constantes com $k > 0$, prove que rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$. (*Sugestão:* Use o Exercício 25.)

32 Define-se o operador diferencial $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ como

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \partial z^2$$

Se ∇^2 opera sobre $f(x, y, z)$, produz uma função escalar chamada *Laplaciano* de f, dada por

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Se f e g são funções escalares dotadas de derivadas parciais segundas, prove que

(a) $\nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f$

(b) $\nabla^2(fg) = f\nabla^2 g + g\nabla^2 f + 2\nabla f \cdot \nabla g$

Exercs. 33-34: Com a notação do Exercício 32, prove que a função verifica a *equação de Laplace* $\nabla^2 f = 0$. (Tais funções chamam-se *harmônicas* e desempenham papel importante em aplicações físicas).

33 $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$

34 $f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$ para $a + b + c = 0$

35 Se $\mathbf{F}$ é dada por (18.1), defina

$$\lim_{(x, y, z) \to (x_0, y_0, z_0)} \mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{a}$$

de maneira análoga à da Definição (15.4). Dê uma definição $\in - \delta$ deste limite. Qual o significado geométrico do limite?

36 Se $\mathbf{F}$ é dada por (18.1), defina a noção de *continuidade* em (x_0, y_0, z_0) de maneira análoga à da Definição (15.5). Qual é o significado geométrico de uma função vetorial contínua?

Exercs. 37-38: Estenda a $f(x, y, z)$ às fórmulas de aproximação dos Exercícios 67-68 da seção 16.3, e use $h = 0{,}05$ para aproximar $\nabla^2 f(0{,}3; 0{,}5; 0{,}2)$.

$$37\ f(x, y, z) = \frac{\operatorname{tg}^2 \sqrt{xyz}}{\cos z \sec^2 (x^2y^2)}$$

$$38\ f(x, y, z) = \frac{x^2 + xy^2z + z^3}{4x^3 + 2y^2z + 4xz^2}$$

18.2 INTEGRAIS CURVILÍNEAS

Para definir $\int_a^b f(x)\,dx$ no Capítulo 5, começamos dividindo o intervalo $[a, b]$ em subintervalos de amplitudes $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$. Escolhemos então um número w_k arbitrário em cada subintervalo e consideramos o limite de somas de Riemann $\sum_k f(w_k)\ \Delta x_k$ quando $\Delta x_k \to 0$. Pode-se usar processo análogo para definir *integrais curvilíneas* de funções de diversas variáveis ao longo de curvas em duas ou três dimensões.

Recordemos que uma curva plana é *suave* se admite uma parametrização

$$x = g(t),\ y = h(t);\ a \le t \le b$$

tal que g' e h' sejam contínuas e não simultaneamente nulas em $[a, b]$. Para curvas no espaço, consideramos uma terceira função k do mesmo tipo com $z = k(t)$. A direção positiva, ou *orientação*, de C é a direção definida pelos valores crescentes de t. A curva C é *parcialmente suave* se $[a, b]$ pode ser particionado em subintervalos fechados tais que C seja suave em cada subintervalo.

Suponhamos f uma função de duas variáveis x e y, contínua em uma região D contendo uma curva suave C com parametrização $x = g(t)$, $y = (t)$, $a \le t \le b$. Definiremos três integrais diferentes de f ao longo de C. Comecemos particionando o intervalo $[a, b]$ do parâmetro, escolhendo

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$$

Denotaremos por $\|P\|$ a norma desta partição (ou seja, o comprimento do maior subintervalo $[t_{k-1}, t_k]$). Se $P_k(x_k, y_k)$ é o ponto em C correspondente a t_k, então os pontos $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$ dividem C em n partes $P_{k-1}P_k$, conforme ilustrado na Figura 18.10. Seja

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1},\ \Delta y_k = y_k - y_{k-1},\ \Delta s_k = \text{comprimento de } \overset{\frown}{P_{k-1}P_k}$$

Para cada k, seja $Q_k(u_k, v_k)$ um ponto em $\overset{\frown}{P_{k-1}P_k}$ obtido escolhendo-se um número em $[t_{k-1}, t_k]$ (ver Figura 18.10). Consideremos agora as três somatórias

$$\sum_k f(u_k, v_k)\ \Delta s_k,\quad \sum_k f(u_k, v_k)\ \Delta x_k,\quad \sum_k f(u_k, v_k)\ \Delta y_k$$

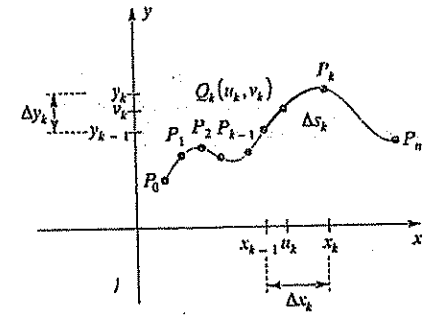


Figura 18.10

Se os limites de tais somatórias existem quando $\|P\| \to 0$, eles são as integrais curvilíneas de f ao longo de C em relação a s, x e y, respectivamente, e se denotam como a seguir.

Integrais curvilíneas em duas dimensões (18.8)

$$\int_C f(x, y)\,ds = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_k f(u_k, v_k)\ \Delta s_k$$

$$\int_C f(x, y)\,dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_k f(u_k, v_k)\ \Delta x_k$$

$$\int_C f(x, y)\,dy = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_k f(u_k, v_k)\ \Delta y_k$$

Se f é contínua em D, então os limites em (18.8) existem e são os mesmos para toda parametrização de C (desde que se adote a mesma orientação). Além disso, as integrais podem ser calculadas fazendo-se $x = g(t)$, $y = h(t)$ da parametrização de C e substituindo as diferenciais por

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{[g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\ dt$$

$$dx = g'(t)\ dt,\quad dy = h'(t)\ dt$$

Note que, por (13.6), a fórmula de ds é a diferencial do comprimento de arco. Para fins de referência, resumamos estes fatos como a seguir.

Teorema de cálculo para integrais curvilíneas (18.9)

Se uma curva suave C é dada por $x = g(t)$, $y = h(t)$, $a \le t \le b$, e se $f(x, y)$ é contínua em uma região D contendo C, então

(i) $$\int_C f(x, y)\, ds = \int_a^b f(g(t), h(t))\sqrt{[g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\, dt$$

(ii) $$\int_C f(x, y)\, dx = \int_a^b f(g(t), h(t))g'(t)\, dt$$

(iii) $$\int_C f(x, y)\, dy = \int_a^b f(g(t), h(t))h'(t)\, dt$$

O que precede pode ser estendido a curvas mais complicadas. Em particular, suponhamos C uma curva parcialmente suave que possa expressar-se como a união de um número finito de curvas suaves $C_1, C_2, \ldots, C_n$, onde o ponto terminal de C_k é o ponto inicial de C_{k+1} para $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Neste caso, a integral curvilínea de f ao longo de C define-se como a soma das integrais curvilíneas ao longo das curvas individuais.

Podem-se estabelecer, para integrais curvilíneas, propriedades análogas às obtidas para integrais definidas no Capítulo 5. Por exemplo, a inversão da direção de integração acarreta mudança do sinal da integral; a integral da soma de duas funções é a soma das integrais das funções individuais etc.

EXEMPLO 1

Calcule $\int_C xy^2\, ds$ se C admite a parametrização

$$x = \cos t,\ y = \operatorname{sen} t;\ 0 \le t \le \pi/2$$

SOLUÇÃO

A curva C é a porção, no primeiro quadrante, do círculo unitário de centro na origem, conforme se vê na Figura 18.11, onde a seta indica a orientação de C e a direção de integração. Aplicando o Teorema (18.9), obtemos

$$\int_C xy^2\, ds = \int_0^{\pi/2} \cos t\, \operatorname{sen}^2 t \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}\, dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 t\, \cos t\, dt = \left[\tfrac{1}{3} \operatorname{sen}^3 t\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}$$

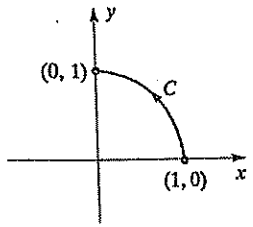


Figura 18.11

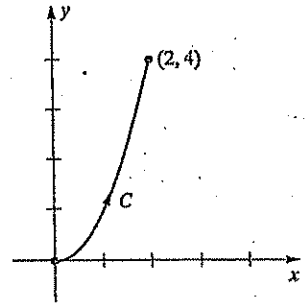


Figura 18.12

EXEMPLO 2

Calcule $\int_C xy^2\, dx$ e $\int_C xy^2\, dy$ se C é a parte da parábola $y = x^2$ de (0, 0) a (2, 4).

SOLUÇÃO

A Figura 18.12 é o gráfico de $y = x^2$ de (0, 0) a (2, 4). As equações paramétricas de C são

$$x = t,\ y = t^2;\ 0 \le t \le 2$$

As diferenciais são

$$dx = dt,\ dy = 2t\, dt$$

Aplicando o Teorema (18.9)(ii) e (iii), temos

$$\int_C xy^2\, dx = \int_0^2 t(t^2)^2\, dt = \int_0^2 t^5\, dt = \left[\tfrac{1}{6}t^6\right]_0^2 = \frac{32}{3}$$

$$\int_C xy^2\, dy = \int_0^2 t(t^2)^2\, 2t\, dt = \int_0^2 2t^6\, dt = \left[\tfrac{2}{7}t^7\right]_0^2 = \frac{256}{7}$$

Se, como no Exemplo 2, C é o gráfico de uma equação $y = g(x)$ tal que $a \le x \le b$, então as equações paramétricas de C são

$$x = t,\ y = g(t);\ a \le t \le b$$

Podemos então calcular como segue as integrais curvilíneas (ii) e (iii) do Teorema (18.9)

$$\int_C f(x, y)\, dx = \int_a^b f(t, g(t))\, dt = \int_a^b f(x, g(x))\, dx$$

$$\int_C f(x, y)\, dy = \int_a^b f(t, g(t))\, g'(t)\, dt = \int_a^b f(x, g(x))g'(x)\, dx$$

Isto mostra que, *para curvas dadas na forma $y = g(x)$, $a \le x \le b$, podemos evitar as equações paramétricas fazendo $y = g(x)$, $dy = g'(x)\, dx$ e então tomando a e b como limites de integração.* A título de ilustração, no Exemplo 2, onde $y = x^2$, poderíamos ter escrito

$$\int_C xy^2\, dx = \int_0^2 x(x^4)\, dx = \int_0^2 x^5\, dx = \frac{32}{3}$$

$$\int_C xy^2\, dy = \int_0^2 x(x^4)2x\, dx = \int_0^2 2x^6\, dx = \frac{256}{7}$$

Uma aplicação física da integral curvilínea $\int_C f(x, y)$ consiste em considerar a curva como um fio delgado de arame de densidade variável. Se o arame é representado pela curva C na Figura 18.10 e se a densidade de massa linear (massa por unidade de comprimento) no ponto (x, y) é dada por $\delta(x, y)$, então $\delta(u_k, v_k)\,\Delta s_k$ é uma aproximação da massa Δm_k da parte do arame entre P_{k-1} e P_k. A soma

$$\sum_k \Delta m_k = \sum_k \delta(u_k, v_k)\ s_k$$

é uma aproximação da massa total m do arame. Para definir m, tomamos o limite destas somas, obtendo o seguinte:

Massa de um arame (18.10)

$$m = \int_C \delta(x, y)\ ds$$

EXEMPLO 3

Um arame delgado é vergado na forma de um semicírculo de raio a. Se a densidade de massa linear em um ponto P é diretamente proporcional à sua distância da reta pelas extremidades, ache a massa do arame.

SOLUÇÃO

Introduzamos um sistema de coordenadas tal que a forma do arame coincida com a metade superior de um círculo de raio a e centro na origem (ver Figura 18.13). As equações paramétricas de C são

$$x = a\cos t,\ y = a\operatorname{sen} t;\ 0 \le t \le \pi$$

Por hipótese, a densidade de massa linear em $P(x, y)$ é dada por $\delta(x, y) = ky$, onde k é uma constante. Por (18.10), a massa do arame é

$$m = \int_C (ky)\,ds = \int_0^{\pi} (ka\operatorname{sen} t)\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2 t + a^2\cos^2 t}\,dt$$

$$= \int_0^{\pi} (ka\operatorname{sen} t)a\,dt$$

$$= ka^2\int_0^{\pi} \operatorname{sen} t\,dt$$

$$= ka^2\Big[-\cos t\Big]_0^{\pi} = 2ka^2$$

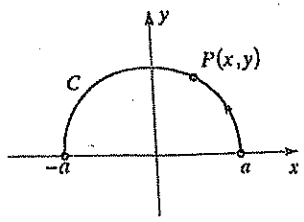


Figura 18.13

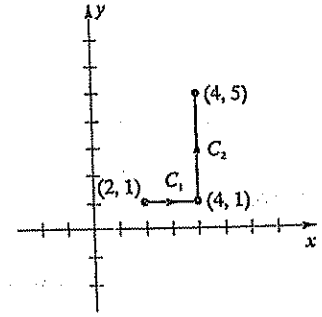


Figura 18.14

Em aplicações que envolvem trabalho, as integrais curvilíneas costumam aparecer em forma da combinação

$$\int_C M(x, y)\,dx + \int_C N(x, y)\,dy$$

onde as funções M e N são contínuas em um domínio D que contém C. Costuma-se abreviar esta soma como

$$\int_C M(x, y)\,dx + N(x, y)dy$$

EXEMPLO 4

Calcule $\int xy\,dx + x^2\,dy$ se

(a) C consiste em segmentos de reta de (2, 1) a (4, 1) e de (4, 1) a (4, 5)

(b) C é o segmento de reta de (2, 1) a (4, 5)

(c) as equações paramétricas de C são

$$x = 3t - 1,\ y = 3t^2 - 2t;\ 1 \le t \le \tfrac{5}{3}$$

SOLUÇÃO

(a) Subdividindo C em duas partes C_1 e C_2, conforme Figura 18.14, as equações paramétricas dessas curvas são

$$C_1\colon\ x = t,\ y = 1;\ 2 \le t \le 4$$

$$C_2\colon\ x = 4,\ y = t;\ 1 \le t \le 5$$

A integral curvilínea ao longo de C pode expressar-se como a soma de duas integrais curvilíneas, a primeira ao longo de C_1 e a segunda ao longo de C_2. Sobre C_1 temos $dy = 0$, $dx = dt$ e, então,

$$\int_{C_1} xy\,dx + x^2\,dy = \int_2^4 t(1)\,dt + t^2(0) = \Big[\tfrac{1}{2}t^2\Big]_2^4 = 6$$

Sobre C_2 temos $dx = 0$, $dy = dt$ e, portanto,

$$\int_{C_2} xy\,dx + x^2\,dy = \int_1^5 4t(0)\,dt + 16\,dt = 16\Big[t\Big]_1^5 = 64$$

Conseqüentemente, o valor da integral curvilínea ao longo de C é 6 + 64 ou 70.

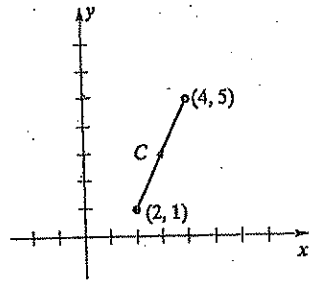


Figura 18.15

(b) A Figura 18.15 ilustra o gráfico de C. A equação de C é $y = 2x - 3$, com $2 \le x \le 4$. Neste caso, $dy = 2\,dx$ e

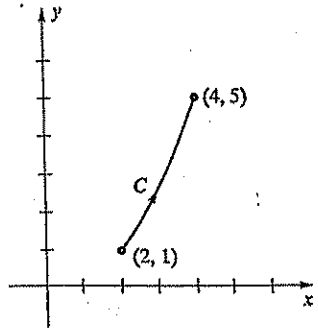


Figura 18.16

$$\int_C xy\ dx + x^2\ dy = \int_2^4 x(2x-3)\ dx + x^2(2)\ dx$$

$$= \int_2^4 (4x^2 - 3x)\ dx = \tfrac{170}{3}$$

(c) O gráfico de C é parte de uma parábola (ver Figura 18.16). Neste caso, com as equações paramétricas $x = 3t - 1$, $y = 3t^2 - 2t$; $1 \le t \le \frac{5}{3}$, obtemos $dx = 3\ dt$, $dy = (6t - 2)\ dt$ e a integral curvilínea é igual a

$$\int_1^{5/3} (3t-1)(3t^2-2t)3\ dt + (3t-1)^2(6t-2)\ dt$$

Pode-se mostrar que o valor é 58.

Outro método de resolução consiste em utilizar a equação $y = \frac{1}{3}(x^2 - 1)$ para a parábola, com $2 \le x \le 4$. Obtemos então a integral

$$\int_C xy\ dx + x^2\ dy = \int_2^4 x \cdot \tfrac{1}{3}(x^2-1)\ dx + x^2(\tfrac{2}{3}x)\ dx$$

$$= \int_2^4 (x^3 - \tfrac{1}{3}x)\ dx = \left[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{6}x^2\right]_2^4 = 58$$

No exemplo precedente, obtivemos três valores diferentes para a integral curvilínea ao longo de três caminhos diversos de (2, 1) a (4, 5). Na Seção 18.3 estudaremos integrais curvilíneas que têm o *mesmo* valor ao longo de *qualquer* curva que una dois pontos A e B. Para tais integrais, utilizamos a expressão *independente do caminho*.

Se uma curva suave C em três dimensões tem a parametrização

$$x = g(t), y = h(t), z = k(t); a \le t \le b$$

então definem-se as integrais curvilíneas de uma função f de três variáveis da mesma maneira que no caso de uma função de duas variáveis. Neste caso, em lugar de tomar (x_k, y_k) e (u_k, v_k) como as coordenadas de P_k e Q_k em C, conforme Figura 18.10, tomamos (x_k, y_k, z_k) e (u_k, v_k, w_k), respectivamente (ver Figura 18.17). Temos agora

$$\int_C f(x, y, z)\ ds = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_k f(u_k, v_k, w_k)\ \Delta s_k$$

Esta integral pode ser calculada utilizando-se a fórmula

$$\int_a^b f(g(t), h(t), k(t)) \sqrt{[g'(t)]^2 + [h'(t)]^2 + [k'(t)]^2}\ dt$$

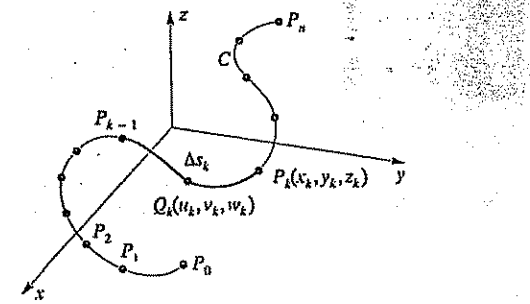


Figura 18.17

Se um arame tem a forma de C e se $f(x, y, z)$ é a densidade de massa linear em (x, y, z), então o valor desta integral é a massa total do arame.

Além das integrais curvilíneas $\int_C f(x, y, z)\ dx$ e $\int_C f(x, y, z)\ dy$, uma função de três variáveis também tem uma integral curvilínea em relação a z, dada por

$$\int_C f(x, y, z)\ dz = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_k f(u_k, v_k, w_k)\ \Delta z_k$$

onde $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$. Tal como em duas dimensões, estas integrais curvilíneas costumam aparecer em forma de somas, que abreviamos para

$$\int_C M(x, y, z)\ dx + N(x, y, z)\ dy + P(x, y, z)\ dz$$

onde as funções M, N e P são contínuas em toda uma região contendo C. Se C é dada parametricamente, então esta integral curvilínea pode ser calculada substituindo-se x, y e z da mesma forma que no caso de duas variáveis.

EXEMPLO 5

Calcule $\int_C yz\ dx + xz\ dy + xy\ dz$ se C é dada por

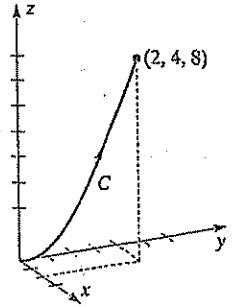


Figura 18.18

$$x = t,\ y = t^2,\ z = t^3;\ 0 \le t \le 2$$

SOLUÇÃO

A curva C (uma cúbica reversa) está ilustrada na Figura 18.18. Substituímos x, y e z e fazemos $dx = dt$, $dy = 2t\,dt$, $dz = 3t^2\,dt$:

$$\int_0^2 t^5\,dt + 2t^5\,dt + 3t^3\,dt = \int_0^2 6t^5\,dt = \Big[t^6\Big]_0^2 = 64$$

Uma das mais importantes aplicações físicas das integrais curvilíneas envolve campos de força. Suponhamos que a força que atua sobre o ponto (x, y, z) seja

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\,\mathbf{i} + N(x, y, z)\,\mathbf{j} + P(x, y, z)\,\mathbf{k}$$

onde M, N e P são funções contínuas. Formularemos uma definição para o trabalho realizado quando o ponto de aplicação de $\mathbf{F}(x, y, z)$ se move ao longo de uma curva suave C que tem a parametrização

$$x = g(t),\quad y = h(t),\quad z = k(t);\quad a \le t \le b$$

Suponhamos que o movimento se processe na direção definida pelos valores crescentes de t.

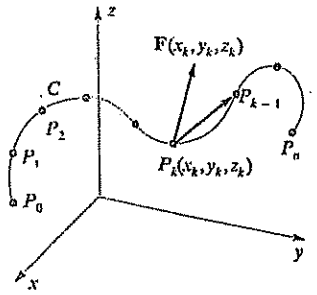


Figura 18.19

Subdividamos C por pontos $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$, onde P_k tem coordenadas (x_k, y_k, z_k) (ver Figura 18.19). Se a norma $\|P\|$ é pequena, então P_k está próximo de P_{k+1} para cada k. Logo, o trabalho realizado por $\mathbf{F}(x, y, z)$ de P_k a P_{k+1} pode ser aproximado pelo trabalho ΔW_k realizado pela força *constante* $\mathbf{F}(x, y, z)$ quando seu ponto de aplicação se move ao longo de $\overrightarrow{P_kP_{k+1}}$. Se $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$, e $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$, então $\overrightarrow{P_kP_{k+1}}$ corresponde ao vetor $\Delta x_k\,\mathbf{i} + \Delta y_k\,\mathbf{j} + \Delta z_k\,\mathbf{k}$ (ver Figura 18.20). Por (14.26), o trabalho ΔW_k realizado por $\mathbf{F}(x_k, y_k, z_k)$ ao longo de $\overrightarrow{P_kP_{k+1}}$ é

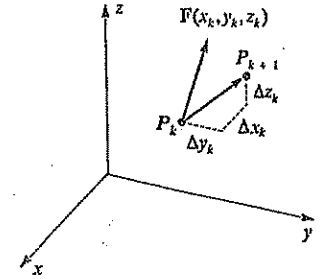


Figura 18.20

$$\Delta W_k = \mathbf{F}(x_k, y_k, z_k) \cdot (\Delta x_k\,\mathbf{i} + \Delta y_k\,\mathbf{j} + \Delta z_k\,\mathbf{k})$$

$$= M(x_k, y_k, z_k)\,\Delta x_k + N(x_k, y_k, z_k)\,\Delta y_k + P(x_k, y_k, z_k)\,\Delta z_k$$

Define-se como a seguir o **trabalho W realizado por $\mathbf{F}$ ao longo de C.**

Definição de trabalho (18.11)

$$W = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_k \Delta W_k$$

$$= \int_C M(x, y, z)\,dx + N(x, y, z)\,dy + P(x, y, z)\,dz$$

Para fins de aplicação, a integral (18.11) é em geral expressa em forma vetorial. Fazendo

$$\mathbf{r}(t) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

onde $x = g(t)$, $y = h(t)$ e $z = k(t)$, então $\mathbf{r}(t)$ é o vetor posição do ponto $Q(x, y, z)$ em C. Se s é o parâmetro comprimento de arco para C, então, conforme Seção 15.4, o vetor tangente unitário $\mathbf{T}(s)$ a C em Q é

$$\mathbf{T}(s) = \frac{d}{ds}\,\mathbf{r}(t) = \frac{dx}{ds}\,\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\,\mathbf{j} + \frac{dz}{ds}\,\mathbf{k}$$

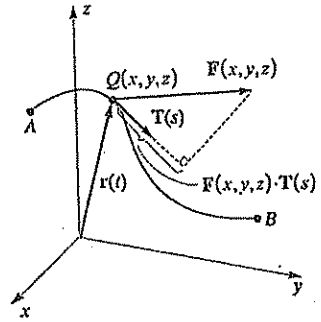


Figura 18.21

A Figura 18.21 ilustra os vetores $\mathbf{F}(x, y, z)$, $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{T}(s)$.

O componente tangencial de $\mathbf{F}$ em Q (ver Figura 18.21) é

$$\mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{T}(s) = M(x, y, z)\frac{dx}{ds} + N(x, y, z)\frac{dy}{ds} + P(x, y, z)\frac{dz}{ds}$$

Note que este componente é positivo se o ângulo entre $\mathbf{F}(x, y, z)$ e $\mathbf{T}(s)$ é agudo, e negativo se é obtuso. Podemos agora reescrever a Fórmula (18.11) como segue:

$$W = \int_C \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{T}(s)\,ds$$

Assim, *o trabalho realizado quando o ponto de aplicação de $\mathbf{F}(x, y, z)$ se move ao longo de C é igual à integral curvilínea, em relação a s, do componente tangencial de $\mathbf{F}$ ao longo de C.* Para simplificar a notação, denotaremos $\mathbf{F}(x, y, z)$ por $\mathbf{F}$ e $\mathbf{T}(s)$ por $\mathbf{T}$, e faremos

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k} = \mathbf{T}\,ds$$

O que acabamos de ver pode resumir-se como a seguir.

Definição (18.12)

Sejam C uma curva suave no espaço, $\mathbf{T}$ um vetor tangente unitário a C em (x, y, z) e $\mathbf{F}$ a força que atua em (x, y, z). O **trabalho W realizado por $\mathbf{F}$ ao longo de C** é

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\,ds = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

onde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

Intuitivamente, podemos encarar $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ na Definição (18.12) com o trabalho realizado quando o ponto de aplicação de F move ao longo do vetor dr tangente a C. O sinal de integral representa o limite de somas de elementos $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ de trabalho.

EXEMPLO 6

Se um campo de forças inverso F é dado por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{k}{\|\mathbf{r}\|^3}\mathbf{r}$$

onde k é uma constante, ache o trabalho realizado por F quando o ponto de aplicação se move ao longo do eixo-x de $A(1, 0, 0)$ a $B(2, 0, 0)$.

SOLUÇÃO

Seja C o segmento de A a B. As equações paramétricas de C são $x = t$, $y = 0$, $z = 0$; $1 \le t \le 2$. Tal como no Exemplo 2 da Seção 18.1.

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{k}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

Aplicando a Definição (18.12), temos

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \frac{k}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x\,dx + y\,dy + z\,dz)$$

Substituindo x, y e z das equações paramétricas de C, temos

$$W = \int_1^2 \frac{k}{(t^2)^{3/2}} t\,dt = \int_1^2 \frac{k}{t^2}\,dt = \left[-\frac{k}{t}\right]_1^2 = \frac{k}{2}$$

A unidade de W depende das unidades da distância e de $\|\mathbf{F}(x, y, z)\|$.

Restringindo o estudo acima a duas dimensões, um campo de forças pode ser expresso na forma

$$\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$$

Se C é uma curva plana, finita, parcialmente suave, o trabalho realizado quando o ponto de aplicação de $\mathbf{F}(x, y)$ se move ao longo de C é

$$W = \int_C M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

onde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$.

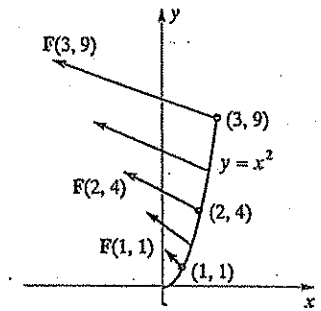


Figura 18.22

EXEMPLO 7

Seja C a parte da parábola $y = x^2$ entre (0, 0) e (3, 9). Se $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ é uma força que atua em (x, y), ache o trabalho realizado por F ao longo de C de

(a) (0, 0) a (3,9) (b) (3, 9) a (0, 0)

SOLUÇÃO

O campo vetorial F já foi estudado no Exemplo 1 da Seção 18.1. A Figura 18.22 exibe alguns vetores força típicos atuando ao longo de C. Por exemplo,

$$\mathbf{F}(1, 1) = -\mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad \mathbf{F}(2, 4) = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}, \quad \mathbf{F}(3, 9) = -9\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$$

Note a mudança de direção e do módulo de $\mathbf{F}(x, y)$ entre (0, 0) e (3, 9).

(a) Com a parametrização $x = t$, $y = t^2$ $0 \le t \le 3$, obtemos

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C -y\,dx + x\,dy$$

$$= \int_0^3 -t^2\,dt + t(2t)\,dt = \int_0^3 t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^3 = 9$$

Se, por exemplo, $\|\mathbf{F}\|$ é em quilogramas e s em metros, então $W = 9$m–kg.

(b) Poderíamos utilizar a parametrização $x = -t$, $y = t^2$, $-3 \le t \le 0$, para C e calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, entretanto, é mais simples inverter os limites de integração em (a), o que nos dá $W = -9$.

Podemos dar a seguinte interpretação à significação da diferença de sinal entre 9 e −9 nas soluções (a) e (b) do Exemplo 7. Em (a), imaginemos uma partícula em movimento através do campo de força F ao longo do caminho $y = x^2$ de (0, 0) a (3, 9). A partícula move-se em direção nordeste, e os vetores força atuam nessa direção. O ângulo θ entre $\mathbf{F}(x, y)$ e um vetor tangente ao caminho (na direção do movimento) é sempre agudo e, assim, F facilita o movimento da partícula. O trabalho realizado por F é, pois, positivo.

Em (b), a partícula move-se de (3, 9) a (0, 0) em direção sudoeste. O ângulo θ é sempre obtuso, e F retarda o movimento da partícula. Assim, o trabalho realizado por F é negativo.

EXERCÍCIOS 18.2

Exercs. 1-2: Calcule as integrais curvilíneas $\int_C f(x,y)\,ds$, $\int_C f(x,y)\,dx$, e $\int_C f(x,y)\,dy$ para C com a parametrização dada.

1 $f(x,y) = x^3 + y$, $x = 3t$, $y = t^3$; $0 \le t \le 1$

2 $f(x,y) = xy^{2/5}$, $x = \frac{1}{2}t$, $y = t^{5/2}$; $0 \le t \le 1$

Exercs. 3-6: Calcule a integral curvilínea ao longo de C.

3 $\int_C 6x^2y\,dx + xy\,dy$;

C é o gráfico de $y = x^3 + 1$ de $(-1, 0)$ a $(1, 2)$.

4 $\int_C y\,dx + (x+y)\,dy$;

C é o gráfico de $y = x^2 + 2x$ de $(0, 0)$ a $(2, 8)$.

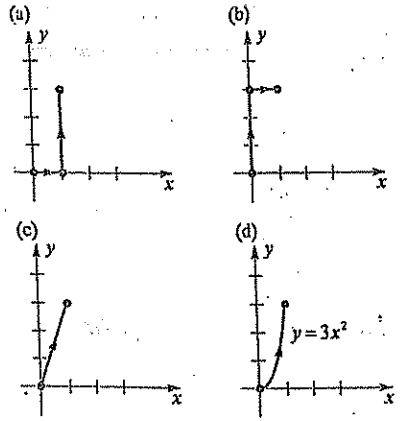
5 $\int_C (x-y)\,dx + x\,dy$;

C é o gráfico de $y^2 = x$ de $(4, -2)$ a $(4, 2)$.

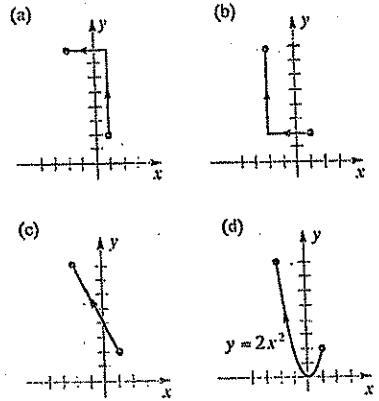
6 $\int_C xy\,dx + x^2y^3\,dy$;

C é o gráfico de $x = y^3$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$.

7 Calcule $\int_C xy\,dx + (x+y)\,dy$ ao longo de cada curva C de $(0, 0)$ a $(1, 3)$.



8 Calcule $\int_C (x^2 + y^2)\,dx + 2x\,dy$ ao longo de cada curva C de $(1, 2)$ a $(-2, 8)$.



9 Calcule $\int_C xz\,dx + (y+z)\,dy + x\,dz$ se C é o gráfico de $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = e^{2t}$; $0 \le t \le 1$.

10 Calcule $\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$ se C é o gráfico de $x = \operatorname{sen} t$, $y = 2 \operatorname{sen} t$, $z = \operatorname{sen}^2 t$; $0 \le t \le \pi/2$.

11 Calcule $\int_C (x+y+z)\,dx + (x-2y+3z)\,dy + (2x+y-z)\,dz$, onde C é a curva de $(0, 0, 0)$ a $(2, 3, 4)$, se

(a) C consiste em três segmentos de reta, o primeiro paralelo ao eixo-x, o segundo paralelo ao eixo-y e o terceiro paralelo ao eixo-z.

(b) C consiste em três segundo de reta, o primeiro paralelo ao eixo-z, o segundo paralelo ao eixo-x e o terceiro paralelo ao eixo-y.

(c) C é um segmento retilíneo.

12 Calcule $\int_C (x-y)\,dx + (y-z)\,dy + x\,dz$ se C é a curva de $(1, -2, 3)$ a $(-4, 5, 2)$ do tipo descrito em (a)-(c) do Exercício 11.

13 Calcule $\int_C xyz\,ds$ se C é o segmento retilíneo de $(0, 0, 0)$ a $(1, 2, 3)$.

14 Calcule $\int_C (xy + z)\,ds$ se C é a hélice $x = a \cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$, $z = bt$; $0 \le t \le 2\pi$.

15 Se a força em (x, y) é $\mathbf{F}(x, y) = xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j}$, ache o trabalho realizado por $\mathbf{F}$ ao longo das curvas (a)-(d) do Exercício 7.

16 Se a força em (x, y) é $\mathbf{F}(x, y) = (2x + y)\mathbf{i} + (x + 2y)\mathbf{j}$ ache o trabalho realizado por $\mathbf{F}$ ao longo das curvas (a)-(d) do Exercício 8.

17 A força que atua em um ponto (x, y) de um plano coordenado é $\mathbf{F}(x, y) = (4/\|\mathbf{r}\|^3)\mathbf{r}$, com $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$. Ache o trabalho realizado por $\mathbf{F}$ ao longo da metade superior do círculo $x^2 + y^2 = a^2$ de $(-a, 0)$ a $(a, 0)$.

18 A força em um ponto (x, y) de um plano coordenado é dada por $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$. Ache o trabalho realizado por $\mathbf{F}(x, y)$ ao longo do gráfico de $y = x^3$ de $(0, 0)$ a $(2, 8)$.

19 A força em um ponto (x, y, z) em três dimensões é dada por $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$. Ache o trabalho realizado por $\mathbf{F}(x, y, z)$ ao longo da cúbica reversa $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ de $(0, 0, 0)$ a $(2, 4, 8)$.

20 Faça o Exercício 19 se $\mathbf{F}(x, y, z) = e^x\mathbf{i} + e^y\mathbf{j} + e^z\mathbf{k}$.

21 Se um objeto se move através de um campo de força $\mathbf{F}$ de modo que em cada ponto (x, y, z) seu vetor velocidade seja ortogonal a $\mathbf{F}(x, y, z)$, mostre que o trabalho realizado por $\mathbf{F}$ sobre o objeto é 0.

22 Se uma força constante c atua sobre um objeto em movimento quando ele percorre uma vez um círculo, mostre que o trabalho realizado por c sobre o objeto é 0.

23 Se um arame delgado tem a forma de uma curva plana C e se a densidade de massa linear em (x, y) é $\delta(x, y)$, então os *momentos em relação aos eixos* x e y se definem como

$$M_x = \int_C y\delta(x,y)\,ds \text{ e } M_y = \int_C x\delta(x,y)\,ds$$

Utilize limites de somas para mostrar que estas são as definições naturais de M_x e M_y. O centro de massa $(\bar{x}, \bar{y})$ do arame é definido por $\bar{x} = M_y/m$ e $\bar{y} = M_x/m$, onde m é a massa do arame. Ache o centro de massa do arame no Exemplo 3.

24 Ref. Exercício 23. Um arame delgado está situado em um plano coordenado de modo que sua forma coincide com a parte da parábola $y = 4 - x^2$ entre $(-2, 0)$ e $(2, 0)$. A densidade no ponto (x, y) é diretamente proporcional à sua distância do eixo-y. Ache a massa e o centro de massa.

25 Estenda a três dimensões as definições de momentos e centro de massa (ver Exercício 23).

26 Um arame de densidade constante é curvado em forma de hélice $x = a \cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$, $z = bt$; $0 \le t \le 3\pi$. Ache a massa e o centro de massa do arame (ver Exercício 25).

27 Se um arame delgado de densidade variável é representado por uma curva C no plano-xy, defina os momentos de inércia I_x e I_y em relação aos eixos x e y, respectivamente. Ache I_x e I_y para o arame do Exemplo 3.

28 Ache os momentos de inércia I_x e I_y do arame do Exercício 24.

29 Se um arame delgado de densidade variável é representado por uma curva em três dimensões, defina os momentos de inércia em relação aos eixos x, y e z.

30 Para o arame do Exercício 26, ache o momento de inércia em relação ao eixo-z (ver também Exercício 29).

31 Se C é o gráfico de $y = x^4$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$, aproxime $\int_C \operatorname{sen}(xy)\,dx$ utilizando

$$\sum_{k=1}^{10} \operatorname{sen}(u_k v_k)\,\Delta x_k$$

com $\Delta x_k = \frac{1}{10}$ e $u_k = \frac{1}{10}k - \frac{1}{20}$

32 Se C é o gráfico de $y = 3x + 4$ de $(1, 7)$ a $(2, 10)$, obtenha uma aproximação de $\int_C \ln\sqrt{xy}\,dy$ utilizando

$$\sum_{k=1}^{10} \ln\sqrt{u_k v_k}\,\Delta y_k$$

com $\Delta y_k = \frac{3}{10}$ e $u_k = \frac{19}{20} + \frac{1}{10}k$.

18.3 INDEPENDÊNCIA DO CAMINHO

Costuma-se chamar *caminho* de A e B uma curva (parcialmente) suave de A e B. Vamos agora estabelecer condições para que uma integral curvilínea seja *independente do caminho* em uma região, no sentido de que, se A e B são pontos arbitrários, então obtemos o mesmo valor para qualquer caminho de A a B naquela região. Estabeleceremos os resultados para integrais curvilíneas em duas dimensões. Para o caso de três dimensões, as demonstrações são análogas, sendo, assim, omitidas.

Se a integral curvilínea $\int_C f(x, y)\, ds$ é independente do caminho, podemos denotá-la por $\int_A^B f(x, y)\, ds$, pois o valor da integral depende apenas dos extremos A e B da curva C. Utiliza-se notação análoga para $\int_C f(x, y)\, dx$, $\int_C f(x, y)\, dy$, e integrais curvilíneas em três dimensões.

Em toda esta seção admitiremos que as regiões sejam conexas, isto é, dois pontos quaisquer da região podem ser ligados por uma curva (parcialmente) suave, inteiramente contida na região. O próximo teorema constitui um resultado fundamental sobre a independência do caminho.

Teorema (18.13)

Se $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ é contínua em uma região conexa aberta D, então a integral curvilínea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é independente do caminho se e somente se $\mathbf{F}$ é conservativo, ou seja, $\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y)$ para alguma função escalar f.

DEMONSTRAÇÃO

Suponhamos a integral independente do trajeto em D. Se (x_0, y_0) é um ponto fixo em D, definamos f como

$$f(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

para todo ponto (x, y) em D. Mostraremos que $\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y)$.

Como a integral é independente do caminho, f depende somente de x e y, e não do caminho C de (x_0, y_0) a (x, y). Escolhamos um círculo D com centro (x, y) e seja (x_1, y) um ponto interior ao círculo tal que $x_1 \neq x$. De acordo com a Figura 18.23, se C_1 é um caminho arbitrário de (x_0, y_0) a (x_1, y) e C_2 é o segmento horizontal de (x_1, y) a (x, y), então

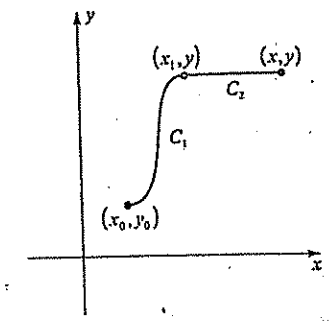


Figura 18.23

$$f(x, y) = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$$= \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{(x_1, y)}^{(x, y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Como a primeira integral não depende de x,

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 0 + \frac{\partial}{\partial x} \int_{(x_1, y)}^{(x, y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Escrevendo $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy$ e notando que $dy = 0$ em C_2 (ver Figura 18.23), obtemos

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \int_{(x_1, y)}^{(x, y)} M(x, y)\, dx$$

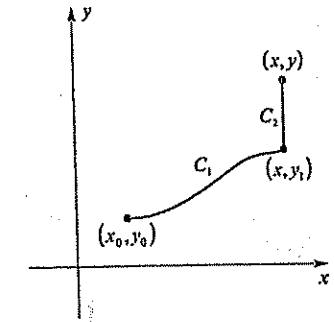


Figura 18.24

Como y é fixo nesta diferenciação parcial, podemos encarar o integrando como uma função de uma variável x. Aplicando (5.35), obtemos

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = M(x, y)$$

Analogamente, escolhendo o caminho da Figura 18.24 e diferenciando em relação a y, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = N(x, y)$$

Isto prova que $\nabla f(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j} = \mathbf{F}(x, y)$, c.q.d.

Reciprocamente, se existe uma função f tal que $\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y)$, então

$$M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j} = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}$$

Logo $M(x, y) = f_x(x, y)$ e $N(x, y) = f_y(x, y)$.

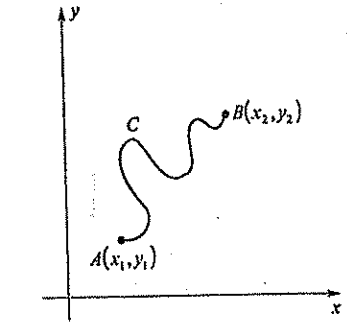


Figura 18.25

Se $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ são pontos da região D e se C é uma curva arbitrária parcialmente suave com extremidades A e B (ver Figura 18.25), então

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy$$

$$= \int_C f_x(x, y)\, dx + f_y(x, y)\, dy$$

Se C admite a parametrização suave $x = g(t)$, $y = h(t)$; $t_1 \le t \le t_2$, então, pelo Teorema (18.9),

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} \left[f_x(g(t), h(t))\, g'(t) + f_y(g(t), h(t))\, h'(t) \right] dt$$

Aplicando a regra da cadeia e o teorema fundamental do cálculo, temos

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} [f(g(t), h(t))]\, dt \\ &= f(g(t_2), h(t_2)) - f(g(t_1), h(t_1)) \\ &= f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) \\ &= \Big[f(x, y) \Big]_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \end{aligned}$$

onde o último par de colchetes é usado de maneira análoga ao caso de uma variável. Assim, a integral curvilínea depende somente das coordenadas de A e B, e não do caminho C, isto é, $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é independente do caminho. A prova pode ser estendida a curvas parcialmente suaves subdividindo-se C em um número finito de arcos suaves.

A demonstração do Teorema (18.13) encerra um método para calcular integrais curvilíneas que não dependem do caminho. Podemos enunciar como segue este resultado, que é análogo ao teorema fundamental do cálculo.

Teorema (18.14) Seja $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ contínua em uma região conexa aberta D, e seja C uma curva parcialmente suave em D com extremidades $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$. Se $\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y)$, então

$$\begin{aligned} \int_C M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy &= \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \Big[f(x, y) \Big]_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \end{aligned}$$

Se uma integral curvilínea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é independente do caminho, então, pelo Teorema (18.14) com $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ vemos que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ *para toda curva fechada simples* C.

EXEMPLO 1

Seja $\mathbf{F}(x, y) = (2x + y^3)\mathbf{i} + (3xy^2 + 4)\mathbf{j}$.

(a) Mostre que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é independente do caminho.

(b) Calcule $\int_{(0,1)}^{(2,3)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

SOLUÇÃO

(a) Pelo Teorema (18.13), a integral curvilínea é independente do caminho se e somente se existe uma função diferenciável f de x e y tal que $\nabla f(x, y) = \mathbf{F}(x, y)$, isto é,

$$f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j} = (2x + y^3)\mathbf{i} + (3xy^2 + 4)\mathbf{j}$$

ou, equivalentemente,

(*) $\quad f_x(x, y) = 2x + y^3$ e $f_y(x, y) = 3xy^2 + 4$

Integrando (parcialmente) $f_x(x, y) = 2x + y^3$ em relação a x, obtemos

$$f(x, y) = x^2 + xy^3 + g(y),$$

onde g é uma função de y somente. (Devemos tomar $g(y)$ em lugar de uma constante de integração, a fim de obter a expressão *mais geral* para $f(x, y)$ tal que $f_x(x, y) = 2x + y^3$.)

Diferenciamos em seguida $f(x, y) = x^2 + xy^3 + g(y)$ em relação a y e comparamos o resultado com a expressão $f_y(x, y) = 3xy^2 + 4$ em (*). Assim,

$$f_y(x, y) = 0 + 3xy^2 + g'(y) = 3xy^2 + 4$$

e, então,

$$g'(y) = 4$$

Integrando em relação a y, obtemos

$$g(y) = 4y + c,$$

onde c é uma constante de integração. Assim,

$$f(x, y) = x^2 + xy^3 + 4y + c$$

é uma função f tal que $= \nabla f(x, y) = \mathbf{F}(x, y)$.

(b) Como qualquer função potencial serve para calcular a integral, aplicamos o Teorema (18.14) com $f(x, y) = x^2 + xy^3 + 4y$, obtendo

$$\int_{(0,1)}^{(2,3)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \Big[f(x,y) \Big]_{(0,1)}^{(2,3)}$$
$$= \Big[x^2 + xy^3 + 4y \Big]_{(0,1)}^{(2,3)}$$
$$= (4 + 54 + 12) - 4 = 66$$

O resultado seguinte é uma aplicação do que acabamos de ver aos campos vetoriais conservativos.

Teorema (18.15) Se $\mathbf{F}$ é um campo de forças conservativo em duas dimensões, então o trabalho realizado por $\mathbf{F}$ ao longo de qualquer caminho C de $A\,(x_1, y_1)$ a $B\,(x_2, y_2)$ é igual à diferença de potenciais entre A e B.

DEMONSTRAÇÃO

Se $\mathbf{F}$ é conservativo, então $\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y)$ para alguma função potencial f. Pela Definição (18.12) e pelo Teorema (18.14), o trabalho W realizado ao longo de qualquer caminho de $A\,(x_1, y_1)$ a $B\,(x_2, y_2)$ é

$$W = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)$$

que é a diferença dos potenciais entre A e B.

A Figura 18.26 ilustra o teorema precedente para curvas parcialmente suaves C_1, C_2 e C_3. Realiza-se a mesma quantidade de trabalho, qualquer que seja o caminho escolhido de A a B. Se C é uma curva fechada – isto é, se $A = B$ – então a diferença de potencial é 0 e, assim, o trabalho realizado ao percorrer C é 0. Uma recíproca deste resultado também é verdadeira, a saber, se $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$ para toda curva fechada simples C, então a integral curvilínea é independente do caminho e, assim, o campo é conservativo. Tais fatos têm importância em aplicações, pois muitos campos vetoriais que ocorrem na natureza são campos quadrados inversos e, assim, conservativos (ver Teorema (18.4)). Em termos físicos, se uma partícula unitária dá uma volta completa em uma curva fechada em um campo conservativo, então o trabalho realizado é 0. Abordaremos os campos conservativos com mais detalhes no final desta seção.

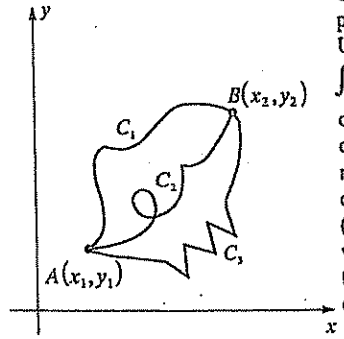


Figura 18.26

Os teoremas (18.14) e (18.15) podem ser estendidos a um campo vetorial em três dimensões. O próximo exemplo ilustra estes resultados.

EXEMPLO 2

Seja $\mathbf{F}$ o campo gravitacional de uma partícula de massa m_0 situada na origem de um sistema coordenado xyz. Ache o trabalho realizado por $\mathbf{F}$ quando uma partícula de massa m se move de $A\,(2, 3, 4)$ a $B\,(1, 0, 0)$.

SOLUÇÃO

Como foi visto na Seção 18.1, a força exercida por uma partícula de massa m situada em $K\,(x, y, z)$ é

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -G\frac{m_0 m}{\|\mathbf{r}\|^3}\mathbf{r}$$

onde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Tal como na demonstração do Teorema (18.4), $\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$, onde

$$f(x, y, z) = \frac{Gm_0 m}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$$

Logo, pela extensão dos Teoremas (18.14) e (18.15) a três dimensões,

$$W = \int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \left[\frac{Gm_0 m}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} \right]_{(2,3,4)}^{(1,0,0)}$$
$$= Gm_0 m\left(1 - \frac{1}{\sqrt{29}}\right)$$

Se a integral $\int_C M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$ é independente do caminho, então, pelo Teorema (18.13), existe uma função f tal que

$$M = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{e} \quad N = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Conseqüentemente $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ e $\dfrac{\partial N}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$.

Se M e N têm derivadas parciais primeiras contínuas, então f tem derivadas parciais segundas contínuas e, assim, a ordem de diferenciação é irrelevante, isto é

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

A recíproca deste resultado é falsa, a menos que imponhamos restrições adicionais ao domínio D de $\mathbf{F}(x, y)$. Em particular, se

D é uma região simplesmente conexa, no sentido de que toda curva fechada simples C em D inclui somente pontos de D (isto é, não há buracos na região), então a condição $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$ implica que a integral curvilínea $\int_C M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$ é independente do caminho. (A demonstração encontra-se em livros de cálculo avançado.) O que acabamos de ver pode ser resumido como a seguir.

Teorema (18.16)

Se $M(x, y)$ e $N(x, y)$ têm derivadas parciais primeiras contínuas em uma região simplesmente conexa D, então a integral curvilínea

$$\int_C M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$$

é independente do caminho em D se e somente se

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

EXEMPLO 3

Mostre que a integral curvilínea

$$\int_C (e^{3y} - y^2 \operatorname{sen} x)dx + (3xe^{3y} + 2y \cos x)\,dy$$

é independente do caminho em uma região simplesmente conexa.

SOLUÇÃO

Fazendo

$$M = e^{3y} - y^2 \operatorname{sen} x \text{ e } N = 3xe^{3y} + 2y \cos x$$

vemos que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3\,e^{3y} - 2y \operatorname{sen} x = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Logo, pelo Teorema (18.16), a integral curvilínea independente do caminho.

EXEMPLO 4

Determine se a integral $\int_C x^2y\,dx + 3xy^2\,dy$ é independente do caminho.

SOLUÇÃO

Fazendo $M = x^2y$ e $N = 3xy^2$, obtemos:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = x^2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 3y^2$$

Como $\partial M/\partial y \neq \partial N/\partial x$, a integral não é independente do caminho, de acordo com o Teorema 18.16.

No Exemplo 1, determinamos uma função potencial f para um campo vetorial conservativo de duas dimensões. O próximo exemplo ilustra uma técnica análoga para o caso de três dimensões.

EXEMPLO 5

Seja $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2 \cos x\,\mathbf{i} + (2y \operatorname{sen} x + e^{2z})\,\mathbf{j} + 2ye^{2z}\,\mathbf{k}$.

(a) Mostre que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é independente do caminho, e ache uma função potencial f para $\mathbf{F}$.

(b) Se $\mathbf{F}$ é um campo de forças, ache o trabalho realizado por $\mathbf{F}$ ao longo de qualquer curva C de $(0, 1, \frac{1}{2})$ a $(\pi/2, 3, 2)$.

SOLUÇÃO

(a) A integral será independente do caminho se existir uma função diferenciável f de x, y e z tal que $\nabla f(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z)$, isto é,

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} f_x(x, y, z) &= y^2 \cos x \\ f_y(x, y, z) &= 2y \operatorname{sen} x + e^{2z} \\ f_z(x, y, z) &= 2ye^{2z} \end{aligned}$$

Integrando (parcialmente) $f_x(x, y, z)$ em relação a x, vemos que

$$\text{(2)} \qquad f(x, y, z) = y^2 \operatorname{sen} x + g(y, z)$$

para alguma função g de y e z. (Devemos tomar $g(y, z)$ para obter a expressão mais geral $f(x, y, z)$ tal que $f_x(x, y, z) = y^2 \cos x$.)

Diferenciando $f(x, y, z)$ em (2) em relação a y e comparando o resultado com a expressão de $f_y(x, y, z)$ em (1), obtemos

$$f_y(x, y, z) = 2y \operatorname{sen} x + g_y(y, z) = 2y \operatorname{sen} x + e^{2z}$$

e então

$$g_y(y, z) = e^{2z}$$

A integração parcial de $g_y(y, z)$ em relação a y dá

$$g(y, z) = ye^{2z} + h(z)$$

onde h á uma função da única variável z. Aplicando a fórmula (2), obtemos

$$f(x, y, z) = y^2 \operatorname{sen} x + ye^{2z} + h(z)$$

Diferenciando a expressão precedente em relação a z e comparando o resultado com a fórmula de $f_z(x, y, z)$ em (1), temos

$$f_z(x, y, z) = 2ye^{2z} + h'(z) = 2ye^{2z}$$

Segue-se que $h'(z) = 0$ ou $h(z) = c$ para alguma constante c. Assim,

$$f(x, y, z) = y^2 \operatorname{sen} x + ye^{2z} + c$$

é uma função potencial f de $\mathbf{F}$.

(b) Aplicando a extensão do Teorema (18.15) aos campos vetoriais em três dimensões, concluímos que o trabalho realizado por $\mathbf{F}$ ao longo de qualquer curva C de $(0, 1, \frac{1}{2})$ a $(\pi/2, 3, 2)$ é

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \left[y^2 \operatorname{sen} x + ye^{2z} \right]_{(0, 1, 1/2)}^{(\pi/2, 3, 2)}$$
$$= (9 + 3e^4) - (0 + e) = 9 + 3e^4 - e \approx 170$$

Concluiremos esta seção abordando algumas aplicações da independência do caminho. A próxima definição é utilizada na física.

Definição (18.17)

> Seja $\mathbf{F}(x, y, z)$ um campo vetorial de forças conservativo com função potencial f. A **energia potencial** $p(x, y, z)$ de uma partícula no ponto (x, y, z) é
>
> $$p(x, y, z) = -f(x, y, z)$$

Como a energia potencial é o negativo do potencial $f(x, y, z)$,

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\nabla p(x, y, z)$$

Se A e B são dois pontos, então, como no Teorema (18.15), o trabalho realizado por $\mathbf{F}$ ao longo de uma curva suave C com extremidades A e B é

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \left[-p(x, y, z) \right]_A^B = p(A) - p(B)$$

onde $p(A)$ e $p(B)$ denotam a energia potencial em A e em B, respectivamente. Assim, o trabalho W é a diferença das energias potenciais em A e B. Em particular, se B é um ponto em que o potencial é 0, então $W = p(A)$, o que está de acordo com a descrição física clássica da energia potencial como o tipo de energia que um corpo tem em virtude de sua posição.

Se uma partícula tem massa m e velocidade v, então sua **energia cinética** é $\frac{1}{2}mv^2$. Assim, a energia cinética é a energia que um corpo tem em virtude de sua velocidade e sua massa.

Vamos estabelecer a seguinte lei física fundamental, que constitui a razão por que certos campos vetoriais são chamados *conservativos*.

Lei da conservação da energia (18.18)

> Se uma partícula move-se de um ponto para outro em um campo vetorial de forças conservativo, então a soma das energias cinética e potencial permanece constante, isto é, a energia total não varia.

DEMONSTRAÇÃO

Seja $\mathbf{F}$ um campo vetorial conservativo, e suponhamos que uma partícula se mova de A até B ao longo de uma curva C parcialmente suave tal que, no instante t, sua posição seja dada por $x = g(t), y = h(t), z + k(t); a \le t \le b$. Se $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ é o vetor posição da partícula (ver Figura 18.27), então a velocidade e a aceleração no instante t são

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad \text{e} \quad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt},$$

onde escrevemos abreviadamente $\mathbf{v}$ e $\mathbf{a}$ em lugar de $\mathbf{v}(t)$ e $\mathbf{a}(t)$, respectivamente. A velocidade (módulo) da partícula é $v(t) = v = \|\mathbf{v}\|$. O trabalho realizado por $\mathbf{F}(x, y, z)$ ao longo de C é

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \left(\mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) dt = \int_a^b (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v})\, dt$$

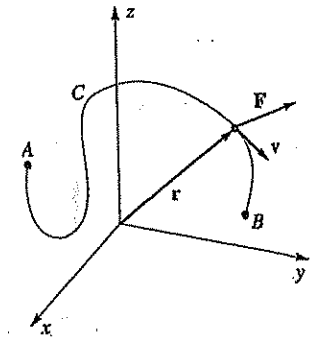


Figura 18.27

Pela segunda lei do movimento de Newton (15.13),

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

e então

$$W = \int_a^b \left(m\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v}\right)dt$$

$$= m\int_a^b \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v}\right)dt = m\int_a^b \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})\,dt$$

$$= \frac{1}{2}m\int_a^b \frac{d}{dt}(v^2)\,dt = \frac{1}{2}m\left[v^2\right]_a^b$$

$$= \frac{1}{2}m[v(b)]^2 - \frac{1}{2}m[v(a)]^2$$

Como a energia cinética K de uma partícula de massa m e velocidade v é $\frac{1}{2}mv^2$, a última igualdade pode ser escrita

$$W = K(B) - K(A)$$

onde $K(A)$ e $K(B)$ denotam a energia cinética da partícula em A e em B, respectivamente. Pelo que vimos em seguida à Definição (18.17), $W = p(A) - p(B)$, e então

$$p(A) - p(B) = K(B) - K(A)$$

ou

$$p(A) + K(A) = p(B) + K(B)$$

A última fórmula afirma que se uma partícula se move de um ponto a outro em um campo vetorial conservativo, a soma da energia potencial e energia cinética permanece constante.

EXERCÍCIOS 18.3

Exercs. 1-10: Mostre que $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ é independente do caminho, determinando uma função potencial f para F.

1 $\mathbf{F}(x, y) = (3x^2y + 2)\mathbf{i} + (x^3 + 4y^3)\mathbf{j}$

2 $\mathbf{F}(x, y) = (6xy^2 + 2y)\mathbf{i} + (6x^2y + 2x)\mathbf{j}$

3 $\mathbf{F}(x, y) = (2x \operatorname{sen} y + 4e^y)\mathbf{i} + \cos y\mathbf{j}$

4 $\mathbf{F}(x, y) = (2xe^{2y} + 4y^3)\mathbf{i} + (2x^2e^{2y} + 12xy^2)\mathbf{j}$

5 $\mathbf{F}(x, y) = -2y^3 \operatorname{sen} x\mathbf{i} + (6y^2\cos x + 5)\mathbf{j}$

6 $\mathbf{F}(x, y) = (5y^3 + 4y^3\sec^2 x)\mathbf{i} + (15xy^2 + 12y^2 \operatorname{tg} x)\mathbf{j}$

7 $\mathbf{F}(x, y, z) = 8xz\mathbf{i} + (1 - 6yz^3)\mathbf{j} + (4x^2 - 9y^2z^2)\mathbf{k}$

8 $\mathbf{F}(x, y, z) = (y + z)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$

9 $\mathbf{F}(x, y, z) = (y\sec^2 x - ze^y)\mathbf{i} + \operatorname{tg} x\mathbf{j} - e^y\mathbf{k}$

10 $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x \operatorname{sen} z\mathbf{i} - 2y \operatorname{sen} z\mathbf{j} + (x^2\cos z - y^2 \operatorname{sen} z)\mathbf{k}$

Exercs. 11-14: Mostre que a integral curvilínea é independente do caminho e ache seu valor.

11 $\int_{(-1,2)}^{(3,1)} (y^2 + 2xy)\,dx + (x^2 + 2xy)\,dy$

12 $\int_{(0,0)}^{(1,\pi/2)} e^x \operatorname{sen} y\,dx + e^x\cos y\,dy$

13 $\int_{(1,0,2)}^{(-2,1,3)} (6xy^3 + 2z^2)dx + 9x^2y^2dy + (4xz + 1)dz$

14 $\int_{(4,0,3)}^{(-1,1,2)} (yz + 1)\,dx + (xz + 1)\,y + (xy + 1)\,dz$

Exercs. 15-18: Use o Teorema (18.16) para mostrar que $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ não é independente do caminho.

15 $\mathbf{F}(x, y) = 4xy^3\mathbf{i} + 2xy^3\mathbf{j}$

16 $\mathbf{F}(x, y) = (6x^2 - 2xy^2)\mathbf{i} + (2x^2y + 5)\mathbf{j}$

17 $\mathbf{F}(x, y) = e^x\mathbf{i} + (3 - e^x \operatorname{sen} y)\mathbf{j}$

18 $\mathbf{F}(x, y) = y^3\cos x\mathbf{i} - 3y^2 \operatorname{sen} x\mathbf{j}$

19 Se $\int_C M(x, y, z)\,dx + N(x, y, z)\,dy + P(x, y, z)\,dz$ é independente do caminho e M, N e P têm derivadas parciais primeiras contínuas, prove que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},\quad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x},\quad \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

Exercs. 20-22: Use o Exercício 19 para mostrar que a integral curvilínea não é independente do caminho.

20 $\int_C 5y\,dx + 5x\,dy + yz^2\,dz$

21 $\int_C 2xy\,dx + (x^2 + z^2)\,dy + yz\,dz$

22 $\int_C e^y\cos z\,dx + xe^y\cos z\,dy + xe^y \operatorname{sen} z\,dz$

23 Seja $\mathbf{F}(x, y, z)$ uma força dirigida diretamente para a origem com módulo inversamente proporcional à distância da origem. Prove que F é conservativa, achando uma função potencial f para F.

24 Seja $\mathbf{F}(x, y, z)$ uma força emanando da origem com módulo diretamente proporcional à distância da origem. Prove que F é conservativa achando uma função potencial f para F.

25 Se F é uma força constante, prove que o trabalho realizado ao longo de uma curva arbitrária com extremidades P e Q é $\mathbf{F}\cdot\overrightarrow{PQ}$.

26 Se $\mathbf{F}(x, y, z) = g(x)\mathbf{i} + h(y)\mathbf{j} + k(z)\mathbf{k}$, onde g, h e k são funções contínuas, mostre que F é conservativo.

27 Seja $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$, onde

$$M(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \text{ e } N(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Mostre que $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$ para todo (x, y) no domínio D de F, mas que $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ não é independente do caminho em D. (*Sugestão:* Considere dois semicírculos diferentes com extremidades $(-1, 0)$ e $(1, 0)$. Por que este fato não contradiz o Teorema (18.16)?

28 Suponha que um satélite de massa m esteja circulando em torno da terra a uma altitude constante de h quilômetros e que complete uma revolução a cada k minutos. Se o raio da Terra é de 6.300 quilômetros, ache o trabalho realizado pelo campo gravitacional da Terra durante um intervalo arbitrário de tempo.

29 Seja F um campo quadrado inverso tal que $\mathbf{F}(x, y, z) = (c/\|\mathbf{r}\|^3)\mathbf{r}$ para $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, onde c é uma constante. Sejam P_1 e P_2 pontos cujas distâncias da origem são d_1 e d_2, respectivamente. Expresse, em termos de d_1 e d_2, o trabalho realizado por F ao longo de uma curva parcialmente suave unindo P_1 a P_2.

30 Suponha que quando uma partícula se move em um campo vetorial conservativo, sua energia potencial decresça à taxa de k unidades por segundo. A que taxa a energia cinética está variando?

18.4 O TEOREMA DE GREEN

Seja C uma curva plana suave com parametrização $x = g(t)$, $y = h(t)$; $a \le t \le b$. Recorde que, se $A = (g(a), h(a)) = (g(b), h(b)) = B$, então C é uma curva suave *fechada*. Se C não se intercepta entre A e B, é uma curva *simples*. Os círculos e as elipses são exemplos comuns de curvas suaves fechadas simples. Uma *curva fechada simples parcialmente suave* é uma união finita de curvas suaves C_k tais que, quando t varia de a a b, o ponto $P(t)$ obtido com as parametriações das curvas C_k percorrem C exatamente uma vez,

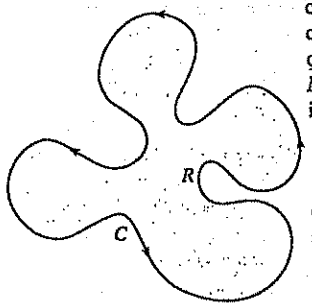


Figura 18.28

com a única exceção que $P(a) = P(b)$. Uma curva deste tipo constitui a fronteira de uma região R do plano-xy e, por definição, a **orientação, ou direção positiva,** ao longo de C é tal que R esteja sempre à *esquerda* quando $P(t)$ descreve C, conforme ilustrado pelas setas na Figura 18.28. A notação

$$\oint_C M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$$

denota uma integral curvilínea ao longo de uma curva fechada simples C uma vez na direção positiva.

O próximo teorema, designado em homenagem ao matemático inglês George Green (1793-1841), define uma relação entre a integral curvilínea ao longo de C e uma integral dupla sobre R. Para simplificar o enunciado, usamos no integrando os símbolos M, N, $\partial N/\partial x$ e $\partial M/\partial y$ para denotar os valores dessas funções em (x, y).

Teorema de Green (18.19)

Seja C uma curva fechada simples parcialmente suave e seja R a região que consiste em C e seu interior. Se M e N são funções contínuas com derivadas parciais primeiras contínuas em toda uma região D contendo R, então

$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$$

DEMONSTRAÇÃO PARA UM CASO ESPECIAL

Demonstraremos o teorema para o caso em que R é uma região R_x e uma região R_y dos seguintes tipos:

$$R = \{(x, y): a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$$

$$R = \{(x, y): c \le y \le d,\ h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$$

onde g_1, g_2, h_1 e h_2 são funções suaves. Basta mostrar que cada uma das seguintes igualdades é verdadeira, pois a soma delas dá a conclusão desejada:

$$\text{(1)} \qquad \oint_C M\,dx = -\iint_R \frac{\partial M}{\partial y}\,dA$$

$$\text{(2)} \qquad \oint_C N\,dy = \iint_R \frac{\partial N}{\partial x}\,dA$$

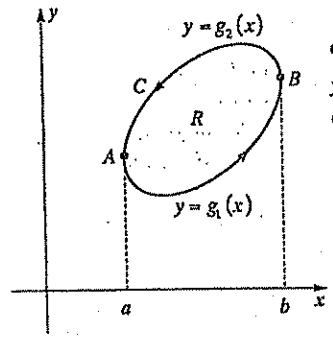


Figura 18.29

Para provar (1), referimo-nos à Figura 18.29 e notamos que C consiste em duas curvas C_1 e C_2 de equações $y = g_1(x)$ e $y = g_2(x)$, respectivamente. A integral curvilínea $\oint_C M\,dx$ pode escrever-se

$$\oint_C M\,dx = \int_{C_1} M(x, y)\,dx + \int_{C_2} M(x, y)\,dx$$

$$= \int_a^b M(x, g_1(x))\,dx + \int_b^a M(x, g_2(x))\,dx$$

$$= \int_a^b M(x, g_1(x))\,dx - \int_a^b M(x, g_2(x))\,dx$$

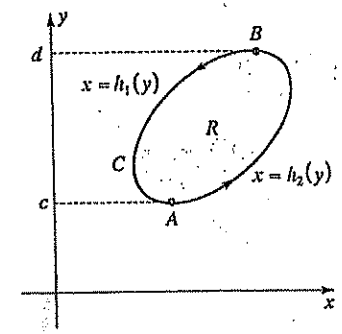


Figura 18.30

Aplicamos em seguida o Teorema (17.8)(i) à integral dupla $\iint_R (\partial M/\partial y)\,dA$, obtendo

$$\iint_R \frac{\partial M}{\partial y}\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y}\,dy\,dx$$

$$= \int_a^b \Big[M(x, y)\Big]_{g_1(x)}^{g_2(x)}\,dx$$

$$= \int_a^b [M(x, g_2(x)) - M(x, g_1(x))]\,dx$$

Comparando a última expressão com a obtida para $\oint_C M\,dx$ temos (1).

Estabelece-se de modo análogo a fórmula em (2), considerando a Figura 18.30.

Embora não o demonstremos aqui, o teorema de Green pode estender-se a uma região R tal que parte da fronteira consista em segmentos retilíneos horizontais ou verticais. O teorema pode então estender-se ainda mais para o caso em que R é uma união finita de tais regiões. Por exemplo, Se $R = R_1 \cup R_2$ e se a fronteira de R_1 é $C_1 \cup C'_1$ e a fronteira de R_2 é $C_2 \cup C'_2$, conforme ilustrado na Figura 18.31, então

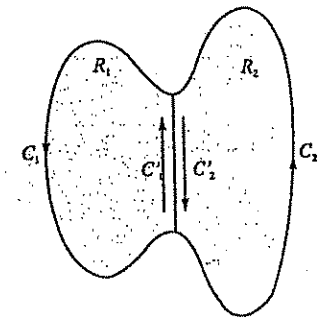


Figura 18.31

$$\iint_{R_1} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dy\,dx = \oint_{C_1 \cup C'_1} M\,dx + N\,dy$$

$$\iint_{R_2} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dy\,dx = \oint_{C_2 \cup C'_2} M\,dx + N\,dy$$

A soma das duas integrais duplas é igual a uma integral dupla sobre R. Observemos em seguida que a integral curvilínea ao longo de C'_1 na direção indicada na Figura 18.31 é a negativa da integral ao longo de C'_2, pois a curva é a mesma mas a direção é a oposta. Logo, a soma das duas integrais curvilíneas se reduz a uma integral curvilínea ao longo de $C_1 \cup C_2$, que é a fronteira C de R. Assim

$$\iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dy\ dx = \oint_C M\ dx + N\ dy$$

Podemos agora, por indução matemática, passar a uma união arbitrária, finita. A demonstração do teorema de Green para o caso mais geral ultrapassa o âmbito deste livro.

EXEMPLO 1

Por meio do teorema de Green, calcule $\oint_C 5xy\ dx + x^3\ dy$, onde C é a curva fechada que consiste nos gráficos de $y = x^2$ e $y = 2x$ entre os pontos $(0, 0)$ e $(2, 4)$.

SOLUÇÃO

A Figura 18.32 exibe a região R delimitada por C. Aplicando o teorema de Green com $M(x, y) = 5xy$ e $N(x, y) = x^3$, temos

$$\begin{aligned}\oint_C 5xy\ dx + x^3\ dx &= \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(x^3) - \frac{\partial}{\partial y}(5xy) \right] dA \\ &= \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (3x^2 - 5x)\ dy\ dx \\ &= \int_0^2 \Big[3x^2 y - 5xy \Big]_{x^2}^{2x} dx \\ &= \int_0^2 (11x^3 - 10x^2 - 3x^4)\ dx = -\frac{28}{15}\end{aligned}$$

A integral curvilínea também pode ser calculada diretamente.

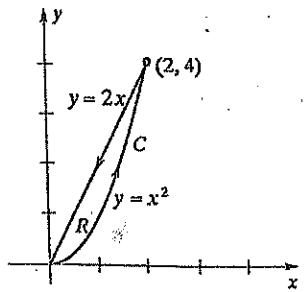


Figura 18.32

EXEMPLO 2

Com auxílio do teorema de Green, calcule a integral curvilínea

$$\oint_C 2xy\ dx + (x^2 + y^2)\ dy$$

onde C é a elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$

SOLUÇÃO

A Figura 18.33 ilustra a região R delimitada por C. Aplicando o teorema de Green, com $M(x, y) = 2xy$ e $N(x, y) = x^2 + y^2$, temos

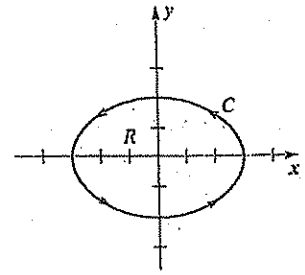


Figura 18.33

$$\begin{aligned}\oint_C 2xy\ dx + (x^2 + y^2)\ dy &= \iint_R (2x - 2x)\ dA \\ &= \iint_R 0\ dA = 0\end{aligned}$$

Note que não utilizamos a curva C no cálculo. Pode-se mostrar que a integral curvilínea é independente do caminho, sendo, assim, 0 para toda curva fechada simples C (ver observação após o Teorema (18.14)).

EXEMPLO 3

Calcule $\oint_C (4 + e^{\sqrt{x}})\ dx + (\operatorname{sen} y + 3x^2)\ dy$ se C é a fronteira da região R delimitada pelos quartos de círculo de raios a e b e pelos segmentos dos eixos-x e y, conforme Figura 18.34.

SOLUÇÃO

Aplicando o teorema de Green e transformando a integral dupla para coordenadas polares, a integral curvilínea é igual a

$$\begin{aligned}\iint_R (6x - 0)\ dA &= \int_0^{\pi/2} \int_a^b (6r\cos\theta) r\ dr\ d\theta \\ &= 6\int_0^{\pi/2} \cos\theta \left[\tfrac{1}{3} r^3 \right]_a^b d\theta = 2(b^3 - a^3) \int_0^{\pi/2} \cos\theta\ d\theta \\ &= 2(b^3 - a^3) \Big[\operatorname{sen}\theta \Big]_0^{\pi/2} = 2(b^3 - a^3)\end{aligned}$$

Obteremos uma apreciação mais profunda do Teorema de Green tentando calcular diretamente a integral curvilínea deste exemplo.

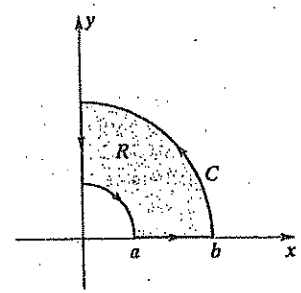


Figura 18.34

Com auxílio do teorema de Green podemos também estabelecer uma fórmula para achar a área A de uma região R delimitada por uma curva fechada simples parcialmente suave C. Fazendo $M = 0$ e $N = x$ em (18.19), obtemos

$$A = \iint_R dA = \oint_C x\ dy$$

Entretanto, se fizermos $M = -y$ e $N = 0$, o resultado é

$$A = \iint_R dA = -\oint_C y\ dx$$

Podemos combinar estas duas fórmulas de A somando ambos os membros das equações e dividindo o resultado por 2. Isto nos dá a terceira fórmula do próximo teorema.

Teorema (18.20)

Se uma região R do plano-xy é delimitada por uma curva fechada simples parcialmente suave C, então a área A de R é

$$A = \oint_C x\,dy = -\oint_C y\,dx = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$$

Embora as duas primeiras fórmulas em (18.20) pareçam mais fáceis de aplicar, para certas curvas a terceira fórmula conduz a uma integração mais simples. Para certificar-se disto, basta você tentar achar a área no Exercício 20 desta seção utilizando $\oint_C x\,dy$ ou $-\oint_C y\,dx$.

EXEMPLO 4

Use o Teorema (18.20) para achar a área da elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

SOLUÇÃO

As equações paramétricas da elipse C são $x = a\cos t$, $y = b\operatorname{sen} t$; $0 \le t \le 2\pi$. Aplicando a terceira fórmula do Teorema (18.20), obtemos

$$\begin{aligned} A &= \tfrac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a\cos t)(b\cos t)\,dt - (b\operatorname{sen} t)(-a\operatorname{sen} t)\,dt \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\,(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t)\,dt \\ &= \tfrac{1}{2}ab\int_0^{2\pi} dt = \tfrac{1}{2}ab(2\pi) = \pi ab \end{aligned}$$

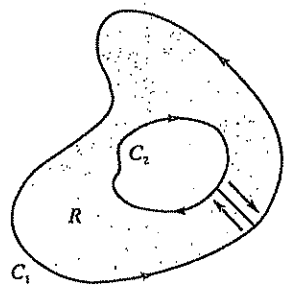


Figura 18.35

O teorema de Green pode ser estendido a uma região R que contenha "buracos", desde que integremos sobre toda a fronteira, mantendo sempre a região R à esquerda de C. A região da Figura 18.35 ilustra este fato; ali, a integral dupla sobre R é igual à soma das integrais curvilíneas ao longo de C_1 e C_2 nas direções indicadas. A prova consiste em cortar R conforme ilustrado na figura, notando que a soma de duas integrais ao longo da mesma curva e em direções opostas é zero. Argumento análogo vale no caso de a região conter mais de um "buraco". Esta observação será utilizada na resolução do próximo exemplo.

UFPB/BIBLIOTECA/PRAI

EXEMPLO 5

Sejam C_1 e C_2 duas curvas fechadas simples parcialmente suaves que não se interceptam, cada uma tendo a origem O como um ponto interior. Se

$$M = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad N = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

prove que

$$\oint_{C_1} M\,dx + N\,dy = \oint_{C_2} M\,dx + N\,dy$$

SOLUÇÃO

Denotando por R a região entre C_1 e C_2, temos uma situação análoga à ilustrada na Figura 18.25, com O interior a C_2. De acordo com as observações que precedem este exemplo, o teorema de Green nos dá

$$\oint_{C_1} M\,dx + N\,dy + \oint_{C_2} M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$$

onde, com o símbolo O, indicamos a direção positiva ao longo de C_2 em relação a R. Como

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{(x^2 + y^2)(1) - x(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

a integral dupla sobre R é zero. Conseqüentemente,

$$\oint_{C_1} M\,dx + N\,dy = -\oint_{C_2} M\,dx + N\,dy$$

Como a direção positiva ao longo de C_2 *em relação à região no interior de* C_2 é oposta à indicada na integral precedente, obtemos

$$\oint_{C_1} M\,dx + N\,dy = \oint_{C_2} M\,dx + N\,dy$$

como queríamos provar.

EXEMPLO 6

Se $\mathbf{F}$ é definida por $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$, prove que $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi$ para toda curva C fechada simples parcialmente suave que tenha a origem em seu interior.

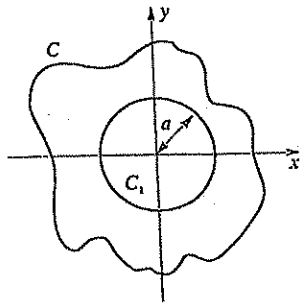


Figura 18.36

SOLUÇÃO

Fazendo $\mathbf{F}(x, y) = M\,\mathbf{i} + N\,\mathbf{j}$ então M e N são as mesmas que no Exemplo 5. Logo, escolhendo um círculo C_1 de raio a e centro na origem e inteiramente contido em C (ver Figura 18.36), então, pelo Exemplo 5,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Como as equações paramétricas de C_1 são

$$x = a\cos t,\ y = a \operatorname{sen} t;\ a \operatorname{sen} t;\ 0 \le t \le 2\pi$$

obtemos

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{C_1} \frac{-y}{x^2 + y^2}\,dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\,dy$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{-a \operatorname{sen} t}{a^2}(-a \operatorname{sen} t)\,dt + \frac{a\cos t}{a^2}(a\cos t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)\,dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

Podemos expressar sob forma vetorial a conclusão do teorema de Green (18.19). Primeiro, notemos que se $\mathbf{F}$ é um campo vetorial em duas dimensões, então podemos escrever

$$\mathbf{F}(x, y) = M\,\mathbf{i} + N\,\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

onde $M = M(x, y)$ e $N = N(x, y)$. O rotacional de $\mathbf{F}$ é

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ M & N & 0 \end{vmatrix} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

O coeficiente de k tem a mesma forma do integrando da integral dupla no Teorema de Green (18.19). Seja s o parâmetro comprimento de arco para C, e consideremos o vetor tangente unitário

$$\mathbf{T} = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} + \frac{dz}{ds}\mathbf{k}$$

Com esta notação, podemos escrever o teorema de Green como a seguir:

Forma vetorial do teorema de Green (18.21)

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\,ds = \iint_R (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\,dA$$

Como $(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}$ é o componente de rot $\mathbf{F}$ na direção paralela ao eixo-z, chamamo-la *componente normal* (a R) de rot $\mathbf{F}$. Podemos enunciar (18.21) como segue: *A integral curvilínea do componente tangencial de* $\mathbf{F}$ *tomado ao longo de* C *uma vez na direção positiva é igual à integral dupla sobre* R *do componente normal de rot* $\mathbf{F}$. O análogo tridimensional deste resultado é o teorema de Stokes, que será estudado na Seção 18.7. Discutiremos ali também interpretações físicas de rot $\mathbf{F}$.

O teorema de Green tem grande importância na área da matemática conhecida como *teoria das variáveis complexas* – fundamental para muitas aplicações às ciências físicas e à engenharia.

EXERCÍCIOS 18.4

Exercs. 1-14: Aplique o teorema de Green ao cálculo da integral curvilínea.

1 $\oint_C (x^2 + y^2)\,dx + (xy^2)\,dy$;

C é a curva fechada definida por $y = x^2$ e $y = -x$, $0 \le x \le 1$.

2 $\oint_C (x + y^2)\,dx + (1 + x^2)\,dy$;

C é a curva fechada definida por $y = x^3$ e $y = x^2$, $0 \le x \le 1$.

3 $\oint_C x^2y^2\,dx + (x^2 - y^2)\,dy$;

C é o quadrado de vértices (0, 0), (1, 0), (1, 1) e (0, 1).

4 $\oint_C \sqrt{y}\,dx + \sqrt{x}\,dy$;

C é o triângulo de vértices (1, 1), (3, 1) e (2, 2).

5 $\oint_C xy\,dx + (y + x)\,dy$;

C é o círculo $x^2 + y^2 = 1$.

6 $\oint_C y^2\,dx + x^2\,dy$;

C é a fronteira da região delimitada pelo semicírculo $y = \sqrt{4 - x^2}$ e o eixo-x.

7 $\oint_C xy\,dx + \operatorname{sen} y\,dy$;

C é o triângulo de vértices (1, 1), (2, 2) e (3, 0).

8 $\oint_C \operatorname{arctg} x\,dx + 3x\,dy$;

C é o retângulo de vértices (1, 0), (2, 3), (0, 1), (3, 2).

9 $\oint_C y^2(1 + x^2)^{-1}\,dx + 2y \operatorname{arctg} x\,dy$;

C é a hipociclóide $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.

10 $\oint_C (x^2 + y^2)\,dx + 2xy\,dy$;

C é a fronteira da região delimitada pelos gráficos de $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ e $x = 4$.

11 $\oint_C (x^4 + 4)\,dx + xy\,dy$;

C é a cardioide $r = 1 + \cos\theta$.

12 $\oint_C xy\,dx + (x^2 + y^2)\,dy$;

C é o laço, no primeiro quadrante, de $r = \operatorname{sen} 2\theta$.

13 $\oint_C (x + y)\,dx + (y + x^2)\,dy$;

C é a fronteira da região entre os círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

14 $\oint_C (1 - x^2y)\,dx + \operatorname{sen} y\,dy$;

C é a fronteira da região interior ao quadrado de vértices $(\pm 2, \pm 2)$ e exterior ao quadrado de vértices $(\pm 1, \pm 1)$.

Exercs. 15-18: Aplique o Teorema (18.20) para achar a área da região delimitada pelos gráficos das equações.

15 $y = 4x^2$, $y = 16x$ 16 $y = x^3$, $y^2 = x$

17 $y^2 - x^2 = 5$, $y = 3$ 18 $xy = 2$, $x + y = 3$

Exercs. 19-20: Aplique o Teorema (18.20) para achar a área da região delimitada pela curva C.

19 C é a hipocicloide $x = a\cos^3 t, y = a\,\text{sen}^3 t; 0 \le t \le 2\pi$.

20 C é a curva parcialmente suave que consiste no folium de Descartes

$$x = \frac{3t}{t^3 + 1}, \quad y = \frac{3t^2}{t^3 + 1}; \quad 0 \le t \le 1$$

e do segmento de reta de $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ a $(0, 0)$.

21 Se $\mathbf{F}(x, y)$ é um campo vetorial bidimensional e $\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é independente do caminho em uma região D, prove, por meio do teorema de Green, que $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para toda curva fechada simples parcialmente suave em D.

22 Se f e g são funções diferenciáveis de uma variável, prove que $\oint_C f(x)\,dx + g(y)\,dy = 0$ para toda curva fechada simples parcialmente suave C.

23 Sejam $M = y/(x^2 + y^2)$ e $N = -x/(x^2 + y^2)$. Se R é a região delimitada pelo círculo unitário C de centro da origem, mostre que

$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$$

Explique por que o teorema de Green não é válido nesta instância.

24 Seja $\mathbf{F}(x, y)$ dotada de derivadas parciais primeiras contínuas em uma região simplesmente conexa R. Se rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ em R, prove que $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para toda curva fechada simples parcialmente suave C em R.

25 Seja R a região delimitada por uma curva fechada simples parcialmente suave C no plano-xy. Se a área de R é A, use o teorema de Green para provar que o centróide $(\bar{x}, \bar{y})$ é

$$\bar{x} = \frac{1}{2A}\oint_C x^2\,dy, \quad \bar{y} = -\frac{1}{2A}\oint_C y^2\,dx$$

26 Suponha que uma lâmina homogênea de densidade k tenha a forma de uma região do plano-xy delimitada por uma curva fechada simples parcialmente suave C. Prove que os momentos de inércia em relação aos eixos x e y são

$$I_x = -\frac{k}{3}\oint_C y^3\,dx, \quad I_y = -\frac{k}{3}\oint_C x^3\,dy$$

27 Use o Exercício 25 para achar o centróide de uma região semicircular de raio a.

28 Use o Exercício 26 para achar o momento de inércia de um disco circular homogêneo de raio a, em relação a um diâmetro.

18.5 INTEGRAIS DE SUPERFÍCIE

As integrais curvilíneas são calculadas ao longo de curvas. As integrais duplas e triplas são definidas em regiões de duas e três dimensões, respectivamente. Podemos também considerar uma integral de uma função sobre uma superfície. Por uma questão de simplicidade, restringimos nosso estudo a superfícies de equações assaz simples, e nossas demonstrações ficarão em um nível intuitivo. Em textos de cálculo avançado pode-se encontrar um tratamento rigoroso.

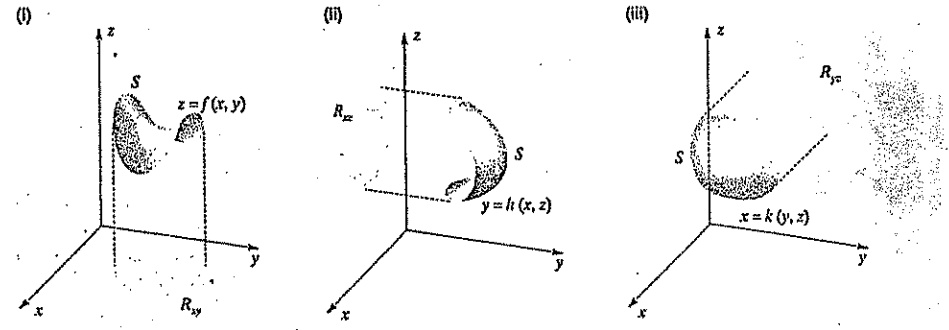


Figura 18.37

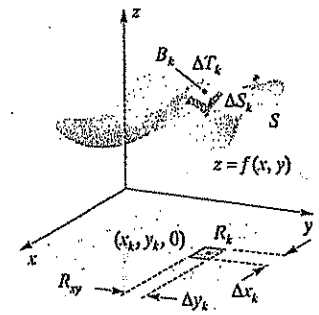


Figura 18.38

Se a projeção de uma superfície S sobre um plano coordenado é uma região de um dos tipos considerados para integrais duplas, dizemos que S tem uma **projeção regular** no plano coordenado. Se S tem uma projeção regular no plano-xy, no plano-xz ou no plano-yz, costumamos denotar a região por R_{xy}, R_{xz} ou R_{yz}, respectivamente. Para tais projeções admitimos que S seja o gráfico de uma equação da forma $z = f(x, y)$, $y = h(x, z)$ ou $x = k(y, z)$, respectivamente, conforme Figura 18.37. Admitimos, além disso, que a função f, g ou k tenha derivadas parciais primeiras contínuas em sua respectiva região.

Consideremos primeiro o caso do gráfico S de $z = f(x, y)$ (ver Figura 18.37(i)). Em (17.16) definimos a área A de S. Técnica análoga pode ser usada para definir uma integral de $g(x, y, z)$ sobre a superfície S, se a função g é contínua em toda uma região contendo S. Utilizaremos a notação da Seção 17.2. Assim, conforme ilustrado na Figura 18.38, ΔS_k e ΔT_k denotarão áreas de porções da superfície S e do plano tangente em $B_k(x_k, y_k, z_k)$, respectivamente, que se projetam sobre o retângulo R_k de uma partição interior de R_{xy}. Calculamos g em B_k para cada k e formamos a soma $\sum_k g(x_k, y_k, z_k)\,\Delta T_k$. Conforme a definição seguinte, a **integral de superfície** $\iint_S g(x, y, z)\,dS$ **de** g **sobre** S é o limite de tais somas quando as normas das partições tendem para 0.

Integral de superfície (18.22)

$$\iint_S g(x, y, z)\,dS = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_k g(x_k, y_k, z_k)\,\Delta T_k$$

Se S é a união de diversas superfícies de tipos adequados, então a integral de superfície define-se como a soma das integrais de superfície individuais. Se $g(x, y, z) = 1$ para todo (x, y, z), então (18.22) se reduz a (17.17) e, daí, a integral de superfície nos dá a área da superfície S.

Obtém-se uma interpretação física das integrais de superfície considerando uma lâmina delgada de metal que tenha a forma de S. Se a densidade de massa por área em (x, y, z) é $g(x, y, z)$, então (18.22) é a massa da lâmina. O centro de gravidade e os momentos de inércia são obtidos pelos métodos utilizados para sólidos no Capítulo 17 (ver Exercício 21).

Da mesma maneira que estabelecemos a fórmula (17.17) para a área de uma superfície, a integral de superfície (18.22) pode ser calculada por meio da fórmula (i) do próximo teorema. As fórmulas (ii) e (iii) são utilizadas para superfícies do tipo ilustrado na Figura 18.37(ii) e (iii).

Teorema de cálculo para integrais de superfície (18.23)

(i) $$\iint_S g(x, y, z)\, dS = \iint_{R_{xy}} g(x, y, f(x, y))\sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1}\, dA$$

(ii) $$\iint_S g(x, y, z)\, dS = \iint_{R_{xz}} g(x, h(x, z), z)\sqrt{[h_x(x, z)]^2 + [h_z(x, z)]^2 + 1}\, dA$$

(iii) $$\iint_S g(x, y, z)\, dS = \iint_{R_{yz}} g(k(y, z), y, z)\sqrt{[k_y(y, z)]^2 + [k_z(y, z)]^2 + 1}\, dA$$

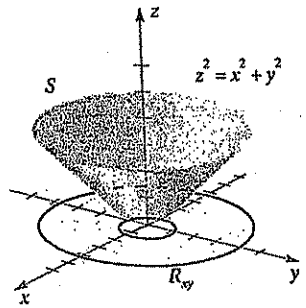


Figura 18.39

EXEMPLO 1

Calcule $\iint_S x^2 z\, dS$ se S é a porção do cone $z^2 = x^2 + y^2$ compreendida entre os planos $z = 1$ e $z = 4$.

SOLUÇÃO

Conforme a Figura 18.39, a projeção R_{xy} de S sobre o plano-xy é a região anular delimitada pelos círculos de raios 1 e 4 com centros na origem. Escrevendo a equação de S na forma

$$z = (x^2 + y^2)^{1/2} = f(x, y)$$

então $f_x(x, y) = \dfrac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$ e $f_y(x, y) = \dfrac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$

Aplicando (18.23)(i) e notando que o radical se reduz a $\sqrt{2}$, obtemos

$$\iint_S x^2 z\, dS = \iint_{R_{xy}} x^2(x^2 + y^2)^{1/2}\sqrt{2}\, dA$$

Utilizamos coordenadas polares para calcular a integral dupla como a seguir:

$$\iint_{R_{xy}} x^2(x^2 + y^2)^{1/2}\sqrt{2}\, dA = \int_0^{2\pi}\int_1^4 (r^2\cos^2\theta) r\sqrt{2} r\, dr\, d\theta$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \left[\frac{r^5}{5}\right]_1^4 d\theta$$

$$= \frac{1.023\sqrt{2}}{5}\int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\theta}{2}\, d\theta$$

$$= \frac{1.023\sqrt{2}}{10}\left[\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1.023\sqrt{2}\pi}{5} \approx 909$$

EXEMPLO 2

Calcule $\iint_S (xz/y)\, dS$ se S é a parte do cilindro $x = y^2$ situada no primeiro octante entre os planos $z = 0$, $z = 5$, $y = 1$ e $y = 4$.

SOLUÇÃO

A Figura 18.40 ilustra a superfície S. A projeção R_{yz} de S sobre o plano-yz é o retângulo de vértices (0, 1, 0), (0, 4, 0), (0, 4, 5) e (0, 1, 5). Assim, pelo Teorema (18.23)(iii) com $k(y, z) = y^2$,

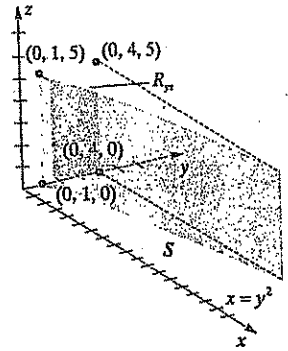


Figura 18.40

$$\iint_S \frac{xz}{y}\, dS = \int_1^4\int_0^5 \frac{y^2 z}{y}\sqrt{(2y)^2 + 0^2 + 1}\, dz\, dy$$

$$= \int_1^4\int_0^5 y\sqrt{4y^2 + 1}\, z\, dz\, dy = \int_1^4 y\sqrt{4y^2 + 1}\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^5 dy$$

$$= \frac{25}{2}\int_1^4 y\sqrt{4y^2 + 1}\, dy = \frac{25}{24}\left[(4y^2 + 1)^{3/2}\right]_1^4$$

$$= \frac{25}{24}(65^{3/2} - 5^{3/2}) \approx 534{,}2$$

As fórmulas no Teorema (18.23) pressupõem que as funções f, h e k tenham derivadas parciais primeiras contínuas em R_{xy}, R_{xz}, e R_{yz}, respectivamente. Em certos casos, estas restrições podem ser removidas, utilizando-se uma integral imprópria, como no seguinte exemplo.

EXEMPLO 3

Calcule $\iint_S (z+y)\,dS$ se S é a parte do gráfico de $z = \sqrt{1-x^2}$ no primeiro octante entre o plano-xz e o plano $y = 3$.

SOLUÇÃO

A superfície S é a parte, no primeiro octante, do cilindro $x^2 + z^2 = 1$ de $y = 0$ a $y = 3$. O gráfico está esboçado na Figura 18.41. A projeção R_{xy} de S sobre o plano-xy é a região retangular de vértices (0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, 3, 0) e (0, 3, 0). Se quisermos utilizar o Teorema (18.23)(i) com $f(x, y) = \sqrt{1-x^3}$, então

$$\sqrt{\left[f_x(x,y)\right]^2 + \left[f_y(x,y)\right]^2 + 1} = \sqrt{\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2 + (0)^2 + 1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Note que $f_x(x, y)$ não é definida em $x = 1$ e, assim, não é contínua em toda a R_{xy}. Todavia, podemos aplicar o Teorema (18.23)(i) com $0 \le x < 1$ e utilizar então uma integral imprópria, como a seguir:

$$\iint_S (z + y)\,dS = \iint_{R_{xy}} (\sqrt{1-x^2} + y)\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dA$$

$$= \int_0^1 \int_0^3 \left(1 + \frac{y}{\sqrt{1-x^2}}\right) dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \left[y + \frac{1}{2}\frac{y^2}{\sqrt{1-x^2}}\right]_0^3 dx = \int_0^1 \left[3 + \frac{1}{2}\frac{9}{\sqrt{1-x^2}}\right] dx$$

$$= \lim_{t \to 1^-} \int_0^t \left[3 + \frac{9}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right] dx$$

$$= \lim_{t \to 1^-} (3t + \tfrac{9}{2}\operatorname{arcsen} t) = 3 + \tfrac{9}{4}\pi \approx 10{,}1$$

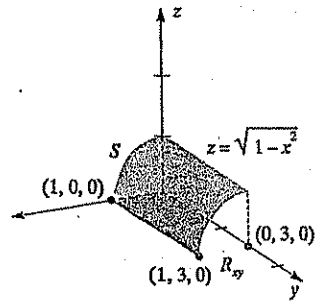


Figura 18.41

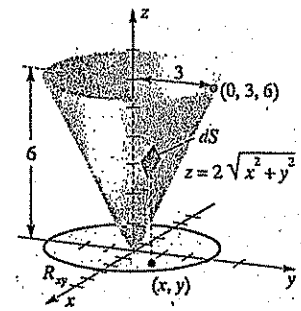


Figura 18.42

Na Seção 6.8 vimos como achar a força exercida sobre uma face de uma lâmina quando ela está submersa em um fluido (ver (6.27)). Podemos utilizar integrais de superfície para resolver problemas análogos para superfícies não-laminares, conforme ilustrado no próximo exemplo.

EXEMPLO 4

Um depósito tem a forma de um cone circular reto de 6 dm de altura e 3 dm de raio de base. Se o depósito está cheio de água que pesa 1 kg/dm³, ache a força total exercida pela água sobre a superfície interna do depósito.

SOLUÇÃO

Referindo o depósito a um sistema coordenado xyz conforme Figura 18.42 (onde as unidades são em decímetros), a equação do cone tem a forma $z = k\sqrt{x^2 + y^2}$, k constante. Como o ponto (0, 3, 6) está no cone, $6 = k\sqrt{0^2 + 3^2}$, ou $k = 2$. Logo, $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$.

Seja dS um elemento de área da superfície do cone que está (aproximadamente) à distância z do plano-xy. A profundidade correspondente da água no depósito é $6 - z$ e a pressão à profundidade de $6 - z$ dm é de

$$(6 - z)\,dS \text{ kg}$$

Tomando um limite de somas, vemos que a força total exercida pela água sobre a superfície interna S do cone é

$$F = \iint_S (6 - z)\,dS$$

A região R_{xy} sob o cone é delimitada pelo círculo $x^2 + y^2 = 9$. Aplicando (18.23)(i) com $f(x, y) = 2\sqrt{x^2 + y^2} = z$, verifica-se que

$$F = \iint_{R_{xy}} (6 - z)\sqrt{5}\,dA$$

Passando para coordenadas polares

$$F = \int_0^{2\pi} \int_0^3 (6 - 2r)\sqrt{5}\,r\,dr\,d\theta \approx 40{,}25\pi \text{ kg}$$

É quando lidamos com campos vetoriais que ocorrem as aplicações mais importantes das integrais de superfície. Seja F um campo vetorial tal que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\,\mathbf{i} + N(x, y, z)\,\mathbf{j} + P(x, y, z)\,\mathbf{k}$$

onde M, N e P são funções (escalares) contínuas. Na Seção 18.2 consideramos a seguinte integral curvilínea para uma curva parcialmente suave C:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

onde s é o parâmetro comprimento de arco para C. Conforme Figura 18.43, $\mathbf{T} = d\mathbf{r}/ds$ é um vetor unitário tangente a C no ponto (x, y, z), onde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ é o vetor posição de (x, y, z). Se $\mathbf{F}$ é um campo de força, então, conforme (18.12), o valor desta integral curvilínea é o trabalho realizado por $\mathbf{F}$ ao longo de C.

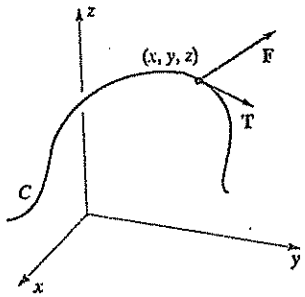


Figura 18.43

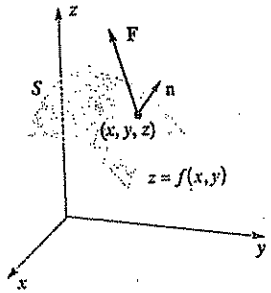


Figura 18.44

Consideremos em seguida uma superfície S e um vetor unitário $\mathbf{n}$ normal a S no ponto (x, y, z), conforme Figura 18.44. Se os componentes de $\mathbf{n}$ são funções contínuas de x, y e z, então $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ é uma função (escalar) contínua e podemos, assim, considerar a seguinte integral de superfície sobre S, a qual, por razões que apresentaremos no final desta seção, é chamada **integral do fluxo de F sobre S**.

Integral do fluxo de F sobre S (18.24)

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Para calcular (18.24), devemos ser mais precisos sobre as propriedades do vetor unitário $\mathbf{n}$. Se a superfície S é o gráfico de uma equação $z = f(x, y)$ e se fazemos $g(x, y, z) = z - f(x, y)$, então S é também o gráfico da equação $g(x, y, z) = 0$. Como o gradiente $\nabla g(x, y, z)$ é um vetor normal ao gráfico de $g(x, y, z) = 0$ no ponto (x, y, z), podemos obter como a seguir um vetor unitário normal $\mathbf{n}$:

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla g(x, y, z)}{\|\nabla g(x, y, z)\|} = \frac{-f_x(x, y)\mathbf{i} - f_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1}}.$$

Fórmulas análogas valem se S é dada por $y = h(x, z)$ ou por $x = k(y, z)$. Note que, para o caso $z = f(x, y)$, o vetor unitário $\mathbf{n}$ é uma **normal superior** de S, pois o componente $\mathbf{k}$ é positivo. Obtém-se uma **normal inferior** tomando-se $-\mathbf{n}$.

No restante deste capítulo, admitiremos que toda superfície S é **orientada** (ou **orientável**), no sentido de que existe um vetor unitário normal $\mathbf{n}$ em cada ponto não-fronteira (x, y, z) e que as componentes de $\mathbf{n}$ são funções contínuas de x, y e z. Dizemos que $\mathbf{n}$ *varia continuamente* sobre a superfície S. Admitiremos também que S tenha dois lados — o *lado de cima* e o *lado de baixo* do gráfico de $z = f(x, y)$ da Figura 18.44. Para uma superfície fechada S como uma esfera, podemos

(i) Normais unitárias exteriores (ii) Normais unitárias interiores

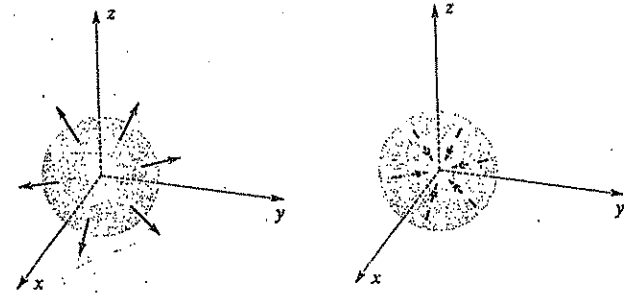


Figura 18.45

considerar o *exterior* e o *interior* de S. Referimo-nos então a $\mathbf{n}$ como a **normal unitária exterior** ou a **normal unitária interior** (ver Figura 18.45).

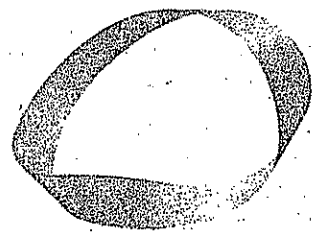


Figura 18.46 Faixa de Möbius.

Nossas restrições sobre S excluem as *superfícies unilaterais*, como a faixa de Möbius, assim designada em homenagem ao matemático alemão A. F. Möbius (1790-1868). Pode-se construir uma faixa de Möbius a partir de uma longa faixa retangular de papel, dando-se meia volta ao papel e colando-se as extremidades menores, o que dá a superfície ilustrada na Figura 18.46. Imaginemos um pintor que, partindo de um ponto qualquer da superfície, tentasse pintar apenas um lado da faixa original. O pintor acabará voltando ao ponto de partida, após

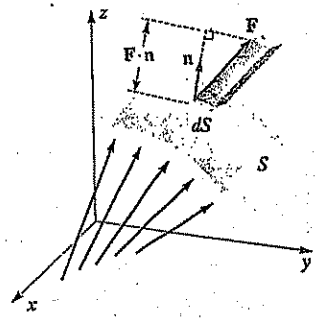


Figura 18.47

pintar toda a superfície, sem ter cruzado nenhuma de suas bordas. Tal superfície unilateral não é orientável.

Para interpretar a significação física da integral do fluxo (18.24), encaremos a superfície S como uma membrana delgada através da qual possa passar um fluido. Suponhamos S imersa em um fluido com campo de velocidade $\mathbf{F}(x, y, z)$. A parte inferior da Figura 18.47, exibe alguns vetores típicos do campo. Cada vetor do campo é a velocidade de uma partícula do fluido (ou molécula).

Suponhamos que dS represente um pequeno elemento de área de S. Se $\mathbf{F}$ é contínua, então é quase constante em dS, e a quantidade de fluido que atravessa dS por unidade de tempo pode ser aproximada pelo volume de um prisma de área de base dS e altura $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$, conforme ilustrado na Figura 18.47. Denotando por dV o volume do prisma na figura, então $dV = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$. Como dV representa a quantidade de fluido que atravessa dS por unidade de tempo, a integral do fluxo é um limite de somas de elementos de volume e, daí, $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$ *é o volume total de fluido que atravessa S em uma unidade de tempo*. Esta quantidade é chamada *fluxo de* $\mathbf{F}$ *através de* (ou *sobre*) S. Se $\mathbf{F}$ e S satisfazem as condições impostas, então temos o seguinte:

Definição (18.25)

O fluxo de um campo vetorial $\mathbf{F}$ através de (ou sobre) uma superfície S é

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Se o fluido de nosso estudo prévio tem densidade $\delta = \delta(x, y, z)$, então o valor da integral do fluxo $\iint_S \delta\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$ *é a massa de fluido que atravessa S.*

O campo vetorial $\mathbf{F}$ da Definição (18.25) pode também representar o fluxo de valor estacionário, ou um gás que se expande uniformemente, ou campos encontrados na teoria da eletricidade. Nesses casos, o fluxo é uma medida da quantidade de calor que atravessa S, do fluxo de gás através de S, ou do fluxo elétrico ou magnético através de S, respectivamente.

Se, para uma superfície fechada como uma esfera, escolhemos $\mathbf{n}$ como a *normal* unitária *exterior*, então o fluxo mede o *fluxo líquido para fora* por unidade de tempo. Se a integral do fluxo é positiva, então o fluxo que sai de S excede o fluxo que entra em S; dizemos que há uma fonte de $\mathbf{F}$ dentro de S. Se a integral é negativa, o fluxo que entra excede o fluxo que sai, havendo então um poço dentro de S. Se a integral é 0, o fluxo que sai e o fluxo que entra são iguais, ou seja, as fontes e os poços se equilibram.

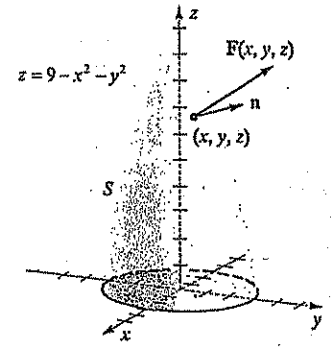


Figura 18.48

EXEMPLO 5

Seja S a parte do gráfico de $z = 9 - x^2 - y^2$ com $z \geq 0$. Se $\mathbf{F}(x, y, z) = 3x\,\mathbf{i} + 3y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, ache o fluxo de $\mathbf{F}$ através de S.

SOLUÇÃO

A Figura 18.48 ilustra o gráfico, juntamente com uma normal unitária superior típica $\mathbf{n}$ e o vetor $\mathbf{F}(x, y, z)$. De acordo com o que vimos após (18.24), para achar uma fórmula para $\mathbf{n}$ consideramos

$$g(x, y, z) = z - (9 - x^2 - y^2) = z - 9 + x^2 + y^2$$

e fazemos

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla g(x, y, z)}{\|\nabla g(x, y, z)\|} = \frac{2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$$

Por (18.25), o fluxo de $\mathbf{F}$ através de S é

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_S \frac{6x^2 + 6y^2 + z}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}\, dS$$

Aplicando o Teorema (18.23)(i), obtemos

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_{R_{xy}} \frac{6x^2 + 6y^2 + 9 - x^2 - y^2}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dA$$
$$= \iint_{R_{xy}} (5x^2 + 5y^2 + 9)\, dA$$

onde R_{xy} é a região circular do plano-xy delimitada pelo gráfico de $x^2 + y^2 = 9$. Passando para coordenadas polares, temos

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^3 (5r^2 + 9) r\, dr\, d\theta = \frac{567\pi}{2} \approx 890{,}6$$

Se, por exemplo, $\mathbf{F}$ é o campo de velocidade de um gás em expansão e $\|\mathbf{F}\|$ é medido em m/seg, então a unidade de fluxo é m^3/seg. Logo, o fluxo de gás através da superfície S na Figura 18.48 é aproximadamente 890,6 m^3/seg.

Na próxima seção estudaremos um resultado, chamado *teorema da divergência*, que possibilitará calcularmos o fluxo através de uma superfície fechada por meio de uma integral tripla.

EXERCÍCIOS 18.5

Exercs. 1-4: Calcule $\iint_S g(x, y, z)\, dS$.

1 $g(x, y, z) = x^2$; S é o hemisfério superior de $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

2 $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; S é a parte do plano $z = y + 4$ interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

3 $g(x, y, z) = x + y$; S é a parte do primeiro octante do plano $2x + 3y + z = 6$.

4 $g(x, y, z) = (x^2 + y^2 + 1)^{1/2}$; S é a porção do parabolóide $2z = x^2 + y^2$ interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 2y$.

Exercs. 5-8: Expresse a integral de superfície como uma integral dupla iterada utilizando uma projeção de S sobre o plano-yz e (b) o plano-xz.

5 $\iint_S xy^2z^3\, dS$;

S é a parte no primeiro octante do plano $2x + 3y + 4z = 12$.

6 $\iint_S (xz + 2y)\, dS$;

S é a parte do gráfico de $y = x^3$ entre os planos $y = 0$, $y = 8$, $z = 2$ e $z = 0$.

7 $\iint_S (x^2 - 2y + z)\, dS$;

S é a parte do gráfico de $4x + y = 8$ delimitada pelos planos coordenados e pelo plano $z = 6$.

8 $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2)\, dS$;

S é a parte no primeiro octante do gráfico de $x^2 + y^2 = 4$ delimitada pelos planos coordenados e pelo plano $x + z = 2$.

9 Interprete $\iint_S g(x, y, z)\, dS$ geometricamente se f é a função constante $g(x, y, z) = c$, com $c > 0$ e S sendo uma projeção regular no plano-xy.

10 Mostre que uma integral dupla $\iint_R f(x, y)\, dA$ é um caso especial de uma integral de superfície.

Exercs. 11-14: Ache $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$ se n é uma normal unitária superior de S.

11 $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$;

S é o hemisfério superior de $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

12 $\mathbf{F} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$;

S é a parte no primeiro octante da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

13 $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$;

S é a parte do cone $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$ interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

14 $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$;

S é a parte do plano $3x + 2y + z = 12$ interceptada pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$ e $y = 2$.

Exercs. 15-16: Ache o fluxo de F através de S.

15 $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$;

S é a parte no primeiro octante do plano $2x + 3y + z = 6$.

16 $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3 + z)\mathbf{i} + y^2z\mathbf{j} + (x^2 + y^2 + z)\mathbf{k}$;

S é a parte no primeiro octante do parabolóide $z = x^2 + y^2$ interceptada pelo plano $z = 4$.

Exercs. 17-18: Ache o fluxo de F sobre a superfície fechada S. (Use a normal *exterior* a S.)

17 $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y)\mathbf{i} + z\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$;

S é a superfície do cubo de vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$.

18 $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$;

S é a superfície do sólido delimitado pelos gráficos de $z = x^2 + y^2$ e $z = 4$.

19 Se S é dada por $x = k(y, z)$ e $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$, mostre que

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_{R_{yz}} [M - Nk_y(y, z) - Pk_z(y, z)]\, dy\, dz.$$

20 Pela lei de Coulomb, se uma carga pontual está situada na origem, então a força exercida sobre uma carga unitária em (x, y, z) é dada por $\mathbf{F}(x, y, z) = (cq/\|\mathbf{r}\|^3)\mathbf{r}$, com $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

Se S é uma esfera com centro na origem, mostre que o fluxo de F através de S é $4\pi cq$.

21 Se uma chapa delgada de metal T tem a forma de uma superfície S e densidade de massa por área $\delta(x, y, z)$, então os *momentos* de T em relação aos planos coordenados se definem como

$$M_{xy} = \iint_S z\delta(x, y, z)\, dS$$

$$M_{xz} = \iint_S y\delta(x, y, z)\, dS$$

$$M_{yz} = \iint_S x\delta(x, y, z)\, dS$$

Utilizando limites de somas, mostre que essas são definições naturais. O *centro de massa* $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ é definido como

$$\bar{x}m = M_{yz}, \quad \bar{y}m = M_{xz}, \quad \bar{z}m = M_{xy}$$

onde m é a massa de T. Suponha que um funil de metal tenha a forma da superfície S do Exemplo 1 (ver Figura 18.39). Se a unidade de comprimento é o centímetro e a densidade de massa por área no ponto (x, y, z) é z^2 gm/cm^2, ache

(a) a massa e o centro de massa do funil

(b) o momento de inércia do funil em relação ao eixo-z.

22 Ref. Exercício 21. Uma lâmina delgada de metal de densidade constante k tem a forma do hemisfério $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. Ache seu centro de massa.

18.6 O TEOREMA DA DIVERGÊNCIA

Um dos mais importantes teoremas do cálculo vetorial é o *teorema da divergência*, também chamado *teorema de Gauss*, em homenagem a Carl Friedrich Gauss (1777-1855), que muitos consideram o maior matemático de todos os tempos. Este teorema estabelece o fluxo de um campo vetorial sobre uma superfície fechada S que é fronteira de uma região Q em três dimensões. Por exemplo, S pode ser uma esfera, um elipsóide, um cubo ou um tetraedro. Pode-se demonstrar o teorema da divergência para regiões assaz complicadas; todavia, tal demonstração nos levaria aos domínios do cálculo avançado. Assim, *em toda esta seção*, admitiremos que Q seja uma região sobre a qual as integrais triplas podem ser calculadas; pelos métodos estabelecidos no Capítulo 17. Admitiremos também que as integrais de superfície possam ser calculadas sobre S. Nesta seção, n denotará uma normal unitária *exterior* a S, conforme ilustrado por alguns vetores típicos na Figura 18.49.

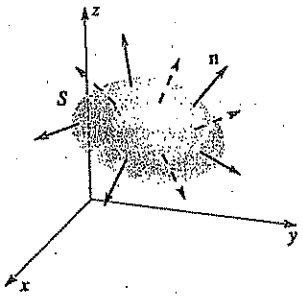


Figura 18.49

Sob as restrições já feitas a Q e a S, o teorema da divergência pode ser enunciado como a seguir:

Teorema da divergência (18.26)

Seja Q uma região em três dimensões delimitada por uma superfície fechada S, e denotemos por $\mathbf{n}$ o vetor normal unitário exterior a S em (x, y, z). Se $\mathbf{F}$ é uma função vetorial dotada de derivadas parciais contínuas em Q, então

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_Q \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV$$

isto é, *o fluxo de* $\mathbf{F}$ *sobre* S *é igual à integral tripla da divergência de* $\mathbf{F}$ *sobre* Q.

DEMONSTRAÇÃO

Se $\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$, simplifiquemos a notação escrevendo $\mathbf{F} = M\,\mathbf{i} + N\,\mathbf{j} + P\,\mathbf{k}$. Aplicando propriedades do produto escalar e a definição de $\mathbf{F}$, podemos escrever a conclusão do teorema como

$$\iint_S (M\mathbf{i} \cdot \mathbf{n} + N\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} + P\mathbf{k} \cdot \mathbf{n})\, dS = \iiint_Q \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial x} \right) dV$$

Para provar esta igualdade, basta mostrar que

$$\iint_S M\mathbf{i} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_Q \frac{\partial M}{\partial x}\, dV$$

$$\iint_S N\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_Q \frac{\partial N}{\partial y}\, dV$$

$$\iint_S P\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_Q \frac{\partial P}{\partial z}\, dV$$

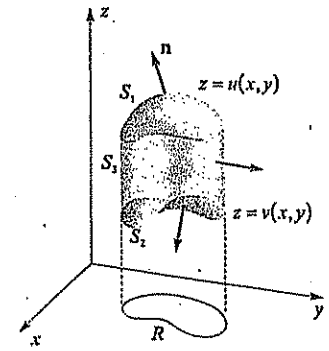


Figura 18.50

Como as provas de todas as três fórmulas são semelhantes, consideraremos apenas a terceira. Além disso, a prova ficará restrita ao caso, ilustrado na Figura 18.50, em que S é a superfície de uma região Q entre os gráficos de $z = v(x, y)$ e $z = u(x, y)$ e acima de uma região conveniente R do plano-xy. Denotaremos por S_1 a superfície superior, por S_2 a superfície inferior e por S_3 a superfície lateral. A figura exibe algumas normais unitárias exteriores típicas.

Sobre S_3, o componente $\mathbf{k}$ de $\mathbf{n}$ é 0 e, então, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} = 0$. Assim, a integral do fluxo sobre S_3 é 0, e podemos escrever

$$\iint_S P\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_{S_1} P\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS + \iint_{S_2} P\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Tal como na Seção 18.5, para achar uma normal unitária (superior) a S_1, fazemos

$$g_1(x, y, z) = z - u(x, y)$$

e calculamos

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla g_1(x, y, z)}{\|\nabla g_1(x, y, z)\|} = \frac{-u_x(x, y)\mathbf{i} - u_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{[u_x(x, y)]^2 + [u_y(x, y)]^2 + 1}}$$

Logo $\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} = 1/\sqrt{[u_x(x, y)]^2 + [u_y(x, y)]^2 + 1}$. Aplicando o Teorema (18.23)(i) com $R = R_{xy}$ e $u(x, y) = f(x, y)$, os radicais cancelam-se, obtendo-se

$$\iint_{S_1} P\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_R P(x, y, u(x, y))\, dA$$

Em S_2, fazemos

$$g_2(x, y, z) = z - v(x, y)$$

e utilizamos a normal unitária *inferior* $\mathbf{n}$ dada por

$$\mathbf{n} = -\frac{\nabla g_2(x, y, z)}{\|\nabla g_2(x, y, z)\|} = \frac{v_x(x, y)\mathbf{i} + v_y(x, y)\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{[v_x(x, y)]^2 + [v_y(x, y)]^2 + 1}}$$

Novamente aplicando (18.23)(i) obtemos a integral do fluxo sobre S_2,

$$\iint_{S_2} P\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS = -\iint_R P(x, y, v(x, y))\, dA$$

Somando as integrais do fluxo sobre S_1 e S_2, obtemos

$$\iint_S P\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_R [P(x, y, u(x, y)) - P(x, y, v(x, y))]\, dA$$

$$= \iint_R \left[\int_{v(x,y)}^{u(x,y)} \frac{\partial P}{\partial z}\, dz \right] dA = \iiint_Q \frac{\partial P}{\partial z}\, dV$$

como queríamos provar. Nossa demonstração pode estender-se a uma união finita de regiões do tipo considerado. As provas das fórmulas para $\iint_S M\,\mathbf{i} \cdot \mathbf{n}\, dS$ e $\iint_S N\,\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}\, dS$ são análogas, desde que Q e S sejam convenientemente restringidas.

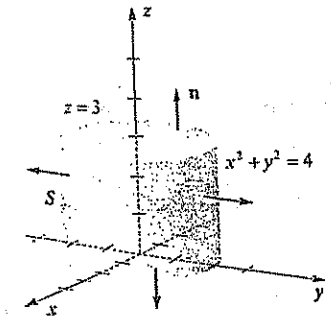


Figura 18.51

EXEMPLO 1

Seja Q a região delimitada pelo cilindro circular $x^2 + y^2 = 4$ e pelos planos $z = 0$ e $z = 3$. Denotemos por S a superfície de Q. Se $\mathbf{F}(x, y, z) = x^3\,\mathbf{i} + y^3\,\mathbf{j} + z^3\,\mathbf{k}$, use o teorema da divergência para calcular $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$.

SOLUÇÃO

A Figura 18.51 ilustra a superfície S e algumas posições típicas de $\mathbf{n}$. Como

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 3(x^2 + y^2 + z^2)$$

temos, pelo teorema da divergência (18.26),

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = 3\iiint_Q (x^2 + y^2 + z^2)\,dV$$

Calculando a integral tripla por coordenadas cilíndricas, temos

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = 3\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^3 (r^2 + z^2)r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= 3\int_0^{2\pi}\int_0^2 \left[r^2 z + \tfrac{1}{3}z^3\right]_0^3 r\,dr\,d\theta = 3\int_0^{2\pi}\int_0^2 (3r^2 + 9)r\,dr\,d\theta$$

$$= 3\int_0^{2\pi}\left[\tfrac{3}{4}r^4 + \tfrac{9}{2}r^2\right]_0^2 d\theta = 3\int_0^{2\pi} 30\,d\theta = 90\left[\theta\right]_0^{2\pi} = 180\pi$$

EXEMPLO 2

Seja Q a região delimitada pelo cilindro $z = 4 - x^2$, pelo plano $y + z = 5$ e pelos planos xy e xz. Seja S a superfície de Q. Se $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3 + \operatorname{sen} z)\mathbf{i} + (x^2 y + \cos z)\mathbf{j} + e^{x^2+y^2}\,\mathbf{k}$, calcule $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$.

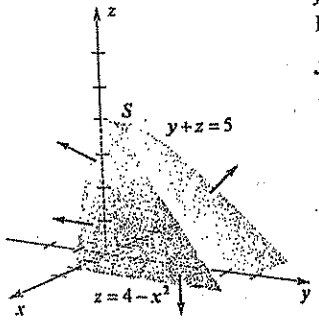


Figura 18.52

SOLUÇÃO

A Figura 18.52 ilustra a região Q, com vários vetores normais unitários exteriores. Seria extremamente difícil calcular diretamente a integral de superfície, todavia, utilizando o teorema da divergência, podemos obter o valor a partir da integral tripla

$$\iiint_Q (3x^2 + x^2)\,dV = \iiint_Q 4x^2\,dV$$

Referindo-nos à Figura 18.52 e aplicando (17.20), vemos que esta integral é igual a

$$\int_{-2}^{2}\int_0^{4-x^2}\int_0^{5-z} 4x^2\,dy\,dz\,dx = \int_{-2}^{2}\int_0^{4-x^2} 4x^2(5 - z)\,dz\,dx$$

$$= \int_{-2}^{2}\left[20x^2 z - 2x^2 z^2\right]_0^{4-x^2} dx$$

$$= \int_{-2}^{2}(48x^2 - 4x^4 - 2x^6)\,dx$$

$$= \tfrac{4.608}{35} \approx 131{,}7$$

Com auxílio do teorema da divergência, podemos obter uma interpretação da divergência de um campo vetorial. Comecemos recordando o teorema do valor médio para integrais definidas, segundo o qual, se uma função f de uma variável é contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então existe um número c em (a, b) tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)L$$

onde $L = b - a$ é o comprimento de $[a, b]$. Demonstram-se resultados análogos para integrais duplas e triplas. Assim, se uma função f de três variáveis é contínua em toda uma região esférica Q, então existe um ponto $A\ (x_1, y_1, z_1)$ no interior de Q tal que

$$\iiint_Q f(x, y, z)\,dV = [f(x, y, z)]_A\,V$$

onde V é o volume de Q e $[f(x, y, z)]_A = f(x_1, y_1, z_1)$. Chamemos a este resultado o **teorema do valor médio para integrais triplas**. Segue-se que, se $\mathbf{F}$ é uma função vetorial contínua, então

$$\iiint_Q \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV = [\nabla\cdot\mathbf{F}]_A\,V$$

ou, equivalentemente,

$$[\nabla\cdot\mathbf{F}]_A = \frac{1}{V}\iiint_Q \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV$$

Aplicando o teorema da divergência, temos

$$[\nabla\cdot\mathbf{F}]_A = \frac{1}{V}\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

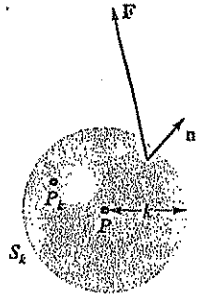


Figura 18.53

onde S é a superfície de Q. A quantidade à direita pode ser encarada como *o fluxo de* F *por unidade de volume sobre a esfera*.

Seja, em seguida, P um ponto arbitrário e suponhamos F contínua em toda uma região contendo P em seu interior. Seja S_k a superfície de uma esfera de raio k com centro em P. Pela discussão prévia, para cada k existe um ponto P_k interior a S_k tal que

$$[\nabla \cdot \mathbf{F}]_{P_k} = \frac{1}{V_k} \iint_{S_k} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

onde V_k é o volume da esfera (ver Figura 18.53).

Fazendo $k \to 0$, então $P_k \to P$ e $[\nabla \cdot \mathbf{F}]_{P_k} \to [\nabla \cdot \mathbf{F}]_P = [\text{div } \mathbf{F}]_P$, o que nos dá

Divergência como um limite (18.27)

$$[\text{div } \mathbf{F}]_P = \lim_{k \to 0} \frac{1}{V_k} \iint_{S_k} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Assim, *a divergência de* F *em* P *é o valor-limite do fluxo por unidade de volume sobre uma esfera de centro* P, *quando o raio da esfera tende para* 0. Em particular, se F representa a velocidade de um fluido, então $[\text{div } \mathbf{F}]_P$ pode ser interpretada como a taxa de perda ou ganho de fluido por unidade de volume em P, por unidade de tempo. Se $\delta = \delta(x, y, z)$ é a densidade em (x, y, z), então $[\text{div } \delta\mathbf{F}]_P$ é a variação de *massa* por unidade de volume por unidade de tempo. Segue-se, das observações no final da Seção 18.5, que há uma fonte ou um poço em P se $[\text{div } \mathbf{F}]_P > 0$ ou $[\text{div } \mathbf{F}]_P < 0$, respectivamente. Se o fluido é incompressível e não existe nenhuma fonte ou nenhum poço, então não pode haver nem ganho nem perda dentro do elemento de volume V_k e, assim, div F = 0 em todo ponto de P. A forma-limite da divergência (18.27) pode aplicar-se também a conceitos físicos tais como fluxo elétrico ou magnético, pois esses apresentam muitas características análogas às dos fluidos.

EXEMPLO 3

Suponhamos que uma superfície fechada S constitua a fronteira de uma região Q e que a origem O seja um ponto interior de Q. Se um campo quadrado inverso é dado por $\mathbf{F} = (q/r^3)\,\mathbf{r}$, onde q é uma constante, $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, e $r = \|\mathbf{r}\|$, prove que o fluxo de F sobre S é $4\pi q$ independentemente da forma de Q.

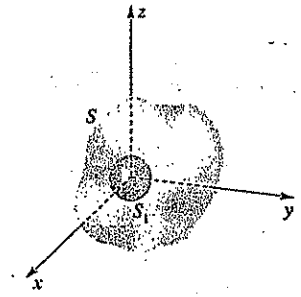


Figura 18.54

SOLUÇÃO

Como F não é contínua em O, o teorema da divergência não pode ser aplicado diretamente; todavia, podemos proceder como a seguir. Seja S_1 uma esfera de raio a e centro O inteiramente contida em S (ver Figura 18.54) e denotemos por Q_1 a região *exterior* a S_1 e *interior* a S. Como F é contínua em toda Q_1, podemos aplicar o teorema da divergência, obtendo

$$\iiint_{Q_1} \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS + \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Pode-se mostrar que, se F é um campo quadrado inverso, então $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ (ver Exercício 21 da Seção 18.1) e, portanto,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = -\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Como a normal unitária n em S é uma normal *exterior*, ela aponta *para fora* da região Q que tem S_1 como parte de sua fronteira. Logo, em S_1, o unitário n da normal aponta *para* a origem. Assim, $\mathbf{n} = (-1/r)\,\mathbf{r}$ com $r = \mathrm{a}$, e

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = -\iint_{S_1} \left(\frac{q}{r^3}\right)\mathbf{r} \cdot \left(-\frac{1}{r}\mathbf{r}\right) dS$$

$$= \iint_{S_1} \frac{q}{r^4} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\, dS = \iint_{S_1} \frac{q}{r^2}\, dS$$

$$= \frac{q}{a^2} \iint_{S_1} dS = \frac{q}{a^2} (4\pi a^2) = 4\pi q$$

O Exemplo 3 tem aplicação importante na teoria da eletricidade. Pela lei de Coulomb, se uma carga pontual de q coulombs está situada na origem, então a força exercida sobre uma carga unitária em (x, y, z) é $\mathbf{F}(x, y, z) = (cq/\|\mathbf{r}\|^3)\,\mathbf{r}$, onde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ e c é uma constante. Segue-se que o *fluxo elétrico* de F sobre qualquer superfície fechada contendo a origem é $4\pi cq$. Assim, o fluxo elétrico é independente do tamanho ou da forma de S, e depende somente de q. Não é difícil estender este resultado ao caso de mais de uma carga pontual interior a S. Este resultado, conhecido como *lei de Gauss*, tem conseqüências de amplo alcance no estudo dos campos elétricos.

EXERCÍCIOS 18.6

Exercs. 1-4: Aplique o teorema da divergência (18.26) para achar $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$.

1 $\mathbf{F} = y \operatorname{sen} x\mathbf{i} + y^2z\mathbf{j} + (x + 3z)\mathbf{k}$;

S é a superfície da região delimitada pelos planos $x = \pm 1, y = \pm 1, z = \pm 1$.

2 $\mathbf{F} = y^3e^z\mathbf{i} - xy\mathbf{j} + x \operatorname{arctg} y\mathbf{k}$;

S é a superfície da região delimitada pelos planos coordenados e o plano $x + y + z = 1$.

3 $\mathbf{F} = (x^2 + \operatorname{sen} yz)\mathbf{i} + (y - xe^{-z})\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$;

S é a superfície da região delimitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e os planos $x + z = 2$ e $z = 0$.

4 $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + z \cosh x\mathbf{j} + (z^2 + y \operatorname{arc\,sen} x)\mathbf{k}$;

S é a superfície da região delimitada pelo paraboloide $z = x^2 + y^2$ e o plano $z = 1$.

Exercs. 5-10: Aplique o teorema da divergência (18.26) para achar o fluxo de $\mathbf{F}$ através de S.

5 $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\,\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}$;

S é o gráfico de $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = 1$.

6 $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + z^2)\mathbf{i} + (y^2 - 2xy)\mathbf{j} + (4z - 2yz)\mathbf{k}$;

S é a superfície da região delimitada pelo cone $x = \sqrt{y^2 + z^2}$ e pelo plano $x = 9$.

7 $\mathbf{F}(x, y, z) = 3x\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$;

S é a superfície da região delimitada pelo paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ e o plano-xy.

8 $\mathbf{F}(x, y, z) = xy^2\mathbf{i} + yz^2\mathbf{j} + zx^2\mathbf{k}$;

S é a superfície da região entre os cilindros $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 9$ e entre os planos $z = -1$ e $z = 2$.

9 $\mathbf{F}(x, y, z) = 2xz\mathbf{i} + xy\mathbf{z}\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$;

S é a superfície da região delimitada pelos planos coordenados e os planos $x + 2z = 4$ e $y = 2$.

10 $\mathbf{F}(x, y, z) = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$;

S é a superfície da região interior ao cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

Exercs. 11-14: Verifique o teorema da divergência calculando a integral de superfície e a integral tripla.

11 $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$;

S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

12 $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$;

S é a superfície do cubo delimitado pelos planos coordenados e pelos planos $x = a, y = a, z = a$, com $a > 0$.

13 $\mathbf{F} = (x + z)\mathbf{i} + (y + z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$;

S é a superfície da região $Q = \{(x, y, z); 0 \le y^2 + z^2 \le 1, 0 \le x \le 2\}$.

14 $\mathbf{F} = \|\mathbf{r}\|^2\mathbf{r}$ para $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$;

S é esfera $x^2 + yy^2 + z^2 = a^2$.

15 Se $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = 0$ para toda superfície fechada do tipo considerado no teorema da divergência, prove que div $\mathbf{F} = 0$.

16 Use o teorema da divergência para provar que se uma função escalar f tem derivadas parciais segundas contínuas, então

$$\iiint_Q \nabla^2 f\, dV = \iint_S D_n f\, dS$$

onde $D_n f$ é a derivada direcional de f na direção de uma normal unitária $\mathbf{n}$ exterior a S.

Exercs. 17-18: Admita que S e Q satisfaçam as condições do teorema da divergência e que f e g sejam funções escalares com derivadas parciais contínuas. Prove:

17 $\iiint_Q (f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g)\, dV = \iint_S (f \nabla g) \cdot \mathbf{n}\, dS$

(*Sugestão*: Seja $\mathbf{F} = f \nabla g$ em (18.26).)

18 $\iiint_Q (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f)\, dV = \iint_S (f \nabla g - g \nabla f) \cdot \mathbf{n}\, dS$

(*Sugestão*: Use a identidade do Exercício 17 juntamente com a obtida permutando f e g.)

Exercs. 19-22: Admita que S e Q verifiquem as condições do teorema da divergência.

19 Se $\mathbf{F}$ é um campo vetorial conservativo com função potencial f e se div $\mathbf{F} = 0$, prove que

$$\iiint_Q \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}\, dV = \iint_S f\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

20 Se $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ e V é o volume de Q, prove que $V = \frac{1}{3}\iint_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}\, dS$.

21 Se $\mathbf{F}$ tem derivadas parciais segundas contínuas, prove que $\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = 0$.

22 Se $\mathbf{a}$ é um vetor constante, prove que $\iint_S \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}\, dS = 0$.

Exercs. 23-24: Define-se uma integral de superfície (ou tripla) de uma função vetorial como a soma das integrais de superfície (ou triplas) de cada componente da função. Com isto, e admitindo que S e Q verifiquem as condições do teorema da divergência, estabeleça o resultado.

23 $\iint_S \mathbf{F} \times \mathbf{n}\, dS = -\iiint_Q \nabla \times \mathbf{F}\, dV$

(*Sugestão*: Aplique o teorema da divergência e o Exercício 26 da Seção 18-1 a $\mathbf{c} \times \mathbf{F}$, onde $\mathbf{c}$ é um vetor constante arbitrário.)

24 $\iint_S f\mathbf{n}\, dS = \iiint_Q \nabla f\, dV$

(*Sugestão:* Aplique o teorema da divergência a $f\mathbf{c}$, onde $\mathbf{c}$ é um vetor constante arbitrário.)

25 Se $\mathbf{F}$ é ortogonal a S em cada ponto (x, y, z) prove que $\iiint_Q \operatorname{rot} \mathbf{F}\, dV = 0$.

26 Se $\mathbf{r}$ é o vetor posição de (x, y, z) e $r = \|\mathbf{r}\|$, prove que $\iiint_Q \mathbf{r}\, dV = \frac{1}{2}\iint_S r^2\mathbf{n}\, dS$.

27 Um tanque cilíndrico vazio de 2 dm de diâmetro e 10 dm de comprimento está imerso em um líquido cuja densidade é de 62,5 kg/dm^3. A *força de flutuabilidade* no tanque é dada por $-\iint_S p\,\mathbf{n}\, dS$, onde $\mathbf{n}$ é a normal unitária exterior à superfície S do tanque e p é a pressão exercida pela água em S. Use a fórmula

$$\iint_S p\mathbf{n}\, dS = \iiint_Q \nabla p\, dV$$

(ver Exercício 24) para calcular a força de flutuabilidade. (*Sugestão:* Se a superfície da água coincide com o plano-xy, então $p = -62{,}5z$ onde z é a profundidade do líquido.)

18.7 O TEOREMA DE STOKES

Em (18.21), enunciamos a seguinte forma vetorial do teorema de Green:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \iint_R (\operatorname{rot} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\, dA$$

onde a curva plana C é a fronteira de R. Este resultado pode ser estendido a uma curva fechada simples parcialmente suave C em três dimensões que seja a fronteira de uma superfície S. A Figura 18.55 ilustra o caso em que S é o gráfico de $z = f(x, y)$, f tem derivadas parciais primeiras contínuas e a projeção C_1 de C sobre o plano-xy é uma curva que delimita uma região R do tipo considerado no teorema de Green. Na figura, $\mathbf{n}$ é uma normal unitária *superior* de S. Tomamos a direção positiva ao longo de C como a direção que corresponde à direção positiva

ao longo de C_1. O vetor T é um vetor unitário tangente a C que aponta na direção positiva. Se F é um campo vetorial cujos componentes têm derivadas parciais contínuas em uma região contendo S, então temos o teorema de Stokes, assim, denominado em homenagem ao matemático e físico inglês George G. Stokes (1819-1903).

Teorema de Stokes (18.28)

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, dS = \iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Pode-se enunciar o teorema de Stokes como segue: *A integral curvilínea do componente tangencial de* F *tomada uma vez ao longo de C na direção positiva é igual à integral de superfície do componente normal de rot* F *sobre S*. Se F é um campo de forças, o teorema afirma que o trabalho realizado por F ao longo de C é igual ao fluxo de rot F sobre S. Pode-se também escrever a integral curvilínea em (18.28) como $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde r é o vetor posição do ponto (x, y, z) em C. Para abordar situações mais gerais do que a exibida na Figura 18.55, devemos considerar uma superfície *orientada* S e definir uma direção positiva ao longo de C de uma forma conveniente. (Em textos mais avançados podemos encontrar a demonstração do teorema de Stokes.)

EXEMPLO 1

Seja S a parte do paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ com $z \geq 0$ e seja C o traço de S no plano-xy. Verifique o teorema de Stokes (18.28) para o campo vetorial $\mathbf{F} = 3z\,\mathbf{i} + 4x\,\mathbf{j} + 2y\mathbf{k}$.

SOLUÇÃO

Devemos mostrar que as duas integrais no Teorema (18.28) têm o mesmo valor.

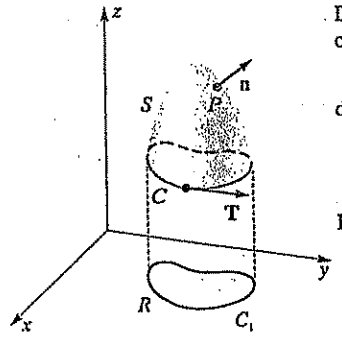


Figura 18.55

A superfície é a mesma que a considerada no Exemplo 5 da Seção 18.5 (ver Figura 18.48), onde obtivemos

$$\mathbf{n} = \frac{2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$$

Por (18.6),

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3z & 4x & 2y \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

Conseqüentemente,

$$\iint_S (\text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_S \frac{4x + 6y + 4}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}\, dS$$

Aplicando (18.23)(i) para calcular esta integral de superfície, temos

$$\iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_R (4x + 6y + 4)\, dA$$

onde R é a região do plano-xy delimitada pelo círculo de raio 3 e centro na origem. Passando para coordenadas polares, obtemos

$$\begin{aligned} \iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 (4r\cos\theta + 6r\,\text{sen}\,\theta + 4) r\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 [(4\cos\theta + 6\,\text{sen}\,\theta) r^2 + 4r]\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[(4\cos\theta + 6\,\text{sen}\,\theta)\, \tfrac{1}{3} r^3 + 2r^2 \right]_0^3 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (36\cos\theta + 54\,\text{sen}\,\theta + 18)\, d\theta \\ &= \left[36\,\text{sen}\,\theta - 54\cos\theta + 18\theta \right]_0^{2\pi} = 36\pi \end{aligned}$$

A integral curvilínea do teorema de Stokes (18.28) pode ser escrita

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C 3z\, dx + 4x\, dy + 2y\, dz$$

onde C é o círculo $x^2 + y^2 = 9$ no plano-xy. Como $z = 0$ em C, esta integral curvilínea se reduz a

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C 4x\, dy = 4 \oint_C x\, dy$$

Pelo teorema (18.20), $\oint_C x\, dy$ é a área da região (um círculo de raio 3) delimitada por C e, assim,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 4(9\pi) = 36\,\pi,$$

que é mesmo que o valor da integral de superfície.

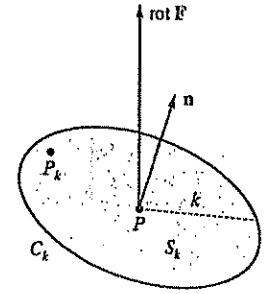


Figura 18.56

Por meio do teorema de Stokes podemos obter uma interpretação física do rot F. Se P é um ponto arbitrário, seja S_k um disco circular de raio k e cenro em P e denotemos por C_k a fronteira de S_k (ver Figura 18.56). Aplicando o teorema de Stokes e um teorema do valor médio para integrais duplas, somos conduzidos a

$$\oint_{C_k} \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \iint_{S_k} (\text{rot }\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dS = [\text{ rot }\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}]_{P_k}(\pi k^2),$$

onde P_k é um ponto interior de S_k e πk^2 é a área de S_k. Assim,

$$(\text{rot }\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}]_{P_k} = \frac{1}{\pi k^2}\oint_{C_k}\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds$$

Fazendo $k\to 0$, então $P_k\to P$ e, assim, obtemos o seguinte:

(Rot F) · n como um limite (18.29)

$$[(\text{rot }\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}]_P = \lim_{k\to 0}\frac{1}{\pi k^2}\oint_{C_k}\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds$$

Se **F** é um campo de velocidade de um fluido, a integral curvilínea $\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds$ é a **circulação em torno de** C. Mede a tendência média do fluido de se mover, ou circular, ao longo da curva. Vê-se de (18.29) que $[(\text{rot }\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}]_P$ nos dá informação sobre o movimento do fluido ao longo da circunferência de um disco circular que é perpendicular a **n**, quando o disco tende a reduzir-se a um ponto. Como $[(\text{rot }\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}]_P$ toma seu valor máximo quando **n** é paralelo a rot **F**, a direção de rot **F** em P é a direção para a qual a circulação ao longo da fronteira de um disco perpendicular a rot **F** toma seu valor máximo, quando o disco tende a reduzir-se a um ponto.

Para visualizar estas idéias, consideremos uma roda de pás miniatura (ou imaginária), ou **medidor de rotacional**, do tipo exibido na Figura 18.57. Um campo de velocidade que atue sobre as pás pode fazer com que a roda gire em seu eixo. Se **n** é um vetor unitário dirigido segundo o eixo, o conjunto girará mais rapidamente quando **n** for paralela a rot **F**.

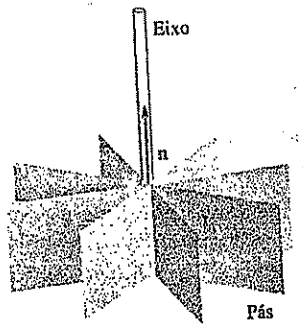


Figura 18.57 Medidor de fluxo.

O escalar (rot **F**) · **n** é chamado às vezes de rotação de **F** em torno de **n**, e se denota por rot **F**, pois mede a tendência do campo vetorial de girar, ou *rotar*, em torno de P. Se rot $\mathbf{F} > 0$ em toda uma região contendo o medidor de rotacional da Figura 18.57, as pás giram em sentido anti-horário (sentido determinado pela regra do polegar, com este dirigido segundo **n**). Se rot $\mathbf{F} < 0$, as pás giram em sentido horário. Se rot $\mathbf{F} = 0$, a circulação ao longo de toda curva fechada C é 0 e as pás não giram. Por esta razão, definimos como **campo vetorial irrotacional** **F** o campo para o qual rot $\mathbf{F} = 0$.

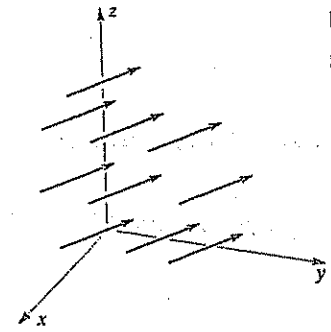


Figura 18.58

EXEMPLO 2

Se $\mathbf{F}(x, y) = a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j} + c\,\mathbf{k}$ e a, b, c são constantes, discuta as propriedades rotacionais do campo **F**.

SOLUÇÃO

Todo vetor do campo **F** tem o mesmo módulo e a mesma direção, conforme ilustrado na Figura 18.58, onde a, b e c são positivos. Inserindo um medidor de rotacional em um ponto arbitrário deste campo vetorial, as pás não giram. Note que

$$\text{rot }\mathbf{F} = \nabla\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

Logo, **F** é irrotacional.

EXEMPLO 3

Seja $\mathbf{F}(x, y, z) = 3(y^2+1)^{-1}\,\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ com $|y| \le 4$.

(a) Descreva o campo vetorial **F** e discuta a circulação de **F** ao longo de vários círculos C_k do plano-xy.

(b) Onde (rot **F**) · **n** toma seu valor máximo?

SOLUÇÃO

(a) Restringindo nossa atenção ao plano-xy, os vetores de **F** formam o padrão da Figura 18.59. (Verifique.) O mesmo padrão se repete em qualquer plano paralelo ao plano-xy.

Consideremos **F** como o campo de velocidade de um fluido que corre em um canal. Note que a velocidade do fluido é máxima ao longo do eixo-x e diminui à medida que o ponto (x, y) se aproxima de uma das retas $y = \pm 4$. Considerando o círculo C_1, então evidentemente $\oint_{C_1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds > 0$, pois, quando C_1 é percorrido na direção positiva, o componente tangencial $\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}$ é grande e positivo na metade inferior de C_1 e negativo (mas próximo de 0) na metade superior. Introduzindo um medidor de rotacional no centro de C_1, com seu eixo perpendicular ao plano-xy, as pás girariam no sentido anti-horário.

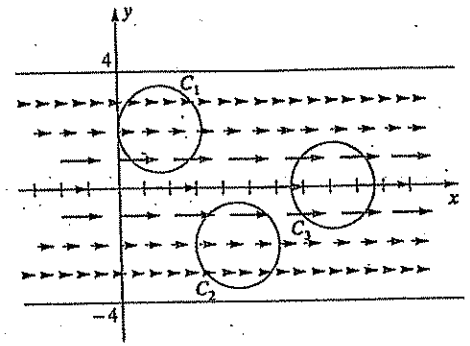


Figura 18.59

Novamente considerando valores de $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$, vemos que $\oint_{C_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds < 0$ e $\oint_{C_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = 0$. Um medidor de rotacional para C_2 giraria em sentido horário, e um medidor para C_3 não giraria.

(b) Aplicando (18.6), obtemos

$$\text{rot } \mathbf{F} = \frac{6y}{(y^2 + 1)^2}\,\mathbf{k}$$

Como o unitário da normal $\mathbf{n}$ é $\mathbf{k}$,

$$(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} = (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \frac{6y}{(y^2 + 1)^2}$$

Note que $(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}$ é positivo para pontos acima do eixo-x, negativo para pontos abaixo do eixo-x e 0 para pontos do eixo-x. Diferenciando em relação a y, temos

$$D_y[(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}] = \frac{6(1 - 3y^2)}{(y^2 + 1)^3}$$

e, então, os números críticos para $(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}$ são $y = \pm 1/\sqrt{3} \approx \pm 0{,}577$.

Pelo teste da derivada primeira, vemos que esses números conduzem a valores máximos. Assim, os valores máximos de $(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}$ ocorrem em qualquer ponto de uma das retas horizontais $y = \pm 1/\sqrt{3}$.

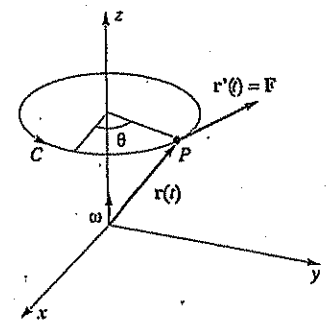


Figura 18.60

Para demonstrar outra ligação entre rot $\mathbf{F}$ e os aspectos rotacionais do movimento, consideremos um fluido girando uniformemente em torno do eixo-z, como se fosse um corpo rígido. Se nos concentrarmos em uma única partícula do fluido no ponto $P(x, y, z)$ e se x, y e z são funções do tempo t, então temos uma situação análoga à ilustrada na Figura 18.60, onde $r(t) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ é o vetor posição de P, e $\omega = \omega_1\mathbf{i} + \omega_2\mathbf{j} + \omega_3\mathbf{k}$ é a velocidade angular (constante). Referindo-nos à Figura 18.60, vemos que $d\theta/dt = \|\omega\|$. Denotando o vetor velocidade $r'(t)$ de P por $\mathbf{F}$, então, como no Exemplo 4 da Seção 15.3,

$$\mathbf{F} = \omega \times \mathbf{r} = (\omega_2 z - \omega_3 y)\mathbf{i} + (\omega_3 x - \omega_1 z)\mathbf{j} + (\omega_1 y - \omega_2 x)\mathbf{k}$$

Por (18.6),

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \omega_2 z - \omega_3 y & \omega_3 x - \omega_1 z & \omega_1 y - \omega_2 x \end{vmatrix}$$

Como ω é um vetor constante, pode-se verificar que

$$\text{rot } \mathbf{F} = 2\omega_1\mathbf{i} + 2\omega_2\mathbf{j} + 2\omega_3\mathbf{k} = 2\omega$$

Isto mostra que o módulo de rot $\mathbf{F}$ é duas vezes a velocidade angular, e a direção de rot $\mathbf{F}$ é segundo o eixo de rotação.

Podemos aplicar o que precede ao campo de velocidade $\mathbf{F}$ do vento no interior do núcleo de um tornado. (Costumamos chamar $\mathbf{F}$ a *velocidade tangencial* do vento). O estudo da circulação ao longo de uma curva C no interior do núcleo é importante na análise de um tornado. No próximo exemplo, calcularemos a circulação quando C é um círculo.

EXEMPLO 4

O núcleo de um tornado gira como se fosse um corpo rígido, da maneira ilustrada na Figura 18.60, onde a velocidade angular do vento $\omega = d\theta/dt$ é constante. Se C é um círculo de raio a em uma secção transversa do núcleo, conforme exibido na figura, o módulo da velocidade tangencial do vento $\mathbf{v}$ é $\|\mathbf{v}\| = \omega a$.

Ache a circulação de $\mathbf{v}$ ao longo de C

(a) utilizando o teorema de Stokes,

(b) calculando $\int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}\, ds$

SOLUÇÃO

(a) Aplicando o teorema de Stokes, vemos que a circulação é

$$\int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}\, ds = \iint_S (\text{rot } \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}\, dS$$

onde S é o disco delimitado por C e $\mathbf{n} = \mathbf{k}$. Pelo que precede este exemplo,

$$\text{rot } \mathbf{v} = 2\omega = 2\omega\mathbf{k}$$

Logo

$$\int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}\, ds = \iint_S (2\omega\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k}\, dS$$

$$= 2\omega \iint_S dS$$

$$= 2\omega\pi a^2$$

Isto mostra que quando o raio a de C aumenta, a tendência do vento de se mover ao longo de C também aumenta.

(b) Como $\mathbf{T}$ é um vetor unitário tangente a C com a mesma direção de $\mathbf{v}$,

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{T} = \|\mathbf{v}\| \, \|\mathbf{T}\| = \|\mathbf{v}\|$$

(ver Teorema (14.19)). Logo

$$\int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}\, ds = \int_C \|\mathbf{v}\|\, ds = \omega a \int_C ds$$

$$= \omega a(2\pi a) = 2\omega\pi a^2$$

EXEMPLO 5

Em pontos exteriores ao núcleo, um tornado não gira como se fosse um corpo rígido. Seja r_0 o raio do núcleo e seja ω a velocidade angular (constante) do vento dentro do núcleo, como no Exemplo 4. Se C é uma secção transversa circular de raio $r > r_0$, conforme ilustrado na Figura 18.60, então o módulo da velocidade tangencial do vento $\mathbf{v}$ em C é (aproximadamente) $\|\mathbf{v}\| = \omega r_0^2/r$.

(a) Mostre que a circulação ao longo de C é a mesma para todo $r > r_0$.

(b) Mostre que rot $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ fora do núcleo.

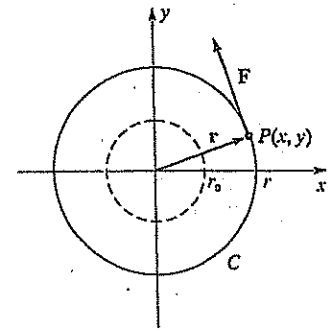


Figura 18.61

SOLUÇÃO

(a) A circulação ao longo de qualquer círculo C de raio $r > r_0$ é

$$\int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}\, ds = \int_C \|\mathbf{v}\|\, ds$$

$$= \frac{\omega r_0^2}{r} \int_C ds$$

$$= \frac{\omega r_0^2}{r} 2\pi r = 2\pi\omega r_0^2$$

(b) A Figura 18.61 exibe a vista de uma secção transversa do tornado. Ali, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ é o vetor posição de um ponto $P(x, y)$ em C e $\|\mathbf{r}\| = r$. No Exemplo 1 da Seção 18.1, provamos que $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ é ortogonal a $\mathbf{r}$ em todo ponto (x, y), conforme ilustrado na figura. Logo, um vetor *unitário* $\mathbf{u}$ na direção de $\mathbf{F}$ é

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$$

Como o módulo de $\mathbf{v}$ é $\omega r_0^2/r$ e $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\mathbf{v} = \frac{\omega r_0^2}{r} \mathbf{u} = \frac{\omega r_0^2}{x^2 + y^2} (-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$$

Aplicando a Definição (18.6), obtemos

$$\text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Em nosso estudo de integrais curvilíneas independentes do caminho, introduzimos a noção de região simplesmente conexa. Este conceito pode ser estendido a três dimensões, entretanto, a definição usual exige propriedades de curvas e superfícies estudadas somente em cursos mais avançados. Para nosso objetivo, uma região D em três dimensões será **simplesmente conexa** se toda curva fechada simples C em D for a fronteira de uma superfície S em D que verifique as condições do teorema de Stokes. Em regiões deste tipo, qualquer curva fechada pode ser continuamente deformada até reduzir-se a um ponto em D, sem cruzar a fronteira de D. Por exemplo, a região interior de uma esfera ou de um paralelepípedo é simplesmente conexa. Já a região interior de um toro (uma superfície em forma de câmara de ar) não é simplesmente conexa. Com esta restrição, podemos estabelecer o seguinte resultado.

Teorema (18.30) Se $\mathbf{F}(x, y, z)$ tem derivadas parciais contínuas em toda uma região simplesmente conexa D, então rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ em D se e somente se $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para toda curva fechada simples C em D.

DEMONSTRAÇÃO

Se rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, então, pelo teorema de Stokes (18.28),

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS = 0$$

Reciprocamente, suponhamos $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para toda curva fechada simples C. Se, em algum ponto P, rot $\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$, então, por continuidade, existe uma subregião de D contendo P tal que rot $\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$ em toda ela. Se, nesta sub-região, escolhemos um disco circular do tipo ilustrado na Figura 18.56 com $\mathbf{n}$ paralelo a rot $\mathbf{F}$, então

$$\oint_{C_k} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S_k} (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS > 0$$

uma contradição. Conseqüentemente, rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ em toda a região D.

Se $\mathbf{F}$ é contínua em uma região conveniente, então a condição $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para toda curva fechada simples é equivalente à independência do caminho. Além disso, como no Teorema (18.13), a independência do caminho é equivalente a $\mathbf{F} = \nabla f$ para alguma função escalar f (isto é, $\mathbf{F}$ é conservativo). Combinando estes fatos com o Teorema (18.30), obtemos:

Teorema (18.31) Se $\mathbf{F}(x, y, z)$ tem derivadas parciais primeiras contínuas em toda uma região simplesmente conexa D, então as condições seguintes são equivalentes:

(i) $\mathbf{F}$ é conservativo, isto é, $\mathbf{F} = \nabla f$ para alguma função escalar f.

(ii) $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é independente do caminho em D.

(iii) $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para toda curva fechada simples C em D.

(iv) $\mathbf{F}$ é irrotacional, isto é, rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

EXEMPLO 6

Prove que, se $\mathbf{F}(x, y, z) = (3x^2 + y^2)\,\mathbf{i} + 2xy\,\mathbf{j} - 3z^2\,\mathbf{k}$, então $\mathbf{F}$ é conservativo.

SOLUÇÃO

A função $\mathbf{F}$ tem derivadas parciais primeiras contínuas para todo (x, y, z). Como

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2 + y^2 & 2xy & -3z^2 \end{vmatrix}$$

$$= (0 - 0)\mathbf{i} + (0 - 0)\mathbf{j} + (2y - 2y)\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

$\mathbf{F}$ é conservativo, pelo Teorema (18.31)(iv).

EXERCÍCIOS 18.7

Exercs. 1-4: Verifique o teorema de Stokes (18.28) para $\mathbf{F}$ e S.

1 $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$;

S é a parte no primeiro octante do plano $x + y = z = 1$.

2 $\mathbf{F} = 2y\mathbf{i} - z\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$;

S é a parte do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

3 $\mathbf{F} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$;

S é o hemisfério $z = (a^2 - x^2 - y^2)^{1/2}$.

4 $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$;

S é a parte do cone $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$ interceptada pelo plano $z = 1$.

5 Se $\mathbf{F} = (3z - \text{sen } x)\mathbf{i} + (x^2 + e^y)\mathbf{j} + (y^3 - \cos z)\mathbf{k}$, use o teorema de Stokes para calcular $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde C é a curva dada por $x = \cos t$, $y = \text{sen } t$, $z = 1$; $0 \leq t \leq 2\pi$.

6 Se $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$ e C é o quadrado de vértices $(0, 0, 2)$, $(1, 0, 2)$, $(1, 1, 2)$ e $(0, 1, 2)$, use o teorema de Stokes para calcular $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

7 Se $\mathbf{F} = 2y\mathbf{i} + e^{z^2}\mathbf{j} - \text{arctg } x\mathbf{k}$ e S é a parte do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ interceptado pelo plano-xy, use o teorema de Stokes para calcular $\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$.

8 Se $\mathbf{F} = xy^2\mathbf{i} + yz^2\mathbf{j} + zx^2\mathbf{k}$ e S é a região delimitada pelo triângulo de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ e $(0, 0, 3)$, use o teorema de Stokes para calcular $\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$.

Exercs. 9-12: Esboce alguns campos vetoriais $\mathbf{F}(x, y, z)$ e discuta as propriedades rotacionais de $\mathbf{F}$ utilizando um medidor de rotacional e rot $\mathbf{F}$. Onde (rot $\mathbf{F}$) $\cdot\, \mathbf{n}$ atinge seu valor máximo?

9 $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2 - 2y)\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$; $0 \leq y \leq 2$

10 $\mathbf{F}(x, y, z) = 0\mathbf{i} + \text{sen } x\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$; $0 \leq x \leq \pi$

11 $\mathbf{F}(x, y, z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ (ver Exemplo 1 da Seção 18.1 e a discussão que segue o Exemplo 3 da Seção 18.7).

12 O campo quadrado inverso da Definição (18.2).

13 Se $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} + (x + e^z)\mathbf{j} + (1 + ye^z)\mathbf{k}$, prove que $\mathbf{F}$ é irrotacional.

14 Um campo vetorial $\mathbf{F}$ é um *campo central de forças* se $\mathbf{F} = f(r)\mathbf{r}$, onde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $r = \|\mathbf{r}\|$, e f é uma função escalar. Se f é diferenciável, mostre que $\mathbf{F}$ é irrotacional.

15 Seja $\mathbf{n}$ a normal unitária exterior em um ponto P da superfície de uma esfera S. Se $\mathbf{F}$ tem derivadas parciais primeiras contínuas em S e em seu interior, prove que $\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = 0$ por meio (a) do teorema da divergência; (b) do teorema de Stokes.

16 Se S e C verificam as condições do teorema de Stokes e se $\mathbf{F}$ é uma função vetorial constante, use (18.28) para provar que $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = 0$.

Exercs. 17-19: Estabeleça a identidade, na hipótese de C e S verificarem as condições do teorema de Stokes.

17 $\oint_C f\nabla g \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla f \times \nabla g) \cdot \mathbf{n}\, dS$, f e g funções escalares.

18 $\oint_C \mathbf{a} \times \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = 2\mathbf{a} \cdot \iint_S \mathbf{n}\, dS$, a vetor constante.

19 $\oint_C f\, d\mathbf{r} = \iint_S \mathbf{n} \times \nabla f\, dS$, f uma função escalar.

20 Se M, N e P são funções de x, y e z dotadas de derivadas parciais primeiras contínuas em uma região simplesmente conexa, prove que

$$\int_C M(x, y, z)\, dx + N(x, y, z)\, dy + P(x, y, z)\, dz$$

é independente do caminho se e somente se

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

18.8 EXERCÍCIOS DE REVISÃO

Exercs. 1-4: Esboce alguns vetores típicos do campo vetorial $\mathbf{F}$.

1 $\mathbf{F}(x, y) = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

2 $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \mathbf{k}$

3 $\mathbf{F}(x, y, z) = -\mathbf{k}$

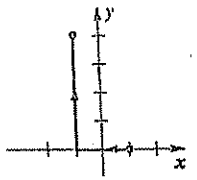
4 $\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$

5 Ache um campo vetorial conservativo em duas dimensões que tenha a função potencial $f(x, y) = y^2 \operatorname{tg} x$.

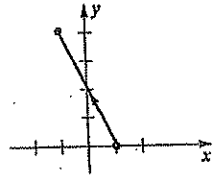
6 Ache um campo vetorial conservativo em três dimensões que tenha a função potencial $f(x, y, z) = \ln(x + y + z)$.

Exercs. 7-10: Calcule $\int_C y^2\, dx + xy\, dy$, onde C é a curva de $(1, 0)$ a $(-1, 4)$ exibida na figura.

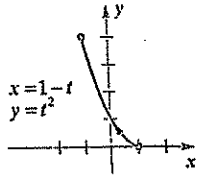
7



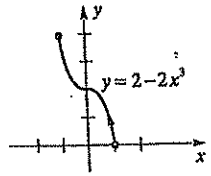
8



9



10



11 Calcule $\int_C xy\, ds$; C é o gráfico de $y = x^4$ de $(-1, 1)$ a $(2, 16)$.

Exercs. 12-14: Calcule:

$$\int_C x\, dx + (x + y)\, dy + (x + y + z)\, dz$$

para a curva C dada de A $(0, 0, 0)$ a B $(2, 4, 8)$.

12 C consiste em três segmentos de reta, o primeiro paralelo ao eixo-z, o segundo paralelo ao eixo-x e o terceiro paralelo ao eixo-y.

13 C consiste no segmento de A e B.

14 C tem a parametrização $x = 1, y = t^2, z = t^3$.

15 Se $\mathbf{F}(x, y) = (x + y)\mathbf{i} + (x - y)\mathbf{j}$ e C dada por $x = \cos t, y = \operatorname{sen} t; -\pi \le t \le 0$, calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

16 A força $\mathbf{F}$ em um ponto (x, y, z) em três dimensões é dada por $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + y^2z\mathbf{j} + xz^2\mathbf{k}$. Se C é o quadrado de vértices $A_1(1, 1, 1)$, $A_2(-1, 1, 1)$, $A_3(-1, -1, 1)$ e $A_4(1, -1, 1)$, ache o trabalho realizado por $\mathbf{F}$ quando seu ponto de aplicação percorre C uma vez na direção dos índices crescentes de A_k.

Exercs. 17-18: Prove que a integral curvilínea é independente do caminho e ache seu valor.

17 $\int_{(1,-1)}^{(2,3)} (x + y)\, dx + (x + y)\, dy$

18 $\int_{(0,0,0)}^{(2,1,3)} (8x^3 + z^2)\, dx - 3z\, dy + (2xz - 3y)\, dz$

19 Se $\mathbf{F}(x, y, z) = 2xe^{2y}\mathbf{i} + 2(x^2e^{2y} + y \cot z)\mathbf{j} - y^2 \csc^2 z\mathbf{k}$, prove que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é independente do caminho, e ache uma função potencial f para $\mathbf{F}$.

Exercs. 20-22: Use o teorema de Green para calcular a integral curvilínea.

$$\oint_C xy\, dx + (x^2 + y^2)\, dy$$

se C é a curva dada.

20 C é a curva fechada determinada por $y = x^2$ e $y - x = 2$ entre $(-1, 1)$ e $(2, 4)$.

21 C é o triângulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

22 C é o círculo $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

23 Se $\mathbf{F}(x, y, z) = x^3z^4\mathbf{i} + xyz^2\mathbf{j} + x^2y^2\mathbf{k}$, ache div $\mathbf{F}$ e rot $\mathbf{F}$.

24 Se f e g são funções escalares de três variáveis prove que $\nabla \cdot (f\nabla g) = f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g$.

25 Calcule $\iint_S xyz\, dS$ se S é a parte do plano $z = x + y$ acima da região triangular do plano xy de vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$ e $(0, 2, 0)$.

26 Calcule $\iint_S x^2z^2\, dS$ se S é a metade superior do cilindro $y^2 + z^2 = 4$ entre $x = 0$ e $x = 1$.

27 Seja Q a região delimitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e pelos planos $z = 0$ e $z = 1$. Se $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$, use o teorema da divergência para achar $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$, onde S é a superfície de Q e $\mathbf{n}$ é a normal unitária exterior a S.

28 Verifique o teorema da divergência se $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$ e S é a superfície do paralelepípedo retângulo delimitado pelos planos $x = \pm 1, y = \pm 2, z = \pm 3$.

Exercs. 29-30: Verifique o teorema de Stokes para $\mathbf{F}$ e S.

29 $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + 5y\mathbf{k}$;

S é o hemisfério $z = (4 - x^2 - y^2)^{1/2}$.

30 $\mathbf{F} = (x + y)\mathbf{i} + (y + z)\mathbf{j} + (x + z)\mathbf{k}$;

S é a região delimitada pelo triângulo de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.

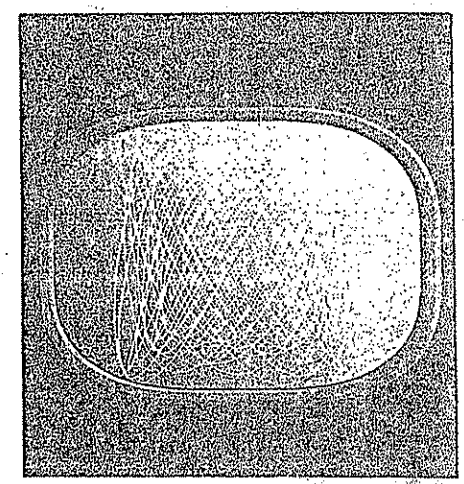
MAKRON Books

Capítulo 19

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

INTRODUÇÃO

As equações diferenciais têm ampla aplicação na resolução de problemas complexos sobre movimento, crescimento, vibrações, eletricidade e magnetismo, aerodinâmica, termodinâmica, hidrodinâmica, energia nuclear e todo tipo de fenômeno físico que envolva taxas de variação de quantidades variáveis.



No começo deste texto, resolvemos certos tipos de equações diferenciais separando variáveis e aplicando a integração indefinida. A Seção 19.1 contém exemplos adicionais e exercícios que envolvem tais equações *separáveis*. Mais adiante estudaremos outros tipos que podem ser resolvidos sistematicamente por meio de técnicas e fórmulas padrão. Embora tais equações sejam mais gerais que as equações separáveis, são, ainda assim, muito particulares. Nas aplicações modernas que envolvem a colocação de satélites em órbita ou o envio de naves espaciais a partes distantes do sistema solar, as equações diferenciais são extremamente complicadas, utilizando-se supercomputadores para obter aproximações das soluções.

O material deste capítulo não tem a pretensão de constituir um tratado sobre o assunto – serve apenas como uma introdução a este vasto e importante ramo da matemática. Há cursos e livros específicos devotados inteiramente ao estudo das equações diferenciais.

19.1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS SEPARÁVEIS

Se y é uma função de x e n é um inteiro positivo, então uma relação de igualdade (que não se reduz a uma identidade) que envolva $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ é chamada uma **equação diferencial de ordem n**.

ILUSTRAÇÃO

EQUAÇÃO DIFERENCIAL	ORDEM
$y' = 2x$	1
$\frac{d^2y}{dx^2} + x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 15y = 0$	2
$(y''')^4 - x^2(y'')^5 + 4xy = xe^x$	3
$\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)^2 - 1 = x^3\frac{dy}{dx}$	4

Nas Seções 5.1 e 7.6 já abordamos sucintamente as equações diferenciais. Recordemos que uma função f (ou $f(x)$) é **solução** de uma equação diferencial se a substituição de y por $f(x)$ resulta em uma identidade para todo x em algum intervalo. Por exemplo, a equação diferencial

$$y' = 6x^2 - 5$$

tem a solução

$$f(x) = 2x^3 - 5x + C$$

para todo real C, pois a substituição de y por $f(x)$ conduz à identidade $6x^2 - 5 = 6x^2 - 5$. Denominamos $f(x) = 2x^3 - 5x + C$ a **solução geral** de $y' = 6x^2 - 5$, pois toda solução é desta forma. Obtém-se uma **solução particular** atribuindo a C valores específicos. Para ilustrar, se $C = 0$, temos a solução particular $y = 2x^3 - 5x$. Às vezes, impõem-se **condições iniciais** que determinam uma solução particular, conforme exemplo a seguir.

EXEMPLO 1

Dada a equação diferencial $y' = 2x$,

(a) ache a solução geral e ilustre-a graficamente

(b) ache a solução particular que satisfaz a condição $y = 3$ se $x = 0$.

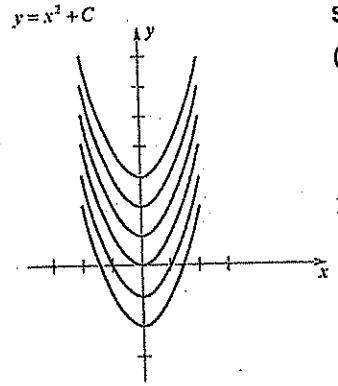


Figura 19.1

SOLUÇÃO

(a) Por integração indefinida,

$$y' = 2x$$
$$\int y'\,dx = \int 2x\,dx$$
$$y = x^2 + C$$

Esta é a solução geral da equação diferencial. Obtêm-se soluções particulares atribuindo valores específicos a C, o que nos conduz à família de parábolas ilustradas na Figura 19.1.

(b) Se $y = 3$ quando $x = 0$, a substituição na solução geral $y = x^2 + C$ dá $3 = 0 + C$, ou $C = 3$. Logo, a solução particular é $y = x^2 + 3$. O gráfico é a parábola da Figura 19.1 com intercepto-y 3.

As equações diferenciais do tipo constante do próximo exemplo ocorrem na análise das vibrações. Estudá-las-emos em detalhe nas Seções 19.3-19.5.

EXEMPLO 2

Mostre que a equação diferencial $y'' - 25y = 0$ tem a solução

$$y = C_1e^{5x} + C_2e^{-5x}$$

para todos os números reais C_1 e C_2.

SOLUÇÃO

Diferenciando y duas vezes, temos

$$y' = 5C_1e^{5x} - 5C_2e^{-5x}$$
$$y'' = 25C_1e^{5x} + 25C_2e^{-5x}$$

Substituindo y' e y'' na equação diferencial $y'' - 25y = 0$, obtemos

$$(25C_1e^{5x} + 25C_2e^{-5x}) - 25(C_1e^{5x} + C_2e^{-5x}) = 0$$

ou $$(25C_1e^{5x} - 25C_1e^{5x}) + (25C_2e^{-5x} - 25C_2e^{-5x}) = 0$$

Como o membro esquerdo é zero para todo x, segue-se que $y = C_1e^{5x} + C_2e^{-5x}$ é uma solução de $y'' - 25y = 0$.

A solução $y = C_1e^{5x} + C_2e^{-5x}$ no Exemplo 2 é a solução geral de $y'' - 25y = 0$. Observe que a equação diferencial é de ordem 2 e que a solução geral contém duas constantes arbitrárias (chamadas **parâmetros**) C_1 e C_2. A definição precisa de solução geral envolve o conceito de **parâmetros independentes** e é deixada para cursos mais avançados. As soluções gerais de

equações diferenciais de ordem n contêm n parâmetros independentes $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Obtém-se uma solução particular atribuindo-se um valor específico a cada parâmetro. Algumas equações diferenciais têm soluções que não são casos particulares da solução geral. Tais soluções singulares não serão, entretanto, abordadas neste texto.

As soluções nos Exemplos 1 e 2 expressam y *explicitamente* em termo de x. Em certos casos, as soluções de equações diferenciais expressam-se *implicitamente*; utilizamos então a diferenciação implícita para verificar tais soluções, conforme exemplo seguinte.

EXEMPLO 3

Mostre que $x^3 + x^2y - 2y^3 = C$ é uma solução implícita de $(x^2 - 6y^2)y' + 3x^2 + 2xy = 0$.

SOLUÇÃO

Se a primeira equação é satisfeita por $y = f(x)$, então diferenciando implicitamente obtemos

$$3x^2 + 2xy + x^2y' - 6y^2y' = 0$$

ou $$(x^2 - 6y^2)y' + 3x^2 + 2xy = 0$$

Assim, $f(x)$ é uma solução da equação diferencial.

Um dos tipos mais simples de equação diferencial é

$$M(x) + N(y)y' = 0 \quad \text{ou} \quad M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0$$

onde M e N são funções contínuas. Se $y = f(x)$ é solução, então

$$M(x) + N(f(x))f'(x) = 0$$

Se $f'(x)$ é contínua, a integração indefinida conduz a

$$\int M(x)\,dx + \int N(f(x))\,f'(x)\,dx = C$$

ou $$\int M(x)\,dx + N(y)\,dy = C$$

A última equação é uma solução (implícita) da equação diferencial. A equação diferencial $M(x) + N(y)y' = 0$ é **separável**, pois as variáveis x e y podem ser separadas conforme indicado.

Uma forma fácil de lembrar o método de separação das variáveis consiste em escrever a equação

$$M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0$$

na *forma diferencial*

$$M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0$$

e integrar cada termo.

EXEMPLO 4

Resolva a equação diferencial $y^4e^{2x} + \dfrac{dy}{dx} = 0$.

SOLUÇÃO

Primeiro escrevemos a equação sob forma diferencial

$$y^4e^{2x}\,dx + dy = 0$$

Se $y \neq 0$, podemos separar as variáveis dividindo por y^4, como segue:

$$e^{2x}\,dx + \frac{1}{y^4}\,dy = 0$$

Integrando cada termo, obtemos a solução (implícita)

$$\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{3y^3} = C$$

Multiplicando ambos os membros por 6, obtemos outra forma da solução

$$3e^{2x} - \frac{2}{y^3} = K$$

com $K = 6C$. Se quisermos uma forma explícita, resolvemos em relação a y, obtendo

$$y = \left(\frac{2}{3e^{2x} - K}\right)^{1/3}$$

Até aqui admitimos $y \neq 0$, todavia, $y = 0$ é uma solução da equação diferencial. Em exemplos futuros não destacaremos tais soluções singulares.

EXEMPLO 5

Resolva a equação diferencial $2y + (xy + 3x)\dfrac{dy}{dx} = 0, x \neq 0$.

SOLUÇÃO

Primeiro escrevemos a equação em forma diferencial como segue:

$$2y\,dx + (xy + 3x)\,dy = 0$$

$$2y\,dx + x(y + 3)\,dy = 0$$

Podemos então separar as variáveis dividindo ambos os membros da última equação por xy, obtendo:

$$\frac{2}{x}dx + \left(\frac{y+3}{y}\right)dy = 0$$

ou

$$\frac{2}{x}dx + \left(1 + \frac{3}{y}\right)dy = 0$$

Integrando cada termo, somos levados às seguintes equações equivalentes:

$$2 \ln |x| + y + 3 \ln |y| = c$$
$$\ln |x|^2 + \ln |y|^3 = c - y$$
$$\ln |x|^2|y|^3 = c - y$$

Passando para a forma exponencial, temos

$$|x|^2|y|^3 = e^{c-y} = e^c e^{-y} = ke^{-y}$$

onde $k = e^c$. Pode-se mostrar, por diferenciação, que

$$x^2y^3 = ke^{-y} \qquad \text{ou} \qquad x^2y^3e^y = k$$

é uma solução implícita da equação diferencial.

EXEMPLO 6

Resolva a equação diferencial

$$(1 + y^2) + (1 + x^2)\frac{dy}{dx} = 0$$

SOLUÇÃO

Primeiro expressamos a equação sob forma diferencial e, em seguida, separamos as variáveis, obtendo

$$(1 + y^2)\,dx + (1 + x^2)\,dy = 0$$
$$\frac{1}{1 + x^2}\,dx + \frac{1}{1 + y^2}\,dy = 0$$

Integrando cada termo, obtemos a solução (implícita)

$$\text{arc tg } x + \text{arc tg } y = C$$

$y = 2x + b;\ y = -\frac{1}{2}x + c$

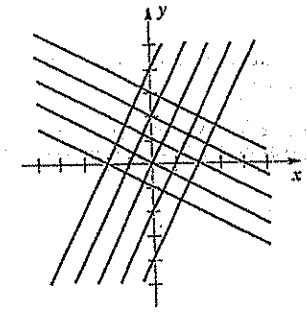


Figura 19.2

Para achar uma solução explícita, resolvemos em relação a y como segue:

$$\text{arc tg } y = C - \text{arc tg } x$$
$$y = \text{tg } (C - \text{arc tg } x).$$

Pode-se modificar a forma desta solução utilizando-se a fórmula da subtração para a tangente:

$$y = \frac{\text{tg } C - \text{tg}(\text{arc tg } x)}{1 + \text{tg } C\ \text{tg}(\text{arc tg } x)}$$

Fazendo $k = \text{tg } C$ e considerando que $\text{tg}(\text{arctg } x) = x$, podemos escrever

$$y = \frac{k - x}{1 + kx}$$

Uma **trajetória ortogonal** de uma família de curvas é uma curva que intercepta ortogonalmente cada curva da família. Restringiremos nosso estudo a curvas em um plano coordenado. Como ilustração, para a família $y = 2x + b$ de todas as retas de coeficientes 2, toda reta $y = -\frac{1}{2}x + c$ de coeficiente angular $-\frac{1}{2}$ é uma trajetória ortogonal. A figura 19.2 ilustra várias curvas de cada família. Duas famílias tais de curvas dizem-se **mutuamente ortogonais**. Outro exemplo: a família $y = mx$ de todas as retas pela origem e a família $x^2 + y^2 = a^2$ de todos os círculos concêntricos de centro na origem são mutuamente ortogonais (ver Figura 19.3).

$y = mx;\ x^2 + y^2 = a^2$

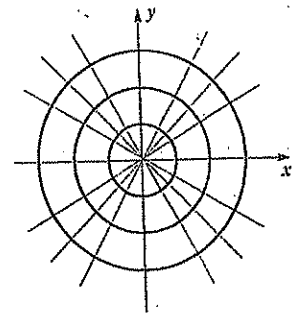


Figura 19.3

Nas aplicações ocorrem freqüentemente pares de famílias de curvas mutuamente ortogonais. Na teoria da eletricidade e magnetismo, as linhas de força associadas a um dado campo são trajetórias ortogonais das curvas equipotenciais correspondentes. Analogamente, as linhas de corrente estudadas na aerodinâmica e na hidrodinâmica são trajetórias ortogonais das curvas *velocidade-equipotencial*. Como ilustração final, no estudo da termodinâmica, o fluxo de calor através de uma superfície plana é ortogonal às curvas isotérmicas.

O próximo exemplo indica uma técnica para determinar as trajetórias ortogonais de uma família de curvas.

EXEMPLO 7

Ache as trajetórias ortogonais da família de elipses $x^2 + 3y^2 = c$ e esboce alguns membros de cada família.

$x^2 + 3y^2 = c; y = kx^3$

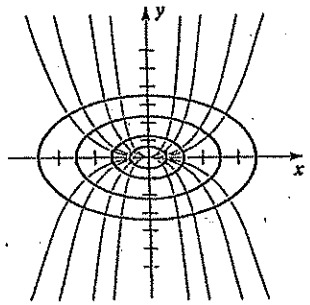


Figura 19.4

SOLUÇÃO

Diferenciando implicitamente a equação dada, obtemos

$$2x + 6yy' = 0 \quad \text{ou} \quad y' = \frac{x}{3y}$$

Logo, o coeficiente angular da tangente em um ponto arbitrário (x, y) de cada uma das elipses é $y' = -x/(3y)$. Se dy/dx é o coeficiente angular da tangente em uma trajetória ortogonal correspondente, então deve ser igual ao inverso negativo de y'. Isto nos dá a seguinte equação diferencial para a família de trajetórias ortogonais

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y}{x}$$

Separando as variáveis, temos:

$$\frac{dy}{y} = 3\frac{dx}{x}$$

Integrando e escrevendo a constante de integração como $\ln |k|$, obtemos

$$\ln |y| = 3 \ln |x| + \ln |k| = \ln |kx^3|$$

Segue-se que $y = kx^3$ é uma equação da família de trajetórias ortogonais. Na Figura 19.4 esboçamos vários membros da família de elipses e as correspondentes trajetórias ortogonais.

EXERCÍCIOS 19.1

Exercs. 1-4: (a) Ache a solução geral da equação diferencial e ilustre-a graficamente. (b) Ache a solução particular que satisfaz a condição $y = 2$ quando $x = 0$.

1 $y' = 3x^2$

2 $y' = x - 1$

3 $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$

4 $y' = 3$

Exercs. 5-10: Prove que y é uma solução da equação diferencial.

5 $y'' - 3y' + 2y = 0$; $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$

6 $y' + 3y = 0$; $y = Ce^{-3x}$

7 $2xy^3 + 3x^2y^2\dfrac{dy}{dx} = 0$; $y = Cx^{-2/3}$

8 $x^3y''' + x^2y'' - 3xy' - 3y = 0$; $y = Cx^3$

9 $(x - 2y)\dfrac{dy}{dx} + 2x + y = 0$; $y^2 - x^2 - xy = C$

10 $y\dfrac{dy}{dx} = x$; $x^2 - y^2 = C$

Exercs. 11-26: Resolva a equação diferencial.

11 $\sec x\, dy - 2y\, dx = 0$

12 $x^2\, dy - \csc 2y\, dx = 0$

13 $x\, dy - y\, dx = 0$

14 $(4 + y^2)\, dx + (9 + x^2)\, dy = 0$

15 $3y\, dx + (xy + 5x)\, dy = 0$

16 $(xy - 4x)\, dx + (x^2y + y)\, dy = 0$

17 $y' = x - 1 + xy - y$

18 $(y + yx^2)\, dy + (x + xy^2)\, dx = 0$

19 $e^{x+2y}\, dx - e^{2x-y}\, dy = 0$

20 $\cos x\, dy - y\, dx = 0$

21 $y(1 + x^3)y' + x^2(1 + y^2) = 0$

22 $x^2y' - yx^2 = y$

23 $x \operatorname{tg} y - y' \sec x = 0$

24 $xy + y'e^{(x^2)} \ln y = 0$

25 $e^x \operatorname{sen} x\, dx - \cos^2 x\, dy = 0$

26 $\operatorname{sen} y \cos x\, dx + (1 + \operatorname{sen}^2 x)\, dy = 0$

Exercs. 27-34: Ache a solução particular da equação diferencial que satisfaça a condição dada.

27 $2y^2y' = 3y - y'$; $y = 1$ quando $x = 3$

28 $\sqrt{x}\, y' - \sqrt{y} = x\sqrt{y}$; $y = 4$ quando $x = 9$

29 $x\, dy - (2x + 1)e^{-y}\, dx = 0$; $y = 2$ quando $x = 1$

30 $\sec 2y\, dx - \cos^2 x\, dy = 0$; $y = \pi/6$ quando $x = \pi/4$

31 $(xy + x)\, dx + \sqrt{4 + x^2}\, dy = 0$; $y = 1$ quando $x = 0$

32 $x\, dy - \sqrt{1 - y^2}\, dx = 0$; $y = \frac{1}{2}$ quando $x = 1$

33 $\cot x\, dy - (1 + y^2)\, dx = 0$; $y = 1$ quando $x = 0$

34 $\csc y\, dx - e^x\, dy = 0$; $y = 0$ quando $x = 0$

Exercs. 35-40: Ache as trajetórias ortogonais da família de curvas. Descreva os gráficos.

35 $x^2 - y^2 = c$

36 $xy = c$

37 $y^2 = cx$

38 $y = cx^2$

39 $y^2 = cx^3$

40 $y = ce^{-x}$

Exercs. 41-42: Se uma equação diferencial de forma $y' = f(x, y)$ tem condição inicial $y_0 = A$ em $x = a$ e se $b > a$, então sua solução em $x = b$ pode ser aproximada pelos seguintes estágios, chamados *método de Euler*.

1 Seja $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, onde n é um inteiro e $x_{k+1} - x_k = (b - a)/n = h$ para $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

2 Faça $y_0 = A$.

3 Seja $y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$.

4 Se $h = 0$, então $y = y_n$ em $x = b$.

(a) Para a equação diferencial dada com a condição inicial $y_0 = 1$ em $a = 0$, use o *método de Euler* com $n = 8$ para aproximar y em $x = 1$. (b) Resolva a equação diferencial e ache o valor exato de y em $x = 1$.

41 $y' = xy$

42 $y' = 1/y$

Exercs. 43-44: Um método mais preciso do que o empregado nos Exercícios 41-42 é o *método de Heun* (ou o *método de Euler melhorado*), no qual a fórmula do estágio 3 é substituída por $y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2}h[f(x_k, y_k) + f(x_k + h, y_k + hf(x_k, y_k))]$

Faça os exercícios seguintes utilizando este método.

43 Parte (a) do Exercício 41

44 Parte (a) do Exercício 42

19.2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

É freqüente a ocorrência do tipo de equação diferencial descrito abaixo no estudo de fenômenos físicos.

Definição (19.1) **Uma equação diferencial linear de primeira ordem** é uma equação da forma

$$y' + P(x)\, y = Q(x)$$

onde P e Q são funções contínuas.

Se, na Definição (19.1), $Q(x) = 0$ para todo x, podemos separar as variáveis e integrar então como segue (desde que $y \neq 0$):

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -P(x)$$

$$\frac{1}{y}dy = -P(x)\,dx$$

$$\ln|y| = -\int P(x)\,dx + \ln|C|$$

Expressamos a constante de integração sob a forma $\ln|C|$ a fim de modificar como a seguir a forma da última equação:

$$\ln|y| - \ln|C| = -\int P(x)\,dx$$

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\int P(x)\,dx$$

$$\frac{y}{C} = e^{-\int P(x)\,dx}$$

$$y\,e^{\int P(x)\,dx} = C$$

Observemos em seguida que, pela regra do produto,

$$D_x\left(ye^{\int P(x)\,dx}\right) = (D_x y)e^{\int P(x)\,dx} + y(D_x\, e^{\int P(x)\,dx})$$

$$= y'e^{\int P(x)\,dx} + yP(x)e^{\int P(x)\,dx}$$

$$= (y' + P(x)y)e^{\int P(x)\,dx}$$

Conseqüentemente, multiplicando ambos os membros de $y' + P(x)\,y = Q(x)$ por $e^{\int P(x)\,dx}$, a equação resultante pode ser escrita como

$$D_x\left(ye^{\int P(x)\,dx}\right) = Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}$$

Integrando ambos os membros, obtemos a seguinte solução implícita da equação diferencial de primeira ordem da Definição (19.1):

$$ye^{\int P(x)\,dx} = \int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx + K$$

para uma constante K. Resolvendo esta equação em relação a y somos levados a uma solução explícita. A expressão $e^{\int P(x)\,dx}$ é um **fator integrante** da equação diferencial. Acabamos de provar o seguinte resultado.

Teorema (19.2) A equação diferencial linear de primeira ordem $y' + P(x)y = Q(x)$ pode ser transformada em uma equação diferencial de variáveis separáveis multiplicando-se ambos os membros pelo fator integrante $e^{\int P(x)\,dx}$.

EXEMPLO 1

Resolva a equação diferencial $\frac{dy}{dx} - 3x^2y = x^2$.

SOLUÇÃO

A equação diferencial tem a forma do Teorema (19.1), com $P(x) = -3x^2$ e $Q(x) = x^2$. Pelo Teorema (19.2),

$$e^{\int -3x^2\,dx} = e^{-x^3}$$

é um fator integrante. Não há necessidade de introduzir uma constante de integração, pois $e^{-x^3+c} = e^c e^{-x^3}$, que difere de e^{-x^3}, por um fator constante e^c. Multiplicando ambos os membros da equação diferencial dada pelo fator integrante e^{-x^3}, obtemos

$$e^{-x^3}\frac{dy}{dx} - 3x^2e^{-x^3}y = x^2e^{-x^3}$$

ou, equivalentemente, $D_x\,(e^{-x^3}y) = x^2e^{-x^3}$

Integrando ambos os membros da última equação, obtemos

$$e^{-x^3}y = \int x^2e^{-x^3}\,dx = -\tfrac{1}{3}e^{-x^3} + C$$

Finalmente, a multiplicação por e^{x^3} nos dá a solução explícita

$$y = -\tfrac{1}{3} + Ce^{(x^3)}$$

EXEMPLO 2

Resolva a equação diferencial $x^2y' + 5xy + 3x^5 = 0$, com $x \neq 0$.

SOLUÇÃO

Para achar um fator integrante, começamos por expressar a equação diferencial na forma padronizada (19.2), onde y' tem o coeficiente 1. Assim, dividindo ambos os membros por x^2, obtemos

$$y' + \frac{5}{x}y = -3x^3$$

que tem a forma dada em (19.1) com $P(x) = 5/x$. Pelo Teorema (19.2),

$$e^{\int P(x)\,dx} = e^{5\ln|x|} = e^{\ln|x|^5} = |x|^5$$

é um fator integrante. Se $x > 0$, então $|x|^5 = x^5$. Se $x < 0$, $|x|^5 = -x^5$. Em qualquer caso, a multiplicação por $|x|^5$ de ambos os membros da forma padronizada dá

$$x^5y' + 5x^4y = -3x^8$$

ou, equivalentemente, $D_x(x^5y) = -3x^8$

Integrando ambos os membros da última equação, temos a solução

$$x^5y = \int -3x^8\,dx = -\frac{x^9}{3} + C$$

ou $$y = -\frac{x^4}{3} + \frac{C}{x^5}$$

EXEMPLO 3

Resolva a equação diferencial

$$y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \sec x + 2x\cos x$$

SOLUÇÃO

A equação é uma equação diferencial linear de primeira ordem. Pelo Teorema (19.2), com $P(x) = \mathrm{tg}\,x$,

$$e^{\int \mathrm{tg}\,x\,dx} = e^{\ln|\sec x|} = |\sec x|$$

é um fator integrante. Multiplicando ambos os membros da equação diferencial por $|\sec x|$ e desprezando o sinal de valor absoluto, obtemos

$$y'\sec x + y\sec x\,\mathrm{tg}\,x = \sec^2 x + 2x\cos x\sec x$$

ou $$D_x(y\sec x) = \sec^2 x + 2x$$

Integrando ambos os membros, obtemos a solução (implícita)

$$y\sec x = \mathrm{tg}\,x + x^2 + C$$

Finalmente, multiplicando ambos os membros da última equação por $1/\sec x = \cos x$, obtemos a solução explícita

$$y = \mathrm{sen}\,x + (x^2 + C)\cos x$$

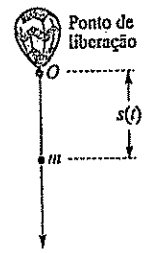


Figura 19.5

Já utilizamos a integração indefinida para estabelecer leis de movimento para corpos em queda livre, admitindo que a resistência do ar pudesse ser desprezada (ver Exemplo 8 da Seção 5.1). Esta suposição é válida para pequenos objetos em movimento lento; entretanto, em muitos casos, a resistência do ar deve ser levada em conta. Esta força de atrito em geral aumenta com a velocidade do objeto em queda. No exemplo, estabeleceremos a lei de movimento para um corpo em queda, na hipótese de a resistência do ar ser diretamente proporcional à velocidade do corpo.

EXEMPLO 4

Deixa-se cair de um balão um objeto de massa m. Ache a distância que o objeto percorre em t segundos, se a força de resistência do ar é diretamente proporcional à velocidade do objeto.

SOLUÇÃO

Introduzamos um eixo vertical com a direção positiva para baixo e a origem no ponto de liberação, conforme a Figura 19.5. Queremos determinar a distância $s(t)$ da origem ao objeto no instante t. A velocidade do objeto é $v = s'(t)$ e o módulo da aceleração é $a = dv/dt = s''(t)$. Se g é a constante gravitacional, então o objeto é atraído para a terra com uma força de magnitude mg. Por hipótese, a força de resistência do ar é kv, para uma constante k, e esta força é diretamente oposta ao movimento. Segue-se que a força para baixo F que atua sobre o objeto é $mg - kv$. Como a segunda lei do movimento de Newton afirma que $F = ma = m(dv/dt)$, chegamos à seguinte equação diferencial:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

ou, equivalentemente, $$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g$$

Denotado por c a constante k/m, a equação pode escrever-se

$$\frac{dv}{dt} + cv = g,$$

que é uma equação diferencial de primeira ordem com t como variável independente. Por (19.2),

$$e^{\int c\,dt} = e^{ct}$$

é um fator integrante. Multiplicando por e^{ct} ambos os membros da equação, obtemos

$$e^{ct}\frac{dv}{dt} + ce^{ct}v = ge^{ct}$$

ou, equivalentemente, $D_t(ve^{ct}) = ge^{ct}$

Integrando ambos os membros, temos

$$ve^{ct} = \frac{g}{c}e^{ct} + K \quad \text{ou} \quad v = \frac{g}{c} + Ke^{-ct}$$

com K constante.

Fazendo $t = 0$, então $v = 0$ e, então,

$$0 = \frac{g}{c} + K \quad \text{ou} \quad K = -\frac{g}{c}$$

Conseqüentemente,

$$v = \frac{g}{c} - \frac{g}{c}e^{-ct}$$

Integrando ambos os membros desta equação em relação a t e considerando que $v = s'(t)$, vemos que

$$s(t) = \frac{g}{c}t + \frac{g}{c^2}e^{-ct} + E$$

Para achar a constante de integração E, fazemos $t = 0$. Como $s(0) = 0$,

$$0 = 0 + \frac{g}{c^2} + E \quad \text{ou} \quad E = -\frac{g}{c^2}$$

Assim, a distância que o objeto em queda percorre em t segundos é

$$s(t) = \frac{g}{c}t + \frac{g}{c^2}e^{-ct} - \frac{g}{c^2}$$

$$= \frac{g}{c^2}(ct + e^{-ct} - 1)$$

$$= \frac{gm^2}{k^2}\left(\frac{k}{m}t + e^{(k/m)t} - 1\right)$$

É interessante comparar esta fórmula de $s(t)$ com a obtida quando se despreza a resistência do ar. Neste último caso, a equação diferencial $m(dv/dt) = mg - kv$ se reduz a $dv/dt = g$, donde $s'(t) = v = gt$. Integrando ambos os membros, chegamos à fórmula muito mais simples $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$.

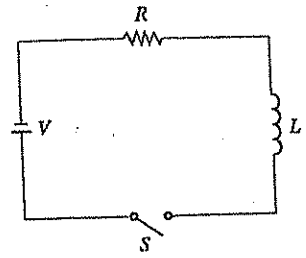


Figura 19.6

EXEMPLO 5

Um circuito elétrico simples consiste em um resistor R e um indutor L ligados em série, conforme ilustrado esquematicamente na Figura 19.6, com uma força eletromotriz V constante. Fechado o interruptor S em $t = 0$, segue-se, de uma das leis de Kirchhoff para circuitos elétricos que, se $t > 0$, a corrente I satisfaz a equação diferencial

$$L\frac{dI}{dt} + RI = V$$

Expresse I como função de t.

SOLUÇÃO

Podemos escrever a equação diferencial como

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{V}{L}$$

que é uma equação diferencial linear de primeira ordem. Aplicando o Teorema (19.2) multiplicamos ambos os membros pelo fator integrante $e^{\int (R/L)\,dt} = e^{(R/L)t}$, obtendo

$$e^{(R/L)t}\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}e^{(R/L)t}I = \frac{V}{L}e^{(R/L)t}$$

ou $$D_t\left(Ie^{(R/L)t}\right) = \frac{V}{L}e^{(R/L)t}$$

Integrando em relação a t, obtemos

$$Ie^{(R/L)t} = \int \frac{V}{L}e^{(R/L)t}\,dt = \frac{V}{R}e^{(R/L)t} + C$$

Como $I = 0$ quando $t = 0$, segue-se que $C = -V/R$. Substituindo este valor de C, chegamos a

$$Ie^{(R/L)t} = \frac{V}{R}e^{(R/L)t} - \frac{V}{R}$$

Finalmente, multiplicando ambos os membros por $e^{-(R/L)t}$ obtemos

$$I = \frac{V}{R}\left[1 - e^{-(R/L)t}\right]$$

Note que, quando t aumenta sem limite, I tende para V/R, que é a corrente prevista pela lei de Ohm quando não há indutância presente.

EXERCÍCIOS 19.2

Exercs. 1-22: Resolva a equação diferencial.

1 $y' + 2y = e^{2x}$

2 $y' - 3y = 2$

3 $xy' - 3y = x^5$

4 $y' + y \cot x = \csc x$

5 $xy' + y + x = e^x$

6 $xy' + (1 + x)y = 5$

7 $x^2\,dy + (2xy - e^x)\,dx = 0$

8 $x^2\,dy + (x - 3xy + 1)\,dx = 0$

9 $y' + y \cot x = 4x^2 \csc x$

10 $y' + y \operatorname{tg} x = \operatorname{sen} x$

11 $(y \operatorname{sen} x - 2)\,dx + \cos x\,dy = 0$

12 $(x^2y - 1)\,dx + x^3\,dy = 0$

13 $(x^2 \cos x + y)\,dx - x\,dy = 0$

14 $y' + y = \operatorname{sen} x$

15 $xy' + (2 + 3x)y = xe^{-3x}$

16 $(x + 4)y' + 5y = x^2 + 8x + 16$

17 $x^{-1}y' + 2y = 3$

18 $y' - 5y = e^{5x}$

19 $\operatorname{tg} x\,dy + (y - \operatorname{sen} x)\,dx = 0$

20 $\cos x\,dy - (y \operatorname{sen} x + e^{-x})\,dx = 0$

21 $y' + 3x^2y = x^2 + e^{-x^3}$

22 $y' + y \operatorname{tg} x = \cos^3 x$

Exercs. 23-26: Ache a solução particular da equação diferencial que satisfaz a condição dada.

23 $xy' - y = x^2 + x$; $y = 2$ quando $x = 1$

24 $y' + 2y = e^{-3x}$; $y = 2$ quando $x = 0$

25 $xy' + y + xy = e^{-x}$; $y = 0$ quando $x = 1$

26 $y' + 2xy - e^{-x^2} = x$; $y = 1$ quando $x = 0$

Exercs. 27-28: Resolva a equação diferencial (a) utilizando um fator integrante e (b) separando as variáveis.

27 A equação diferencial

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} + V$$

descreve a carga Q em um condensador com capacidade C durante um processo de carga envolvendo uma resistência R e uma força eletromotriz V. Se a carga é 0 quando $t = 0$, expresse Q como função de t.

28 A equação diferencial

$$R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \frac{dV}{dt}$$

descreve um circuito elétrico que consiste em uma força eletromotriz V com uma resistência R e capacitância C ligadas em série. Se V é constante e se $I = I_0$ quando $t = 0$, expresse I como função de t.

29 No instante $t = 0$, um tanque contém K quilos de sal dissolvido em 80 galões de água. Suponha que estejamos adicionando ao tanque $\frac{1}{3}$ kg de sal por galão, à razão de 6 gal/min, e que a solução, bem agitada, esteja sendo drenada do tanque à mesma taxa. Estabeleça uma fórmula para a quantidade $f(t)$ de sal no tanque no instante t.

30 Um objeto de massa m se move em uma reta coordenada, sujeito a uma força $F(t) = e^{-t}$, onde t é o tempo. O movimento sofre a resistência de uma força de atrito numericamente igual a duas vezes a velocidade do objeto. Se $v = 0$ quando $t = 0$, estabeleça uma fórmula para v em um instante arbitrário $t > 0$.

31 Utiliza-se uma *curva de aprendizagem* para descrever a velocidade de aquisição de certa habilidade. Suponha que um industrial julgue que um operário produza A unidades de certo artigo no primeiro dia de emprego e que, à medida que sua proficiência aumenta, vá produzindo cada vez mais rapidamente, até atingir o máximo de M unidades por dia. Seja $f(t)$ o número de unidades produzidas no dia t, $t \geq 1$. Suponha ainda que a taxa de produção $f'(t)$ seja proporcional a $M - f(t)$.

(a) Estabeleça uma fórmula para $f(t)$.

(b) Se $M = 30$, $f(1) = 5$ e $f(2) = 8$, estime $f(20)$.

32 Um quarto com as dimensões 3 m × 4,5 m × 2,5 m contém inicialmente 0,001% de monóxido de carbono (CO). Suponha que, a partir do instante $t = 0$, comece a penetrar no quarto, à razão de 0,03 m³/min, uma fumaça contendo 5% de CO, e que a mistura, após circulada, seja eliminada do quarto à mesma taxa.

(a) Estabeleça uma fórmula para o volume $f(t)$ de CO no quarto no instante t.

(b) O nível mínimo de CO considerado perigoso para a saúde é 0,015%. Após quantos minutos o quarto atingirá este nível de CO?

33 O modelo de von Bertalanffy para o crescimento de um animal admite que haja um extremo superior de y_L centímetros para o comprimento. Se y é o comprimento na idade de t anos, supõe-se a taxa de crescimento proporcional ao comprimento ainda por atingir. Ache a solução geral da equação diferencial resultante.

34 Uma célula está em um líquido contendo um soluto, como, por exemplo, potássio, de concentração constante c_0. Se $c(t)$ é a concentração do soluto dentro da célula no instante t, então o *princípio de Fick* da difusão passiva através da membrana da célula afirma que a taxa à qual a concentração varia é proporcional ao *gradiente de concentração* $c_0 - c(t)$. Determine $c(t)$, se $c(0) = 0$.

35 Muitos remédios comuns (como a penicilina) são eliminados da corrente sangüínea a uma taxa proporcional à quantidade y ainda presente.

(a) Se se injetam y_0 miligramas diretamente na corrente sangüínea, mostre que $y = y_0e^{-kt}$, $k > 0$.

(b) Se o remédio é ministrado por via intravenosa à taxa de I mg/min, então $y' = -ky + I$. Se $y = 0$ quando $t = 0$, expresse y como função de t e ache $\lim_{t \to \infty} y$.

(c) Se a meia-vida do remédio na corrente sangüínea é de 2 horas, estime a taxa de infusão que resulte em uma quantidade a longo prazo de 100 miligramas na corrente sangüínea.

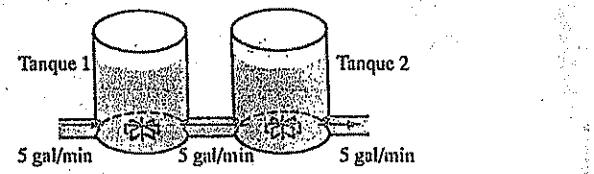
36 A figura a seguir exibe um sistema de dois tanques em que a água entra nos tanques e sai deles à razão de 5 gal/min. Cada tanque contém 50 galões de água.

(a) Misturando 1 kg de corante na água do tanque 1, se $x(t)$ denota a quantidade de corante no tanque após t minutos, mostre que $x'(t) = -0,1\,x(t)$ e que $x(t) = e^{-0,1t}$.

(b) Pela parte (a), o corante entra no tanque 2 à taxa de $5 \cdot \frac{1}{50}x(t) = 0,1e^{-0,1t}$ kg/min. Mostre que se $y(t)$ é a quantidade de corante no tanque 2 após t minutos, então $y'(t) = -0,1y(t) + 0,1e^{-0,1t}$. Admitindo $y(0) = 0$, determine $y(t)$.

(c) Qual a quantidade máxima de corante no tanque 2?

(d) Refaça a parte (b), se o volume do tanque 2 é de 40 galões.



Exercs. 37-38: Ref Exercícios 41-44, Seção 19.1. Mostre que nem sempre os métodos numéricos proporcionam aproximações precisas, verificando primeiro que a equação diferencial $y' = 10y - 11e^{-x}$, com a condição inicial $y = 1$ se $x = 0$, tem a solução $y = e^{-x}$ para todo x, e aproximando em seguida y em $x = 1$ pelo método indicado com $n = 8$.

37 Método de Euler

38 Método de Euler melhorado.

Exercs. 39-40: Outra técnica numérica para obter soluções aproximadas de equações diferentes é o clássico *método de Runge-Kutta*, obtido substituindo-se a fórmula do estágio 3 do método de Euler melhorado (Exercícios 41-42 da Seção 19.1) por

$$y_{k+1} = y_k + \tfrac{1}{6}h(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4),$$

onde

$$K_1 = f(x_k,\ y_k)$$
$$K_2 = f(x_k + \tfrac{1}{2}h,\ y_k + \tfrac{1}{2}hK_1)$$
$$K_3 = f(x_k + \tfrac{1}{2}h,\ y_k + \tfrac{1}{2}hK_2)$$
$$K_4 = f(x_k + h,\ y_k + hK_3).$$

Para a equação diferencial dada, com a condição inicial $y_0 = 0,1$ em $x = 0$, use este método, com $n = 4$, para obter uma aproximação de y em $x = \frac{1}{2}$.

39 $y' = x^2 + y^2$ 40 $y' = \operatorname{sen}(x + y^2)$

19.3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE SEGUNDA ORDEM

A definição seguinte é uma generalização de (19.1).

Definição (19.3) **Uma equação diferencial linear de ordem n é uma equação da forma**

$$y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + f_{n-1}(x)y' + f_n(x)y = k(x)$$

onde $f_1, f_2, \ldots, f_n$ e k são funções de uma variável, com o mesmo domínio. Se $k(x) = 0$ para todo x, a equação é homogênea. Se $k(x) \neq 0$ para algum x, a equação se diz não-homogênea.

Em livros sobre equações diferenciais, podemos encontrar uma análise completa de (19.3). Restringiremos nosso estudo a equações de segunda ordem em que f_1 e f_2 são funções constantes. Nesta seção, abordaremos o caso homogêneo. Na próxima seção, estudaremos as equações não-homogêneas. As aplicações serão tratadas na Seção 19.5.

A equação diferencial linear homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes mais gerais tem a forma

$$y'' + by' + cy = 0,$$

onde b e c são constantes. Antes de procurarmos achar soluções particulares, estabeleçamos o resultado seguinte.

Teorema (19.4) **Se $y = f(x)$ e $y = g(x)$ são soluções de $y'' + by' + cy = 0$, então**

$$y = C_1 f(x) + C_2 g(x)$$

é uma solução, para todos os reais C_1 e C_2.

DEMONSTRAÇÃO

Como $f(x)$ e $g(x)$ são soluções de $y'' + by' + cy = 0$,

$$f''(x) + bf'(x) + cf(x) = 0$$

e

$$g''(x) + bg'(x) + cg(x) = 0$$

Multiplicando a primeira equação por C_1, a segunda por C_2, e somando, o resultado é

$$[C_1 f''(x) + C_2 g''(x)] + b[C_1 f'(x) + C_2 g'(x)]$$

$$+ c[C_1 f(x) + C_2 g(x)] = 0$$

Assim, $C_1 f(x) + C_2 g(x)$ é uma solução.

Pode-se mostrar que, se as soluções f e g do Teorema (19.4) gozam da propriedade que $f(x) \neq Cg(x)$ para todo real C e se $g(x)$ não é identicamente 0, então $y = C_1 f(x) + C_2 g(x)$ é a solução geral da equação diferencial $y'' + by' + cy = 0$. Assim, para determinar a solução geral, basta achar duas tais funções f e g e aplicar (19.4).

Em nossa pesquisa de uma solução para $y'' + by' + cy = 0$, utilizaremos $y = e^{mx}$ como solução-tentativa. Como $y' = me^{mx}$ e $y'' = m^2 e^{mx}$, segue-se que $y = e^{mx}$ é uma solução se e somente se

$$m^2 e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0$$

ou, como $e^{mx} \neq 0$, se e somente se

$$m^2 + bm + c = 0$$

A última equação é de grande importância na pesquisa de soluções de $y'' + by' + cy = 0$ e tem um nome especial.

Definição (19.5) **A equação auxiliar da equação diferencial $y'' + by' + cy = 0$ é $m^2 + bm + c = 0$.**

Note que podemos obter a equação auxiliar substituindo, na equação diferencial, y'' por m^2, y' por m e y por 1. Como a equação auxiliar é quadrática, ela tem duas raízes reais distintas, ou duas raízes reais iguais, ou duas raízes complexas conjugadas. O próximo teorema é uma conseqüência da observação após a prova do Teorema (19.4).

Teorema (19.6) **Se as raízes m_1, m_2 da equação auxiliar são reais e distintas, então a solução geral de $y'' + by' + cy = 0$ é**

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$$

EXEMPLO 1

Resolva a equação diferencial $y'' - 3y' - 10y = 0$.

SOLUÇÃO

A equação auxiliar é $m^2 - 3m - 10 = 0$ ou, equivalentemente, $(m - 5)(m + 2) = 0$. Como as raízes $m_1 = 5$ e $m_2 = -2$ são reais e distintas, segue-se, do Teorema (19.6), que a solução geral é

$$y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-2x}$$

Teorema (19.7) Se a equação auxiliar tem a raiz dupla m, então a solução geral de $y'' + by' + cy = 0$ é

$$y = C_1e^{mx} + C_2xe^{mx}$$

DEMONSTRAÇÃO

Pela fórmula quadrática, as raízes de $m^2 + bm + c = 0$ são $m = (-b \pm \sqrt{b_2 - 4c})/2$. Se $b_2 - 4c = 0$, então m é uma raiz dupla e obtemos $m = -b/2$, ou $2m + b = 0$. Como m satisfaz a equação auxiliar, $y = e^{mx}$ é solução da equação diferencial. De acordo com a observação que segue a demonstração do Teorema (19.4), basta mostrar que $y = xe^{mx}$ também é solução. Substituindo y por xe^{mx} na equação $y'' + by' + cy = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}(2me^{mx} + m^2xe^{mx}) + b(mxe^{mx} + e^{mx}) + cxe^{mx} &= (m^2 + bm + c)xe^{mx} + (2m + b)e^{mx} \\ &= 0xe^{mx} + 0e^{mx} = 0\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

EXEMPLO 2

Resolva a equação diferencial $y'' - 6y' + 9y = 0$

SOLUÇÃO

A equação auxiliar $m^2 - 6m + 9 = 0$ ou, equivalentemente, $(m - 3)^2 = 0$, tem uma raiz dupla 3. Logo, pelo Teorema (19.7), a solução geral é

$$y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} = e^{3x}(C_1 + C_2x)$$

Podemos também considerar a equação diferencial de segunda ordem da forma

$$ay'' + by' + cy = 0$$

com $a \neq 1$. É possível obtermos a forma indicada nos Teoremas (19.6) e (19.7) dividindo ambos os membros por a entretanto, é mais simples utilizar a equação auxiliar

$$am^2 + bm + c = 0$$

conforme ilustrado no exemplo a seguir.

EXEMPLO 3

Resolva a equação diferencial $6y'' - 7y' + 2y = 0$.

SOLUÇÃO

A equação auxiliar é $6m^2 - 7m + 2 = 0$ ou, equivalenteinente, $(2m - 1)(3m - 2) = 0$. Logo as raízes são $m_1 = \frac{1}{2}$ e $m_2 = \frac{2}{3}$. Pelo Teorema (19.6) a solução geral da equação dada é

$$y = C_1e^{x/2} + C_2e^{2x/3}$$

Resta considerarmos o caso final em que as raízes da equação auxiliar $m^2 + bm + c = 0$ de $y'' + by' + cy = 0$ são números complexos da forma

$$z_1 = s + ti \text{ e } z_2 = s - ti$$

onde s e t são números reais e $i^2 = -1$. Podemos antecipar, pelo Teorema (19.6), que a solução geral da equação diferencial é

$$y = C_1e^{z_1x} + C_2e^{z_2x} = C_1e^{(s + ti)x} + C_2e^{(s - ti)x}$$

Para definir expoentes complexos, devemos estender alguns conceitos do cálculo de modo a abranger funções cujos domínios incluam números complexos. Como um desenvolvimento completo exige métodos avançados, limitar-nos-emos às idéias básicas.

Na Seção 11.8 vimos como certas funções podem ser representadas por séries de potências. Podemos facilmente estender as definições e teoremas do Capítulo 11 às séries infinitas que envolvem números complexos. Como isto é válido, utilizaremos as representações (11.48) em séries de potências para *definir* e^z, sen z e cos z para todo número complexo z, como a seguir.

Funções de $z = a + bi$ (19.8)

(i) $$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

(ii) $$\operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

(iii) $$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

(19.8)(i) dá

$$\begin{aligned}e^{iz} &= 1 + (iz) + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \frac{(iz)^5}{5!} + \ldots \\ &= 1 + iz + i^2\frac{z^2}{2!} + i^3\frac{z^3}{3!} + i^4\frac{z^4}{4!} + i^5\frac{z^5}{5!} + \ldots\end{aligned}$$

Como $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$ etc., vemos que

$$e^{iz} = 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + i\frac{z^5}{5!} - \cdots$$

que também pode ser escrito como

$$e^{iz} = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots\right)$$

Aplicando agora as fórmulas (iii) e (ii) de (19.8), obtemos o resultado seguinte, designado em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783).

Fórmula de Euler (19.9)

> Se z é um número complexo,
>
> $$e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z$$

As leis dos expoentes são válidas para os números complexos. Além disso, as fórmulas para derivadas podem ser estendidas a funções de uma variável complexa z. Por exemplo, $D_z e^{kz} = ke^{kz}$, onde z é um número complexo. Se a equação auxiliar de $y'' + by' + cy = 0$ tem raízes complexas $s \pm ti$, então a solução geral desta equação pode ser escrita nas seguintes formas equivalentes:

$$y = C_1 e^{(s+ti)x} + C_2 e^{(s-ti)x}$$
$$y = C_1 e^{sx+txi} + C_2 e^{sx-txi}$$
$$y = C_1 e^{sx} e^{txi} + C_2 e^{sx} e^{-txi}$$
$$y = e^{sx}(C_1 e^{itx} + C_2 e^{-itx})$$

Podemos simplificar ainda mais aplicando a fórmula de Euler. Especialmente, por (19.9),

$$e^{itx} = \cos tx + i \operatorname{sen} tx$$

e

$$e^{-itx} = \cos tx - i \operatorname{sen} tx$$

donde decorre que

$$\cos tx = \frac{e^{itx} + e^{-itx}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} tx = \frac{e^{itx} - e^{-itx}}{2i}$$

Fazendo $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$ no que precede e aplicando então a fórmula de cos tx, obtemos

$$y = \tfrac{1}{2} e^{sx}(e^{itx} + e^{-itx})$$
$$= \tfrac{1}{2} e^{sx}(2 \cos tx) = e^{sx} \cos tx$$

Assim, $y = e^{sx} \cos tx$ é uma solução particular de $y'' + by' + cy = 0$. Fazendo $C_1 = -C_2 = i/2$ somos conduzidos à solução particular $y = e^{sx} \operatorname{sen} tx$. Isto constitui uma demonstração parcial do próximo teorema.

Teorema (19.10)

> Se a equação auxiliar $m^2 + bm + c = 0$ tem raízes complexas conjugadas $s \pm ti$, então a solução geral de $y'' + by' + cy = 0$ é
>
> $$y = e^{sx}(C_1 \cos tx + C_2 \operatorname{sen} tx)$$

EXEMPLO 4

Resolva a equação diferencial $y'' - 10y' + 41y = 0$.

SOLUÇÃO

As raízes da equação auxiliar $m^2 - 10m + 41 = 0$ são

$$m = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 164}}{2} = \frac{10 \pm 8i}{2} = 5 \pm 4i$$

Aplicando o Teorema (19.10), obtemos a solução geral da equação diferencial:

$$y = e^{5x}(C_1 \cos 4x + C_2 \operatorname{sen} 4x)$$

EXERCÍCIOS 19.3

Exercs. 1-22: Resolva a equação diferencial.

1 $y'' - 5y' + 6y = 0$

2 $y'' - y' - 2y = 0$

3 $y'' - 3y' = 0$

4 $y'' + 6y' + 8y = 0$

5 $y'' + 4y' + 4y = 0$

6 $y'' - 4y' + 4y = 0$

7 $y'' - 4y' + y = 0$

8 $6y'' - 7y' - 3y = 0$

9 $y'' + 2\sqrt{2}y' + 2y = 0$

10 $4y'' + 20y' + 25y = 0$

11 $8y'' + 2y' - 15y = 0$

12 $y'' + 4y' + y = 0$

13 $9y'' - 24y' + 16y = 0$

14 $4y'' - 8y' + 7y = 0$

15 $2y'' - 4y' + y = 0$

16 $2y'' + 7y' = 0$

17 $y'' - 2y' + 2y = 0$

18 $y'' - 2y' + 5y = 0$

19 $y'' - 4y' + 13y = 0$

20 $y'' + 4 = 0$

21 $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 6\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$

22 $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + 6y = 0$

Exercs. 23-30: Ache a solução particular da equação diferencial que satisfaça as condições indicadas.

23 $y'' - 3y' + 2y = 0$; $y = 0$ e $y' = 2$ quando $x = 0$

24 $y'' - 2y' + y = 0$; $y = 1$ e $y' = 2$ quando $x = 0$

25 $y'' + y = 0$; $y = 1$ e $y' = 2$ quando $x = 0$

26 $y'' - y' - 6y = 0$; $y = 0$ e $y' = 1$ quando $x = 0$

27 $y'' + 8y' + 16y = 0$; $y = 2$ e $y' = 1$ quando $x = 0$

28 $y'' + 5y = 0$; $y = 4$ e $y' = 2$ quando $x = 0$

29 $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + 5y = 0$; $y = 0$ e $\dfrac{dy}{dx} = 1$ quando $x = 0$

30 $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 6\dfrac{dy}{dx} + 13y = 0$; $y = 2$ e $\dfrac{dy}{dx} = 3$ quando $x = 0$.

19.4 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES NÃO-HOMOGÊNEAS

Nesta seção, estudaremos equações diferenciais lineares de segunda ordem não-homogêneas com coeficientes constantes, isto é, equações da forma

$$y'' + by' + cy = k(x)$$

onde b e c são constantes e k é uma função contínua.

É conveniente utilizarmos os símbolos de operador diferencial D e D^2 tais que, se $y = f(x)$, então

$$Dy = y' = f'(x) \text{ e } D^2y = y'' = f''(x)$$

Definição (19.11)

Se $y = f(x)$ e se f' existe, então o **operador diferencial linear** $L = D^2 + bD + c$ define-se como

$$L(y) = (D^2 + bD + c)y = D^2y + b\,Dy + cy = y'' + by' + cy$$

Por meio de L podemos escrever a equação diferencial $y'' + by' + cy = k(x)$ na forma compacta $L(x) = k(x)$. Nos Exercícios 19 e 20, você deve verificar que, para todo número real C,

$$L(Cy) = CL(y)$$

e que, se $y_1 = f_1(x)$ e $y_2 = f_2(x)$, então

$$L(y_1 \pm y_2) = L(y_1) \pm L(y_2)$$

Para a equação diferencial $y'' + by' + cy = k(x)$ (isto é, $L(y) = k(x)$), a equação homogênea correspondente $L(y) = 0$ é a **equação complementar**.

Teorema (19.12)

Seja $y'' + by' + cy = k(x)$ uma equação diferencial linear não-homogênea de segunda ordem. Se y_p é uma solução particular de $L(y) = k(x)$ e se y_c é a solução geral da equação complementar $L(y) = 0$, então a solução geral de $L(y) = k(x)$ é $y = y_p + y_c$.

DEMONSTRAÇÃO

Como $L(y_p) = k(x)$ e $L(y_c) = 0$,

$$L(y_p + y_c) = L(y_p) + L(y_c) = k(x) + 0 = k(x)$$

o que significa que $y_p + y_c$ é uma solução de $L(y) = k(x)$. Além disso, se $y = f(x)$ é uma outra solução, então

$$L(y - y_p) = L(y) - L(y_p) = k(x) - k(x) = 0$$

Conseqüentemente, $y - y_p$ é uma solução da equação complementar. Assim, $y - y_p = y_c$ para algum y_c, que é o que queríamos provar.

Se utilizarmos os resultados da Seção 19.3 para achar a solução geral y_c de $L(x) = 0$, então, conforme o Teorema (19.12), tudo do que necessitamos para determinar a solução geral de $L(x) = k(x)$ é *uma* solução particular y_p.

EXEMPLO 1

Resolva a equação diferencial $y'' - 4y = 6x - 4x^3$, utilizando a solução particular $y_p = x^3$.

SOLUÇÃO

A equação complementar é $y'' - 4y = 0$, que, pelo Teorema (19.6), admite a solução geral

$$y_c = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$$

Aplicando o Teorema (19.12), vemos que a solução geral da equação não-homogênea dada é

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + x^3$$

Se não pudermos achar, por simples inspeção, uma solução particular de $y'' + by' + cy = k(x)$, poderemos utilizar a seguinte técnica, chamada **variação dos parâmetros**. Dada a equação diferencial $L(y) = k(x)$, sejam y_1 e y_2 as expressões que aparecem na solução geral $y = C_1y_1 + C_2y_2$ da equação complementar $L(y) = 0$. Por exemplo, poderíamos ter, como em (19.6), $y_1 = e^{m_1x}$ e $y_2 = e^{m_2x}$. Procuremos agora achar uma solução particular de $L(y) = k(x)$ que tenha a forma

$$y_p = uy_1 + vy_2$$

onde $u = g(x)$ e $v = h(x)$ para certas funções g e h. As derivadas primeira e segunda de y_p são

$$y_p' = (uy_1' + vy_2') + (u'y_1 + v'y_2)$$
$$y_p'' = (uy_1'' + vy_2'') + (u'y_1' + v'y_2') + (u'y_1 + v'y_2)'$$

Levando esses valores em $L(y_p) = y_p'' + by_p' + cy_p$ e reagrupando os termos, obtemos

$$L(y_p) = u(y_1'' + by_1' + cy_1) + v(y_2'' + by_2' + cy_2)$$
$$+ b(u'y_1 + v'y_2) + (u'y_1 + v'y_2)' + (u'y_1' + v'y_2')$$

Como y_1 e y_2 são soluções de $y'' + by' + cy = 0$, os dois primeiros termos à direita são 0. Logo, para obter $L(y_p) = k(x)$, basta escolher u e v tais que

$$\begin{cases} u'y_1 + v'y_2 = 0 \\ u'y'_1 + v'y'_2 = k(x) \end{cases}$$

Podemos mostrar que este sistema de equações sempre tem uma solução única u' e v'. Podemos então determinar u e v por integração e observar que $y_p = uy_1 + vy_2$, para achar uma solução particular da equação diferencial. O que dissemos pode ser resumido como a seguir.

Variação dos parâmetros (19.13)

Se $y = C_1y_1 + C_2y_2$ é a solução geral da equação complementar $L(y) = 0$ de $y'' + by' + cy = k(x)$, então uma solução particular de $L(y) = k(x)$ é

$$y_p = uy_1 + vy_2$$

onde $u = g(x)$ e $v = h(x)$ satisfaçam o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} u'y_1 + v'y_2 = 0 \\ u'y'_1 + v'y'_2 = k(x) \end{cases}$$

EXEMPLO 2

Resolva a equação diferencial $y'' + y = \cot x$.

SOLUÇÃO

A equação complementar é $y'' + y = 0$. Como a equação auxiliar $m^2 + 1 = 0$ tem raízes $\pm i$, vemos, pelo Teorema (19.10), que a solução geral da equação diferencial homogênea $y'' + y = 0$ é

$$y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$$

Procuramos, assim, uma solução particular da equação diferencial que tenha a forma $y_p = uy_1 + vy_2$, onde $y_1 = \cos x$ e $y_2 = \operatorname{sen} x$. O sistema de equações do Teorema (19.13) é, portanto,

$$\begin{cases} u' \cos x + v' \operatorname{sen} x = 0 \\ -u' \operatorname{sen} x + v' \cos x = \cot x \end{cases}$$

Resolvendo em relação a u' e v', obtemos

$$u' = -\cos x \qquad v' = \csc x - \operatorname{sen} x$$

Integrando cada uma dessas expressões (e desprezando as constantes de integração), obtemos

$$u = -\operatorname{sen} x, \quad v = \ln|\csc x - \cot x| + \cos x$$

Aplicando o Teorema (19.13), vemos que uma solução particular da equação dada é

$$y_p = -\operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{sen} x \ln|\csc x - \cot x| + \operatorname{sen} x \cos x$$

ou, equivalentemente,

$$y_p = \operatorname{sen} x \ln|\csc x - \cot x|$$

Finalmente, pelo Teorema (19.12), a solução geral de $y'' + y = \cot x$ é

$$y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \ln|\csc x - \cot x|$$

Dada a equação diferencial

$$L(y) = y'' + by' + cy = e^{ax}$$

onde e^{ax} não é uma solução de $L(y) = 0$, é razoável esperarmos que exista uma solução particular da forma $y_p = Ae^{ax}$, pois e^{ax} é o resultado da procura de $L(Ae^{ax})$. Isto sugere tomarmos Ae^{ax} como solução-tentativa da equação dada e determinarmos o valor do coeficiente A. É o que se chama **método dos coeficientes indeterminados**, ilustrado no próximo exemplo.

EXEMPLO 3

Resolva a equação diferencial $y'' + 2y' - 8y = e^{3x}$.

SOLUÇÃO

A equação auxiliar $m^2 + 2m - 8 = 0$ da equação diferencial $y'' + 2y' - 8y = 0$ tem raízes 2 e -4. Pelo Teorema (19.6), a solução geral da equação complementar é

$$y_c = C_1e^{2x} + C_2e^{-4x}$$

Pelas observações precedentes, procuramos uma solução particular da forma $y_p = Ae^{3x}$. Como $y'_p = 3Ae^{3x}$ e $y''_p = 9Ae^{3x}$, a substituição na equação dada conduz a

$$9Ae^{3x} + 6Ae^{3x} - 8Ae^{3x} = e^{3x}$$

Dividindo ambos os membros por e^{3x}, obtemos

$$9A + 6A - 8A = 1 \quad \text{ou} \quad A = \tfrac{1}{7}$$

Assim, $y_p = \frac{1}{7}e^{3x}$, e, pelo Teorema (19.12), a solução geral é

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-4x} + \tfrac{1}{7}e^{3x}.$$

Enunciamos sem demonstração três regras para achar uma solução-tentativa de uma equação diferencial não-homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes. (Ver textos sobre equações diferenciais para uma abordagem mais extensa deste tópico.)

Teorema sobre soluções particulares (19.14)

(i) Se $y'' + by' + cy = e^{nx}$ e n não é raiz da equação auxiliar $m^2 + bm + c = 0$, então existe uma solução particular da forma $y_p = Ae^{nx}$.

(ii) Se $y'' + by' + cy = xe^{nx}$ e n não é solução da equação auxiliar $m^2 + bm + c = 0$, então existe uma solução particular da forma $y_p = (A + Bx)e^{nx}$.

(iii) Se $y'' + by' + cy = e^{sx} \operatorname{sen} tx$
ou $y'' + by' + cy = e^{sx} \cos tx$

e o número complexo $s \pm ti$ não é solução da equação auxiliar $m^2 + bm + c = 0$, então existe uma solução particular da forma

$$y_p = Ae^{sx} \cos tx + Be^{sx} \operatorname{sen} tx$$

A parte (i) do Teorema (19.4) já foi aplicada na resolução do Exemplo 3. Nos exemplos a seguir ilustramos as partes (ii) e (iii).

EXEMPLO 4

Resolva $y'' - 3y' - 18y = xe^{4x}$.

SOLUÇÃO

Como a equação auxiliar $m^2 - 3m - 18 = 0$ tem as raízes 6 e -3, segue-se, da seção precedente, que a solução geral de $y'' - 3y' - 18y = 0$ é

$$y = C_1e^{6x} + C_2e^{-3x}$$

Como 4 não é raiz da equação auxiliar, vemos, pelo Teorema (19.14)(ii), que existe uma solução particular da forma

$$y_p = (A + Bx)e^{4x}$$

Diferenciando duas vezes, temos

$$y_p' = (4A + 4Bx + B)e^{4x}$$
$$y_p'' = (16A + 16B + 8B)e^{4x}$$

A substituição na equação diferencial dada conduz a

$$(16A + 16Bx + 8B)e^{4x} - 3(4A + 4Bx + B)e^{4x} - 18(A + Bx)e^{4x} = xe^{4x}$$

que se reduz a

$$-14A + 5B - 14Bx = x$$

Assim, y_p é uma solução, desde que

$$-14A + 5B = 0 \quad \text{e} \quad -14B = 1$$

Assim, $B = -\frac{1}{14}$ e $A = -\frac{5}{196}$. Conseqüentemente,

$$y_p = (-\tfrac{5}{196} - \tfrac{1}{14}x)e^{4x} = -\tfrac{1}{196}(5 + 14x)e^{4x}$$

Aplicando o Teorema (19.12), obtemos a solução geral

$$y = C_1e^{6x} + C_2e^{-3x} - \tfrac{1}{196}(5 + 14x)e^{4x}$$

EXEMPLO 5

Resolva a equação $y'' - 10y' + 41y = \operatorname{sen} x$

SOLUÇÃO

No Exemplo 4 da seção precedente obtivemos a solução geral

$$y_c = e^{5x}(C_1 \cos 4x + C_2 \operatorname{sen} 4x)$$

da equação complementar. De acordo com o Teorema (19.14)(iii) com $s = 0$ e $t = 1$, procuramos uma solução particular da forma

$$y_p = A \cos x + B \operatorname{sen} x$$

Como

$$y_p' = -A \operatorname{sen} x + B \cos x \text{ e } y_p'' = -A \cos x - B \operatorname{sen} x$$

a substituição na equação precedente dá

$$-A \cos x - B \operatorname{sen} x + 10A \operatorname{sen} x - 10B \cos x + 41A \cos x + 41B \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x$$

que pode escrever-se como

$$(40A - 10B) \cos x + (10A + 40B) \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x$$

Conseqüentemente, y_p é uma solução, desde que

$$40A - 10B = 0 \quad \text{e} \quad 10A + 40B = 1$$

A solução deste sistema de equações é $A = \frac{1}{170}$ e $B = \frac{4}{170}$, e então,

$$y_p = \tfrac{1}{170} \cos x + \tfrac{4}{170} \operatorname{sen} x = \tfrac{1}{170}(\cos x + 4 \operatorname{sen} x)$$

Assim, a solução geral é

$$y = e^{5x}(C_1 \cos 4x + C_2 \operatorname{sen} 4x) + \tfrac{1}{170}(\cos x + 4 \operatorname{sen} x)$$

EXERCÍCIOS 19.4

Exercs. 1-10: Resolva a equação diferencial pelo método da variação dos parâmetros.

1 $y'' + y = \operatorname{tg} x$

2 $y'' + y = \sec x$

3 $y'' - 6y' + 9y = x^2e^{3x}$

4 $y'' + 3y' = e^{-3x}$

5 $y'' - y = e^x \cos x$

6 $y'' - 4y' + 4y = x^{-2}e^{2x}$

7 $y'' - 9y = e^{3x}$

8 $y'' + y = \operatorname{sen} x$

9 $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} - 4y = 2$

10 $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} = x + 1$

Exercs. 11-18: Resolva a equação diferencial pelo método dos coeficientes indeterminados.

11 $y'' - 3y' + 2y = 4e^{-x}$

12 $y'' + 6y' + 9y = e^{2x}$

13 $y'' + 2y' = \cos 2x$

14 $y'' + y = \operatorname{sen} 5x$

15 $y'' - y = xe^{2x}$

16 $y'' + 3y' - 4y = xe^{-x}$

17 $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 6\dfrac{dy}{dx} + 13y = e^x \cos x$

18 $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + 2y = e^{-x} \operatorname{sen} 2x$

Exercs. 19-20: Prove a identidade, se L é o operador diferencial linear (19.11) e y, y_1 e y_2 são funções de x.

19 $L(C_y) = CL(y)$ 20 $L(y_1 \pm y_2) = L(y_1) \pm L(y_2)$

Exercs. 21-22: A solução de uma equação diferencial da forma $y'' = f(x, y)$ com condições iniciais $y = y_0$ em $x = a$ e $y = y_{-1}$ em $x = a - h$ pode ser aproximada por meio da fórmula $y_{k+1} = 2y_k - y_{k-1} + h^2 f(x_k, y_k)$ para $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$, onde $h = (b - a)/n$ e $x_k = a + kh$. Se $h = 0$, então y_k é uma aproximação de y em $x = x_k$. Use esta fórmula com $n = 4$ e $a = 0$ para aproximar y em $x = \frac{1}{2}$ para a equação diferencial e as condições iniciais dadas.

21 $y'' = (4x^2 - 2)y$; $y_0 = 1$, $y_{-1} = 0{,}984496$

22 $y'' = y - x$; $y_0 = 1$, $y_{-1} = 0{,}882823$

19.5 VIBRAÇÕES

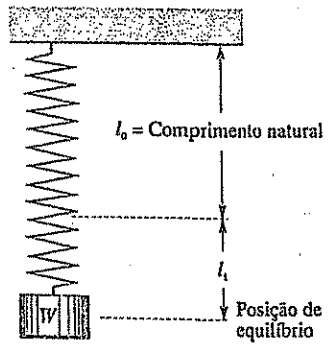


Figura 19.7

As vibrações nos sistemas mecânicos são causadas por forças externas. A corda de um violino vibra quando tocada, uma viga de aço vibra quando atingida por um martelo e uma ponte vibra se uma banda a atravessa em passo cadenciado. Nesta seção utilizaremos equações diferenciais para analisar vibrações que podem ocorrer em uma mola.

De acorco com a lei de Hooke, a força necessária para distender uma mola de y unidades além de seu comprimento natural é ky, onde k é um número real positivo chamado *constante da mola*. A **força restauradora** da mola é $-ky$. Suponhamos que, com um peso W anexo, uma mola, em posição de equilíbrio, sofra uma distensão de uma distância l_1 além de seu comprimento natural l_0, conforme ilustrado na Figura 19.7. Se g é uma constante gravitacional e m é a massa do peso, então $W = mg$ e, na posição de equilíbrio,

$$mg = kl_1 \quad \text{ou} \quad mg - kl_1 = 0$$

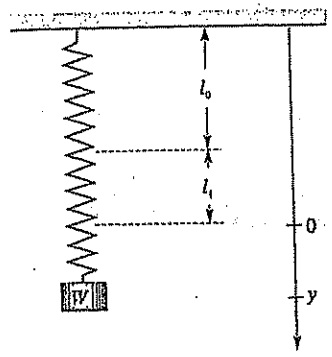


Figura 19.8

desde que a massa da mola seja desprezível em comparação com m.

Suponha que o peso seja puxado para baixo e liberado. Consideremos a reta coordenada com origem na posição de equilíbrio e a direção positiva para baixo, conforme Figura 19.8, onde y é a coordenada do centro de massa do peso após t segundos. A força F que atua sobre o peso quando sua aceleração é a é dada pela segunda lei do movimento de Newton $F = ma$. Admitindo o movimento **não-amortecido** – isto é, não existe nenhuma força retardadora externa – e que o peso se mova em um meio sem atrito, vemos que

$$F = mg - k(l_1 + y) = mg - kl_1 - ky = -ky$$

Como $F = ma$ e $a = d^2y/dt^2$, isto implica que

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky$$

Dividindo por m ambos os membros desta equação somos levados à seguinte equação diferencial

Vibração livre, não-amortecida (19.15)

$$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}y = 0}$$

EXEMPLO 1

Se um peso de massa m está em vibração livre, não-amortecida, mostre que o movimento é harmônico simples. Ache o deslocamento se o peso da Figura 19.8 é puxado de uma distância l_2 para baixo e em seguida liberado com velocidade zero.

SOLUÇÃO

Denotando k/m por ω^2, podemos escrever (19.15) como

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$$

As soluções da equação auxiliar $m^2 + \omega^2 = 0$ são $\pm\omega i$. Logo, pelo Teorema (19.10), a solução geral é

$$y = C_1 \cos \omega t + C_2 \operatorname{sen} \omega t$$

Segue-se que o peso está em movimento harmônico simples (ver Exercício 26 da Seção 4.7).

Se o peso é puxado de uma distância l_2 e liberado com velocidade zero, então, em $t = 0$,

$$l_2 = C_1(1) + C_2(0) \quad \text{ou} \quad C_1 = l_2$$

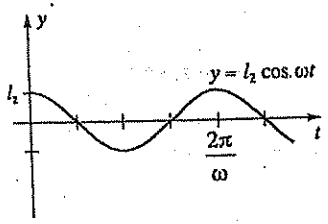


Figura 19.9 Movimento harmônico simples.

Como $\frac{dy}{dt} = -\omega C_1 \operatorname{sen} \omega t + \omega C_2 \cos \omega t$,

temos também (em $t = 0$)

$$0 = -\omega C_1(0) + \omega C_2(1) \quad \text{ou} \quad C_2 = 0$$

Logo, o deslocamento y do peso no instante t é

$$y = l_2 \cos \omega t$$

Este tipo de movimento já foi estudado no texto (ver Exemplo 3 da Seção 4.7). A *amplitude* (deslocamento máximo) é l_2, e o *período* (tempo de uma vibração completa) é $2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{m/k}$. A Figura 19.9 é um gráfico típico deste tipo de movimento.

EXEMPLO 2

Um peso de 8 Newtons faz com que uma mola se distenda 2 dm além de seu comprimento natural. O peso é então puxado mais 0,5 dm para baixo e liberado com uma velocidade inicial (para cima) de 6 dm/seg. Ache uma fórmula para o deslocamento do peso em um instante arbitrário t.

SOLUÇÃO

Pela lei de Hooke, $8 = k(0,2)$, ou $k = 40$. Se y é o deslocamento do peso a partir de sua posição de equilíbrio no instante t, então, de acordo com (19.15),

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{40}{m} y = 0$$

Como $W = mg$, segue-se que $m = W/g = \frac{8}{9,81} = 0,815$. Logo

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{40}{0,815} y = 0 \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + 49,08\, y = 0$$

Tal como na solução do Exemplo 1, a solução geral é

$$y = C_1 \cos 40t + C_2 \operatorname{sen} 40t$$

Em $t = 0$ temos $y = 0,05$, e, portanto,

$$C_1 = 0,05$$

Como $\frac{dy}{dt} = -40C_1 \operatorname{sen} 40t + 40C_2 \cos 40t$

e $dy/dt = -0,6$ em $t = 0$, obtemos

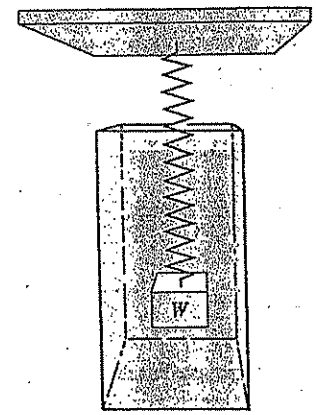


Figura 19.10 Força amortecedora.

$$C_2 = -\frac{0,6}{40} = 0,015$$

Logo, o deslocamento no instante t é dado por

$$y = 0,05 \cos 40t - 0,015 \operatorname{sen} 40t$$

Consideremos em seguida o movimento de uma mola em presença de uma força *amortecedora* (ou força de atrito), como no caso em que o peso se move em um fluido (ver Figura 19.10). A situação de um amortecedor de automóvel é uma boa ilustração. Admitiremos que a direção da força amortecedora seja oposta à do movimento e que a força seja diretamente proporcional à velocidade do peso. Assim, a força amortecedora é dada por $-c(dy/dt)$ para uma constante positiva c. De acordo com a segunda lei de Newton, a equação diferencial que descreve o movimento é

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky - c\frac{dy}{dt}$$

Dividindo por m e reagrupando os termos, obtemos a seguinte equação diferencial:

Vibração livre, amortecida (19.16)

$$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{c}{m}\frac{dy}{dt} + \frac{k}{m} y = 0}$$

EXEMPLO 3

Discuta o movimento de um peso de massa m em vibração livre, amortecida.

SOLUÇÃO

Tal como no Exemplo 1, seja $k/m = \omega^2$. Para simplificar as raízes da equação auxiliar, fazemos também $c/m = 2p$. Com esta notação, podemos escrever (19.16) como

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2p\frac{dy}{dt} + \omega^2 y = 0$$

As raízes da equação auxiliar $m^2 + 2pm + \omega^2 = 0$ são

$$\frac{-2p \pm \sqrt{4p^2 - 4\omega^2}}{2} = -p \pm \sqrt{p^2 - \omega^2}$$

As três possibilidades seguintes para as raízes correspondem aos três tipos de movimento do peso:

$$p^2 - \omega^2 > 0,\ p^2 - \omega^2 = 0,\ \text{ou}\ p^2 - \omega^2 < 0$$

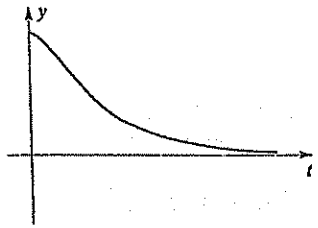


Figura 19.11 Vibração superamortecida.

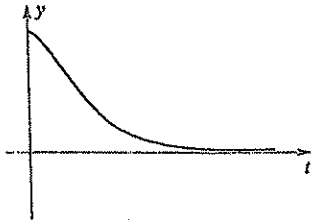


Figura 19.12 Vibração criticamente amortecida.

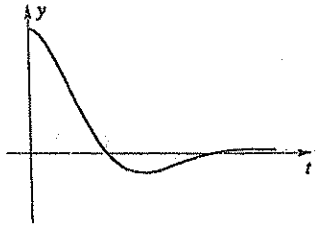


Figura 19.13 Vibração subamortecida.

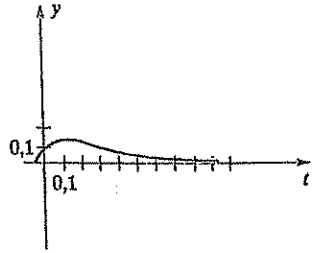


Figura 19.14

Classifiquemos como segue os três tipos de movimento.

Caso 1 $p^2 - \omega^2 > 0$ **(vibração superamortecida)**

As raízes da equação auxiliar são reais e distintas e, pelo Teorema (19.6), a solução geral da equação diferencial é

$$y = e^{-pt}(C_1 e^{\sqrt{p^2-\omega^2}\,t} + C_2 e^{-\sqrt{p^2-\omega^2}\,t})$$

No caso em estudo,

$$p^2 - \omega^2 = \frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m} = \frac{c^2 - 4mk}{4m^2} > 0$$

de modo que $c^2 > 4mk$. Isto mostra que c é em geral grande em comparação com k, isto é, a força amortecedora domina a força restauradora da mola, e o peso volta à posição de equilíbrio em tempo relativamente curto. Em particular, isto ocorre se o fluido tem viscosidade elevada, como no caso de óleos ou graxa.

A maneira como y tende para 0 depende das constantes C_1 e C_2 na solução geral. A Figura 19.11 exibe o gráfico de uma solução particular. (Ver também Figura 19.14.)

Caso 2 $p^2 - \omega^2 = 0$ **(vibração criticamente amortecida)**

Neste caso, a equação auxiliar tem uma raiz dupla $-p$ e, pelo Teorema (19.7), a solução geral da equação diferencial é

$$y = e^{-pt}(C_1 + C_2 t)$$

A Figura 19.12 ilustra o gráfico de um caso especial desta equação. O gráfico é análogo ao da Figura 19.11, todavia, decresce mais rapidamente para valores de x próximos de 0. Qualquer redução na força amortecedora conduz ao movimento oscilatório discutido no caso seguinte.

Caso 3 $p^2 - \omega^2 < 0$ **(vibração subamortecida)**

As raízes da equação auxiliar são complexas conjugadas $a \pm bi$, e, pelo Teorema (19.10), a solução geral da equação diferencial é

$$y = e^{-at}(C_1 \operatorname{sen} bt + C_2 \cos bt)$$

Neste caso, em geral c é menor do que k e a mola oscila enquanto voltando à posição de equilíbrio, conforme ilustrado na Figura 19.13. A vibração subamortecida pode ocorrer em um amortecedor já desgastado pelo uso.

EXEMPLO 4

Um peso de 8 N distende uma mola 0,3 m além de seu comprimento natural. Se o peso é puxado para baixo, a partir de sua posição de equilíbrio, com uma velocidade inicial de 0,6 m/seg, e se a força amortecedora é de $-9(dy/dt)$, estabeleça uma fórmula para o deslocamento y do peso em um instante arbitrário t.

SOLUÇÃO

Pela lei de Hooke, $8 = k(0,3)$ ou $k = 26,7$. A massa do peso é $m = W/g = (8)/(9,81) = 0,815$. Com a notação introduzida no Exemplo 3, temos

$$2p = \frac{c}{m} = \frac{9}{0,815} = 11 \quad \text{e} \quad \omega^2 = \frac{k}{m} \frac{26,7}{0,815} = 32,76$$

A equação (19.16) é $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 11\dfrac{dy}{dt} + 9,81y = 0$

As raízes da equação auxiliar são $-10,02$ e $-0,98$. Como as raízes são reais e distintas, o movimento é superamortecido (Caso 1 do Exemplo 3) e a solução geral da equação diferencial é

$$y = C_1 e^{-10,02t} + C_2 e^{-0,98t}$$

Fazendo $t = 0$, temos

$$0 = C_1 + C_2 \quad \text{ou} \quad C_2 = -C_1$$

Como $\dfrac{dy}{dt} = -10,02C_1 e^{-10,02t} - 0,98C_2 e^{-0,98t}$

temos, em $t = 0$,

$$0,6 = -10,02C_1 - 0,98C_2 = -10,02C_1 - 0,98(-C_1) = -9,04C_1$$

Conseqüentemente, $C_1 = -0,07$ e $C_2 = 0,07$. Assim, o deslocamento do peso no instante t é

$$y = -0,07e^{-10,02t} + 0,07e^{-0,98t}$$

O gráfico está esboçado na Figura 19.14. No Exercício 9, você deve determinar a força amortecedora que produz o amortecimento crítico.

EXERCÍCIOS 19.5

1 Um peso de 5 N distende uma mola 5 cm além de seu comprimento normal. Se o peso é levantado 4 cm e liberado com velocidade zero, determine uma fórmula para o deslocamento do peso no instante t. (Considere $g = 10$ m/s^2.)

2 Um peso de 10 kg distende uma mola 8 cm além de seu comprimento natural. Se o peso é puxado para baixo por 3 cm e liberado com uma velocidade (para baixo) de 6 cm/seg, determine uma fórmula para o deslocamento em um instante arbitrário t.

3 Uma massa de 100 g distende uma mola 2 dm além de seu comprimento natural. Se a massa é liberada de sua posição de equilíbrio com uma velocidade (para baixo) de 2 m/seg e se a força de atrito é $-5(dy/dt)$, estabeleça uma fórmula para o deslocamento do peso. (Considerar g = 10 m/s^2.)

4 Um peso de 6 libras está suspenso de uma mola cuja constante é 48 lb/pé. Inicialmente o peso tem uma velocidade para baixo de 4 pés/seg a partir de uma posição 5 polegadas abaixo do ponto de equilíbrio. Estabeleça uma fórmula para o deslocamento.

5 Um peso de 1,25 N distende uma mola 1 cm além de seu comprimento natural. Se o peso é puxado para baixo mais 2 cm e liberado com velocidade de zero em um meio onde a força amortecedora é $-(dy/dt)$, determine o deslocamento y no instante arbitrário t. (Considere g = 10 m/s^2.)

6 Uma mola se distende de 15 cm quando se lhe anexa um peso de 4 kg. Se o peso é liberado a partir da posição de equilíbrio com uma velocidade (para cima) de 0,3 m/seg e se a força amortecedora é $-4(dy/dt)$, estabeleça uma fórmula para o deslocamento y no instante t.

7 Descreva um sistema mola-peso que conduza à equação diferencial e às condições iniciais abaixo:

$$\frac{1}{4}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + 6y = 0$$

$$\text{em } t = 0, \quad y = -2 \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dt} = -1$$

8 Um peso de 2 kg distende uma mola por 0,3 m. Se o peso move-se em um meio cuja força amortecedora é $-c(dy/dt)$, $c > 0$, determine os valores de c para os quais o movimento é

(a) superamortecido

(b) criticamente amortecido

9 No Exemplo 4 desta seção, ache a força amortecedora que produz o amortecimento crítico.

10 Suponha um peso não-amortecido de massa m anexo a uma mola cuja constante é k. Uma força periódica externa dada por F sen αt está aplicada ao peso.

(a) Mostre que a equação diferencial que descreve o movimento do peso é

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = \frac{F}{m} \operatorname{sen} \alpha t$$

onde $\omega^2 = k/m$.

(b) Prove que o deslocamento y do peso é dado por

$$y = C_1 \cos \omega t + C_2 \operatorname{sen} \omega t + C \operatorname{sen} \alpha t$$

onde $C = F/[m(\omega^2 - \alpha^2)]$. Este tipo de movimento é chamado *vibração forçada*.

19.6 SOLUÇÕES EM SÉRIES

Conforme o Capítulo 11, uma série de potências $\sum a_n x^n$ define uma função f tal que

$$y = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots$$

para todo x no intervalo de convergência. Além disso, podemos obter representações em séries das derivadas de f, diferenciando cada termo. Assim,

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + 4 \cdot 3a_4 x^2 + \dots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

etc. As séries de potências podem também ser empregadas para resolver certas equações diferenciais. Neste caso, a solução costuma expressar-se como uma série infinita, e é chamada **solução em série** da equação diferencial.

EXEMPLO 1

Obtenha uma solução em série da equação diferencial $y' = 2xy$.

SOLUÇÃO

Se a solução é dada por $y = \sum a_n x^n$, então $y' = \sum n a_n x^{n-1}$, e a substituição na equação diferencial dá

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = 2x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{n+1}$$

É conveniente mudar a somatória à esquerda, de modo que apareça a mesma potência de x que na somatória à direita. Para tanto, substituímos n por $n + 2$ e começamos a somatória em $n = -1$. Assim,

$$\sum_{n=-1}^{\infty} (n+2)\, a_{n+2} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{n+1}$$

ou

$$a_1 + 2a_2 x + \dots + (n+2)a_{n+2} x^{n+1} + \dots = 2a_0 x + \dots + 2a_n x^{n+1} + \dots$$

Comparando coeficientes, vemos que $a_1 = 0$ e $(n+2)a_{n+2} = 2a_n$ se $n \geq 0$. Conseqüentemente, os coeficientes são dados por

$$a_1 = 0 \quad \text{e} \quad a_{n+2} = \frac{2}{n+2} a_n \quad \text{se} \quad n \geq 0$$

Em particular,

$$a_1 = 0, \; a_2 = a_0, \; a_3 = \tfrac{2}{3} a_1 = 0, \; a_4 = \tfrac{1}{2} a_2 = \tfrac{1}{2} a_0, \; a_5 = \tfrac{2}{5} a_3 = 0,$$

$$a_6 = \tfrac{1}{3} a_4 = \frac{1}{2 \cdot 3} a_0, \; a_7 = \tfrac{2}{7} a_5 = 0, \; a_8 = \tfrac{1}{4} a_6 = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} a_0$$

etc. Pode-se mostrar que, se n é ímpar, então $a_n = 0$, enquanto que $a_{2n} = (1n!)a_0$ para todo inteiro positivo n. A solução em série é, pois,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0\left(1 + x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \ldots + \frac{1}{n!}x^{2n} + \ldots\right)$$

Decorre de (19.8)(i) que a solução em série no Exemplo 1 pode ser escrita como $y = a_0 e^{(x^2)}$. Pode-se obter esta forma também diretamente de $y' = 2xy$ pelo método de separação das variáveis estudado na Seção 19.1. O objetivo do Exemplo 1, entretanto, é ilustrar as soluções em séries, e não achar a solução pela maneira mais simples. Em muitos casos, é impossível achar a soma de $\sum a_n x^n$ e a solução deve ser deixada em forma de série.

EXEMPLO 2

Resolva a equação diferencial $y'' - xy' - 2y = 0$.

SOLUÇÃO

Fazendo

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,\ y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},\ \text{e}\ y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

obtemos

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

ou $$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n$$

Ajustamos em seguida a somatória à esquerda de modo que apareça x^n em lugar de x^{n-2}. Para tanto, basta substituir n por $n + 2$ e começar a somatória em $n = 0$. Obtemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)a_n x^n$$

Comparando coeficientes, vemos que $(n + 2)(n + 1)a_{n+2} = (n + 2)a_n$, isto é,

$$a_{n+2} = \frac{1}{n+1}a_n$$

Fazendo $n = 0, 1, 2, \ldots, 7$ chegamos à seguinte forma dos coeficientes a_k:

$$a_2 = a_0 \qquad a_3 = \frac{1}{2}a_1$$
$$a_4 = \frac{1}{3}a_2 = \frac{1}{3}a_0 \qquad a_5 = \frac{1}{4}a_3 = \frac{1}{2\cdot 4}a_1$$
$$a_6 = \frac{1}{5}a_4 = \frac{1}{3\cdot 5}a_0 \qquad a_7 = \frac{1}{6}a_5 = \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6}a_1$$
$$a_8 = \frac{1}{7}a_6 = \frac{1}{3\cdot 5\cdot 7}a_0 \qquad a_9 = \frac{1}{8}a_7 = \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}a_1$$

Em geral,

$$a_{2n} = \frac{1}{1\cdot 3\ldots(2n-1)}a_0,\ a_{2n+1} = \frac{1}{2\cdot 4\ldots(2n)}a_1 = \frac{1}{2^n n!}a_1$$

A solução $y = \sum a_n x^n$ pode, pois, expressar-se como soma de duas série infinitas:

$$y = a_0\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1\cdot 3\ldots(2n-1)}x^{2n}\right] + a_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}x^{2n+1}$$

EXERCÍCIOS 19.6

Exercs. 1-12: Determine uma solução em série para a equação diferencial.

1 $y'' + y = 0$

2 $y'' - 4y = 0$

3 $y'' - 2xy = 0$

4 $y'' + 2xy' + y = 0$

5 $\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$

6 $\dfrac{d^2y}{dx^2} + x^2y = 0$

7 $(x + 1)y' = 3y$

8 $y' = 4x^3y$

9 $y'' - y = 5x$

10 $y'' - xy = x^4$

11 $(x^2 - 1)y'' + 6xy' + 4y = -4$

12 $y'' + y = e^x$

19.7 EXERCÍCIOS DE REVISÃO

Exercs. 1-34: Resolva a equação diferencial.

1 $xe^y\,dx - \csc x\,dy = 0$

2 $x\,dy - (x+1)y\,dx = 0$

3 $x(1 + y^2)\,dx + \sqrt{1 - x^2}\,dy = 0$

4 $y' + 4y = e^{-x}$

5 $y' + (\sec x)y = 2\cos x$

6 $(x^2y + x^2)\,dy + y\,dx = 0$

7 $y\,\mathrm{tg}\,x + y' = 2\sec x$

8 $y' + (\mathrm{tg}\,x)y = 3$

9 $y\sqrt{1 - x^2}y' = \sqrt{1 - y^2}$

10 $(2y + x^3)\,dx - x\,dy = 0$

11 $e^x\cos y\,dy - \mathrm{sen}^2 y\,dx = 0$

12 $(\cos x)y' + (\mathrm{sen}\,x)y = 3\cos^2 x$

13 $y' + (2\cos x)y = \cos x$

14 $y'' + y' - 6y = 0$

15 $y'' - 8y' + 16y = 0$

16 $y'' - 6y' + 25y = 0$

17 $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} = 0$

18 $\frac{d^2y}{dx^2} = y + \operatorname{sen} x$

19 $y'' - y = e^x \operatorname{sen} x$

20 $y'' - y' - 6y = e^{2x}$

21 $y' + y = e^{4x}$

22 $y'' + 2y' = 0$

23 $y'' - 3y' + 2y = e^{5x}$

24 $xe^y\,dx - (x+1)y\,dy = 0$

25 $xy' + y = (x-2)^2$

26 $\sec^2 y\,dx = \sqrt{1-x^2}\,dy - x\sec^2 y\,dx$

27 $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 7y = 0$

28 $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \csc x$

29 $e^{x+y}\,dx - \csc x\,dy = 0$

30 $y'' + 10y' + 25y = 0$

31 $\cot x\,dy = (y - \cos x)\,dx$

32 $y'' + y' + y = e^x \cos x$

33 $y' + y\csc x = \operatorname{tg} x$

34 $y'' - y' - 20y = xe^{-x}$

35 A população de pássaros de uma ilha experimenta um crescimento sazonal descrito por $dy/dt = (3 \operatorname{sen} 2\pi t)y$, onde t é o tempo em anos e $t = 0$ corresponde ao começo da primavera. A migração para dentro e para fora da ilha também é sazonal. A taxa de migração é dada por $M(t) = 2.000 \operatorname{sen} 2\pi t$ pássaros por ano. Logo, a equação diferencial completa para a população é

$$\frac{dy}{dt} = (3 \operatorname{sen} 2\pi t)y + 2.000 \operatorname{sen} 2\pi t$$

Resolva-a em relação a y, se em $t = 0$ a população é 500. Determine a população máxima.

36 Uma jarra contém 10 moles de gás A e, quando aquecida, a velocidade das moléculas de gás aumentam, formando-se um segundo gás B. Quando duas moléculas de gás A colidem, formam-se duas moléculas de gás B. A taxa dy/dt à qual se forma o gás B é proporcional a $(10 - y)^2$, o número de pares de moléculas de gás A. Estabeleça uma fórmula para y, se $y = 2$ moles após 30 segundos.

37 Em química, usa-se a notação $A + B \rightarrow Y$ para denotar a produção de uma substância Y em conseqüência da interação de duas substâncias A e B. Sejam a e b as quantidades iniciais de A e B, respectivamente. Se, no instante t, a concentração de Y é $y = f(t)$, então as concentrações de A e B são $a - f(t)$ e $b - f(t)$, respectivamente. Se a taxa à qual ocorre a produção de Y é dada por $dy/dt = k(a-y)(b-y)$ para uma constante positiva k, e se $f(0) = 0$, determine $f(t)$.

38 Seja $y = f(t)$ a população, no instante t, de uma coleção tal como insetos ou bactérias. Se a taxa de crescimento dy/dt é proporcional a y – isto é, se $dy/dt = cy$, c constante positiva – então $f(t) = f(0)e^{ct}$ (ver teorema 7.33)). Na maioria dos casos a taxa de crescimento depende de recursos disponíveis, como suprimento de alimentos e, à medida que t se torna grande, $f'(t)$ começa a decrescer. Para descrever este tipo de variação populacional, costuma-se usar a equação da *lei logística do crescimento* $dy/dt = y(c - by)$, com c e b constantes positivas.

(a) Se $f(0) = k$, determine $f(t)$.

(b) Ache $\lim_{t\to\infty} f(t)$.

(c) Mostre que $f'(t)$ é crescente se $f(t) < c/(2b)$ e decrescente se $f(t) > c/(2b)$.

(d) Esboce um gráfico típico de f. (Um gráfico deste tipo é chamado *curva logística*.)

39 Use uma equação diferencial para descrever todas as funções tais que a tangente em um ponto arbitrário $P(x, y)$ do gráfico seja perpendicular ao segmento de reta que une P à origem. Qual é o gráfico de uma solução típica da equação diferencial?

40 A equação diferencial seguinte ocorre no estudo do potencial eletrostático em regiões esféricas:

$$\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{dV}{d\theta}\right) = 0$$

Determine a solução $V(\theta)$ que satisfaça as condições iniciais $V(\pi/2) = 0$ e $V(\pi/4) = V_0$.

MAKRON *Books*

APÊNDICE

I INDUÇÃO MATEMÁTICA

O método de prova conhecido como **indução matemática** pode ser usado para mostrar que certas afirmações ou fórmulas são verdadeiras para todos os números inteiros positivos. Por exemplo, se n é um número inteiro positivo, denotemos por P_n a afirmação

$$(xy)^n = x^n y^n$$

onde x e y são números reais. Assim, P_1 representa a afirmação $(xy)^1 = x^1y^1$, P_2 denota $(xy)^2 = x^2y^2$, P_3 é $(xy)^3 = x^3y^3$ etc. É fácil mostrar que P_1, P_2 e P_3 são afirmações *verdadeiras*. Mas, como o conjunto de números inteiros positivos é infinito, torna-se impossível verificar a validade de P_n para todos os números inteiros positivos. A prova de que P_n é verdadeira requer o princípio seguinte.

Princípio da indução matemática

> Se a cada inteiro positivo n está associada uma afirmação P_n, então todas as afirmações P_n são verdadeiras, desde que sejam satisfeitas as duas condições seguintes:
>
> (i) P_1 é verdadeira.
>
> (ii) Se P_k é verdadeira para k inteiro positivo, então P_{k+1} também é verdadeira.

Para compreender melhor este princípio, consideremos uma coleção de afirmações

$$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n, \ldots$$

que satisfazem as condições (i) e (ii). Por (i), P_1 é verdadeira. Por (ii), sempre que uma afirmação P_k é verdadeira, a próxima afirmação P_{k+1} também é verdadeira. Como P_1 é verdadeira, P_2 também o é, por (ii). Mas, se P_2 é verdadeira, então, por (ii), vemos que também o será a próxima afirmação P_3. Mais uma

vez, se P_3 é verdadeira, então P_4 também o é. Continuando desta maneira, pode-se argüir que se n é um inteiro *particular*, então P_n é verdadeira, pois podemos usar a condição (ii) passo a passo, atingindo eventualmente P_n. Conquanto este tipo de raciocínio não *prove* efetivamente o princípio da indução matemática, certamente a torna plausível. O princípio é demonstrado em álgebra avançada por meio de postulados para os números inteiros.

Ao aplicar o princípio da indução matemática, sempre seguimos os dois passos abaixo:

Passo 1 Mostrar que P_1 é verdadeira.

Passo 2 Supor P_k verdadeira, e provar então P_{k+1} também o é.

O passo 2 costuma causar confusão. Note que não *provamos* que P_k é verdadeira (exceto para $k = 1$). Em lugar disso, mostramos que, se P_k é verdadeira, então a afirmação P_{k+1} também é verdadeira. Chamamos **hipótese de indução** a suposição de que P_k é verdadeira.

EXEMPLO 1

Prove que, para todo inteiro positivo n, a soma dos n primeiros inteiros positivos é

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

SOLUÇÃO

Se n é um inteiro positivo, denotamos por P_n a afirmação

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Veja alguns casos especiais de P_n:

Se $n = 1$, então P_1 é

$$1=\frac{1(1+1)}{2};\ \text{isto é, } 1=1$$

Se $n = 2$, então P_2 é

$$1+2=\frac{2(2+1)}{2};\ \text{isto é, } 3=3$$

Se $n = 3$, então P_3 é

$$1+2+3=\frac{3(3+1)}{2};\ \text{isto é, } 6=6$$

Se $n = 4$, então P_4 é

$$1+2+3+4=\frac{4(4+1)}{2};\ \text{isto é, } 10=10$$

É desnecessário (embora possa ser instrutivo) verificar a validade de P_n para vários valores de n, como fizemos. Basta aplicar o processo dos dois passos que antecede este exemplo. Procedemos, pois, como segue:

Passo 1 Fazendo $n = 1$ em P_n, então o membro esquerdo contém apenas o número 1 e o membro direito é $\frac{1(1+1)}{2}$, que também é igual a 1. Logo, P_1 é verdadeira.

Passo 2 Suponha que P_k é verdadeira. A hipótese de indução é

$$1+2+3+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

Nosso objetivo é mostrar que P_{k+1} é verdadeira – isto é,

$$1+2+3+\ldots(k+1)=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$$

Pela hipótese de indução, já temos uma fórmula para a soma dos k primeiros inteiros positivos. Logo, para achar uma fórmula para a soma dos $k + 1$ primeiros inteiros positivos, basta adicionar $(k + 1)$ a cada um dos membros da hipótese de indução P_k. Obtemos assim

$$1+2+3+\ldots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$

$$=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$$

Fatorando o numerador mediante grupamento de termos:

$$1+2+3+\ldots+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}.$$

Mostramos que P_{k+1} é verdadeira, e assim a prova por indução matemática está completa.

Seja j um inteiro positivo, e suponhamos que a cada inteiro $n \geq j$ esteja associada uma afirmação P_n. Por exemplo, se $j = 6$, então as afirmações são rotuladas P_6, P_7, P_8, ... O princípio da indução matemática pode ser estendido de forma a abranger também esta situação. Para provar que as afirmações P_n são verdadeiras para $n \geq j$, consideramos os dois passos seguintes, da mesma forma como fizemos para $n = 1$.

Extensão do princípio da indução matemática para P_k, $k \geq j$

(i)	Mostrar que P_j é verdadeira.
(ii)	Supor que P_k é verdadeira para $k \geq j$ e provar que P_{k+1} também é verdadeira.

EXEMPLO 2

Seja a um número real diferente de zero, tal que $a > -1$. Prove que

$$(1+a)^n > 1 + na$$

para todo inteiro $n \geq 2$.

SOLUÇÃO

Para cada inteiro positivo n, denotemos por P_n a desigualdade $(1+a)^n > 1 + na$. Note que P_1 é *falsa*, pois $(1+a)^1 = 1 + (1)(a)$. Todavia, podemos mostrar que P_n é verdadeira para $n \geq 2$, utilizando a extensão do princípio da indução com $j = 2$.

Passo 1 Notemos primeiro que $(1+a)^2 = 1 + 2a + a^2$. Como $a \neq 0$, temos $a^2 > 0$ e, portanto, $1 + 2a + a^2 > 1 + 2a$, ou $(1+a)^2 > 1 + 2a$. Logo, P_2 é verdadeira.

Passo 2 Suponhamos P_k verdadeira. Assim, a hipótese de indução é

$$(1+a)^k > 1 + ka$$

Queremos mostrar que P_{k+1} é verdadeira – isto é,

$$(1+a)^{k+1} > 1 + (k+1)a$$

Como $a > -1$, vemos que $1 + a > 0$. Logo, multiplicando por $1 + a$ ambos os membros da hipótese de indução, o sinal da desigualdade não se altera. Esta multiplicação conduz às seguintes desigualdades equivalentes:

$$(1+a)^k(1+a) > (1+ka)(1+a)$$

$$(1+a)^{k+1} > 1 + ka + a + ka^2$$

$$(1+a)^{k+1} > 1 + (k+1)a + ka^2$$

Como $ka^2 > 0$,

$$1 + (k+1)a + ka^2 > 1 + (k+1)a$$

e, portanto, $$(1+a)^{k+1} > 1 + (k+1)a.$$

Assim, P_{k+1} é verdadeira e a prova está completa.

EXERCÍCIOS

Exercs. 1-22: Prove que a afirmação é verdadeira para todo inteiro positivo n.

1 $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n+1)$

2 $1 + 4 + 7 + \ldots + (3n-2) = \dfrac{n(3n-1)}{2}$

3 $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$

4 $3 + 9 + 15 + \ldots + (6n-3) = 3n^2$

5 $2 + 7 + 12 + \ldots + (5n-3) = \frac{1}{2}n(5n-1)$

6 $2 + 6 + 18 + \ldots + 2 \cdot 3^{n-1} = 3^n - 1$

7 $1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \ldots + n \cdot 2^{n-1} = 1 + (n-1) \cdot 2^n$

8 $(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \ldots + (-1)^n = \dfrac{(-1)^n - 1}{2}$

9 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

10 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

11 $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$

12 $\dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dfrac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dfrac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

13 $3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^n = \frac{3}{2}(3^n - 1)$

14 $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$

15 $n < 2^n$

16 $1 + 2n \leq 3^n$

17 $1 + 2 + 3 + \ldots + n < \frac{1}{8}(2n+1)^2$

18 Se $0 < a < b$, então $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{n+1} < \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

19 3 é um fator de $n^3 - n + 3$.

20 2 é um fator de $n^2 + n$.

21 4 é um fator de $5^n - 1$.

22 9 é um fator de $10^{n+1} + 3 \cdot 10^n + 5$.

Exercs. 23-30: Ache o menor inteiro positivo j para o qual a afirmação é verdadeira. Use a extensão do princípio da indução matemática para provar que a fórmula é verdadeira para todo inteiro maior do que j.

23 $n + 12 \leq n^2$

24 $n^2 + 18 \leq n^3$

25 $5 + \log_2 n \leq n$

26 $n^2 \leq 2^n$

27 $2^n \leq n!$

28 $10^n \leq n^n$

29 $2n + 2 \leq 2^n$

30 $n \log_2 n + 20 \leq n^2$

31 Prove que se a é um inteiro real maior do que 1, então $a^n > 1$ para todo inteiro positivo n.

32 Prove que

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

para todo inteiro positivo n e todos os reais a e r com $r \neq 1$.

33 Prove que $a - b$ é um fator de $a^n - b^n$ para todo inteiro positivo n.
(*Sugestão*:
$a^{k+1} - b^{k+1} = a^k(a - b) + (a^k - b^k)b$.)

34 Prove que $a + b$ é um fator de $a^{2n-1} + b^{2n-1}$ para todo inteiro positivo n.

II TEOREMAS SOBRE LIMITES, DERIVADAS E INTEGRAIS

Este apêndice contém as demonstrações de alguns teoremas enunciados no texto. O sistema de numeração corresponde ao dos capítulos prévios.

Teorema da Unicidade para Limites

Se $f(x)$ tem um limite quando x tende para a, então o limite é único.

DEMONSTRAÇÃO

Suponhamos $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$ com $L_1 \neq L_2$.

Podemos admitir que $L_1 < L_2$. Escolhamos ϵ tal que $\epsilon < \frac{1}{2}(L_2 - L_1)$ e consideremos os intervalos abertos $(L_1 - \epsilon, L_1 + \epsilon)$ e $(L_2 - \epsilon, L_2 + \epsilon)$ na reta coordenada l' (veja Figura 1). Como $\epsilon < \frac{1}{2}(L_2 - L_1)$ estes dois intervalos não se interceptam. Pela definição (2.5), existe um $\delta_1 > 0$ tal que, sempre que x está em $(a - \delta_1, a + \delta_1)$ e $x \neq a$, então $f(x)$ está em $(L_1 - \epsilon, L_1 + \epsilon)$. Analogamente, existe $\delta_2 > 0$ tal que, sempre que x está em $(a - \delta_2, a + \delta_2)$ e $x \neq a$, então $f(x)$ está em $(L_2 - \epsilon, L_2 + \epsilon)$. Veja ilustração na Figura 1, com $\delta_1 < \delta_2$. Se escolhermos um x que esteja *simultaneamente* em $(a - \delta_1, a + \delta_1)$ e $(a - \delta_2, a + \delta_2)$, então $f(x)$ estará em $(L_1 - \epsilon, L_1 + \epsilon)$ e também em $(L_2 - \epsilon, L_2 + \epsilon)$, contrariamente ao

fato de que esses dois intervalos não se interceptam. Logo, nossa suposição original é falsa e, conseqüentemente, $L_1 = L_2$.

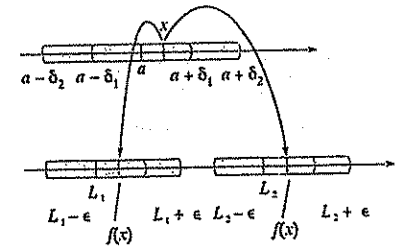


Figura 1

Teorema (2.8)

Se ambos $\lim_{x \to a} f(x)$ e $\lim_{x \to a} g(x)$ existem, então

(i) $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

(ii) $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$

(iii) $\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$, desde que $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

DEMONSTRAÇÃO Suponhamos $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M$.

(i) De acordo com a Definição (2.4), devemos mostrar que, para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

(1) Se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) + g(x) - (L + M)| < \epsilon$

Comecemos por escrever

(2) $|f(x) + g(x) - (L + M)| = |(f(x) - L) + (g(x) - M)|$.

Utilizando a *desigualdade do triângulo*

$|b + c| \leq |b| + |c|$

para quaisquer reais b e c, obtemos

$|(f(x) - L) + (g(x) - M)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M|$

Combinando a última desigualdade com (2), obtemos

(3) $|f(x) + g(x) - (L - M)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M|$

Como $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M$, os números $|f(x) - L|$ e $|g(x) - M|$ podem tornar-se arbitrariamente pequenos escolhendo-se x suficientemente próximo de a.

Em particular, eles podem tornar-se menores do que $\epsilon/2$. Assim, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

Se $0 < |x - a| < \delta_1$ então $|f(x) - L| < \epsilon/2$ e

(4) Se $0 < |x - a| < \delta_2$, então $|g(x) - M| < \epsilon/2$.

Denotando por δ o *menor* dos dois números δ_1 e δ_2, então, sempre que $0 < |x - a| < \delta$, as desigualdades em (4) envolvendo $f(x)$ e $g(x)$ são ambas verdadeiras. Conseqüentemente, se $0 < |x - a| < \delta$, então por (4) e (3),

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon/2$$

que é a afirmação (1).

(ii) Mostremos primeiro que, se k é uma função e

(5) Se $\lim_{x\to a} k(x) = 0$, então $\lim_{x\to a} f(x)k(x) = 0$.

Como $\lim_{x\to a} f(x) = L$, segue-se da definição (2.4) (com $\epsilon = 1$) que existe um $\delta_1 > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta_1$, então $|f(x) - L| < 1$ e daí também

$$|f(x)| = |f(x) - L + L| \leq |f(x) - L| + |L| < 1 + |L|$$

Conseqüentemente,

(6) Se $0 < |x - a| < \delta_1$, então $|f(x)k(x)| < (1 + |L|)\,|k(x)|$.

Como $\lim_{x\to a} k(x) = 0$, para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta_2 > 0$ tal que

(7) Se $0 < |x - a| < \delta_2$, então $|k(x) - 0| < \dfrac{\epsilon}{1 + |L|}$.

Denotando por δ o menor dos números δ_1 e δ_2, então, sempre que $0 < |x - a| < \delta$, ambas as desigualdades (6) e (7) são verdadeiras e, conseqüentemente,

$$|f(x)k(x)| < (1 + |L|) \cdot \frac{\epsilon}{1 + |L|}$$

Portanto,

Se $0 < |x - a| < \delta$, então $|f(x)\,k\,(x) - 0| < \epsilon$,

o que prova (5).

Consideremos em seguida a identidade

(8) $f(x)g(x) - LM = f(x)[g(x) - M] + M[f(x) - L]$.

Como $\lim_{x\to a}[g(x) - M] = 0$, segue-se de (5), com $k(x) = g(x) - M$, que $\lim_{x\to a} f(x)[g(x) - M] = 0$. Além disso, $\lim_{x\to a} M[f(x) - L] = 0$ e então, por (8), $\lim_{x\to a}[f(x)\,g(x) - LM] = 0$. A última afirmação é equivalente a $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = LM$.

(iii) Basta mostrar que $\lim_{x\to a} 1/g(x) = 1/M$, porque, feito isto, o resultado desejado pode ser obtido aplicando-se (ii) ao produto $f(x) \cdot 1/g(x)$. Consideremos

(9) $$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| = \left|\frac{M - g(x)}{g(x)M}\right| = \frac{1}{|M||g(x)|}\,|g(x) - M|$$

Como $\lim_{x\to a} g(x) = M$, existe um $\delta_1 > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta_1$, então $|g(x) - M| < |M|/2$. Conseqüentemente, para todos esses x,

$$\begin{aligned} |M| &= |g(x) + (M - g(x))| \\ &\leq |\,g(x)\,| + |\,M - g(x)\,| \\ &< |\,g(x) + |\,M\,|/2 \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\frac{|M|}{2} < |\,g(x)\,|, \text{ ou } \frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|M|}$$

Levando na equação (9) obtemos

(10) $\left|\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{M}\right| < \dfrac{2}{|M|^2}\,|\,g(x) - M\,|$, desde que $0 < |x - a| < \delta_1$

Novamente, como $\lim_{x\to a} g(x) = M$, segue-se que para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta_2 > 0$ tal que

(11) Se $0 < |x - a| < \delta_2$, então $|g(x) - M| < \dfrac{|M|^2}{2}\,\epsilon$.

Denotando por δ o menor dos números δ_1 e δ_2, então ambas as desigualdades (10) e (11) são verdadeiras. Assim,

Se $0 < |\,x - a\,| < \delta_2$, então $\left|\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{M}\right| < \epsilon$

o que significa que $\lim_{x\to a} 1/g(x) = 1/M$.

Teorema (2.13)

Se $a > 0$ e n é um inteiro positivo, ou se $a \leq 0$ e n é um inteiro positivo ímpar, então

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$$

DEMONSTRAÇÃO

Sejam $a > 0$ e n um inteiro positivo. Devemos mostrar que, para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

se $0 < |x - a| < \delta$, então $|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| < \epsilon$,

ou, equivalentemente,

(1) Se $-\delta < x - a < \delta$ e $x \neq a$, então $-\epsilon < \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a} < \epsilon$.

Basta provar (1) se $\epsilon < \sqrt[3]{a}$, porque, se existe δ sob esta condição, então o mesmo δ pode ser usado para qualquer valor *maior* que ϵ. Assim, no restante da prova, $\sqrt[n]{a} - \epsilon$ é considerado um número positivo menor do que ϵ. São equivalentes as desigualdades abaixo:

$$-\epsilon < \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a} < \epsilon$$

$$\sqrt[n]{a} - \epsilon < \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{a} + \epsilon$$

$$(\sqrt[n]{a} - \epsilon)^n < x < (\sqrt[n]{a} + \epsilon)^n$$

$$(\sqrt[n]{a} - \epsilon)^n - a < x - a < (\sqrt[n]{a} + \epsilon)^n - a$$

$$-[a - (\sqrt[n]{a} - \epsilon)^n] < x - a < (\sqrt[n]{a} + \epsilon)^n - a$$

Se δ denota o menor dos dois últimos números positivos $a - (\sqrt[n]{a} - \epsilon)^n$ e $(\sqrt[n]{a} + \epsilon)^n - a$, então, sempre que $-\delta < x - a < \delta$, a última desigualdade na relação é verdadeira e, por conseguinte, também o é a primeira. Isto nos dá (1).

Suponhamos em seguida $a < 0$ e n um inteiro positivo ímpar. Neste caso, $-a$ e $\sqrt[n]{-a}$ são positivos e, pela primeira parte da demonstração, podemos escrever

$$\lim_{-x \to -a} \sqrt[n]{-x} = \sqrt[n]{-a}$$

Assim, para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

se $0 < |-x - (-a)| < \delta$, então $|\sqrt[n]{-x} - \sqrt[n]{-a}| < \epsilon$.

ou, equivalentemente,

se $0 < |x - a| < \delta$, então $|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| < \epsilon$

As últimas desigualdades implicam $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$.

"Teorema do sanduíche" (2.15)

Seja $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ para todo x em um intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente para o próprio a.

Se $\lim_{x \to a} f(x) = L = \lim_{x \to a} g(x)$, então $\lim_{x \to a} h(x) = L$

DEMONSTRAÇÃO

Para todo $\epsilon > 0$ existem um $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

(1)
$$\text{Se } 0 < |x - a| < \delta_1, \text{ então } |f(x) - L| < \epsilon, \text{ e}$$
$$\text{Se } 0 < |x - a| < \delta_2, \text{ então } |g(x) - L| < \epsilon.$$

Denotando por δ o menor dos números δ_1 e δ_2, então, sempre que $0 < |x - a| < \delta$, ambas as desigualdades em (1) que envolvem ϵ são verdadeiras; isto é,

$$-\epsilon < f(x) - L < \epsilon \text{ e } -\epsilon < g(x) - L < \epsilon$$

Conseqüentemente, se $0 < |x - a| < \delta$, então $L - \epsilon < f(x)$ e $g(x) < L + \epsilon$. Como $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, se $0 < |x - a| < \delta$, então $L - \epsilon < h(x) < L + \epsilon$ ou, equivalentemente, $|h(x) - L| < \epsilon$, como queríamos provar.

Teorema (2.18)

Se k é um número racional positivo e c é um número real arbitrário, então

$$\lim_{x \to \infty} \frac{c}{x^k} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{c}{x^k} = 0,$$

desde que x^k seja sempre definido

DEMONSTRAÇÃO

Para aplicar (2.16) na demonstração de que $\lim_{x \to \infty} (c/x^k) = 0$, devemos mostrar que, para todo $\epsilon > 0$, existe um número positivo N tal que

$$\left| \frac{c}{x^k} - 0 \right| < \epsilon \text{ sempre que } x > N.$$

Se $c = 0$, qualquer $N > 0$ serve. Se $c \neq 0$, as quatro desigualdades seguintes são equivalentes para $x > 0$:

$$\left| \frac{c}{x^k} - 0 \right| < \epsilon, \quad \frac{|x|^k}{|c|} > \frac{1}{\epsilon}, \quad |x|^k > \frac{|c|}{\epsilon}, \quad x > \left(\frac{|c|}{\epsilon} \right)^{1/k}$$

A última desigualdade nos dá uma chave para a escolha de N. Fazendo $N = (|c|/\epsilon)^{1/k}$, vemos que, sempre que $x > N$, a quarta (e, assim, a primeira) desigualdade é verdadeira, que é o que queríamos mostrar. Demonstra-se de maneira análoga a segunda parte do teorema.

Teorema (2.24)

Se $\lim_{x \to c} g(x) = b$ e se f é contínua em b, então

$$\lim_{x \to c} f(g(x)) = f(b) = f\left(\lim_{x \to c} g(x) \right)$$

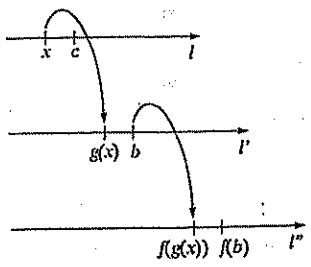


Figura 2

DEMONSTRAÇÃO

A função composta $f(g(x))$ pode ser representada geometricamente por meio de três retas reais l, l' e l'', conforme Figura 2. A cada coordenada x na reta l corresponde à coordenada $g(x)$ em l' e, por sua vez, $f(g(x))$ em l''. Queremos provar que $f(g(x))$ tem o limite $f(b)$ quando x tende para c. Em termos da Definição (2.4), devemos mostrar que, para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que

(1) se $0 < |x - c| < \delta$, então $|f(g(x)) - f(b)| < \epsilon$.

Comecemos considerando o intervalo $(f(b) - \epsilon, f(b) + \epsilon)$ em l'', exibido na Figura 3. Como f é contínua em b, $\lim_{x \to b} f(z) = f(b)$ e então, conforme ilustrado na figura, existe um número $\delta_1 > 0$ tal que

(2) se $|z - b| < \delta_1$, então $|f(z) - f(b)| < \epsilon$.

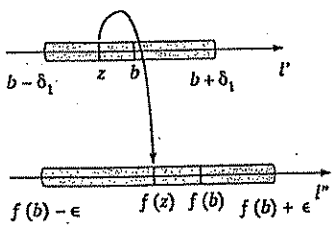


Figura 3

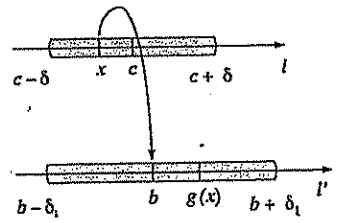


Figura 4

Em particular, fazendo $z = g(x)$ em (2), segue-se que

(3) se $|g(x) - b| < \delta_1$, então $|f(g(x)) - f(b)| < \epsilon$.

Em seguida, voltando nossa atenção para o intervalo $(b - \delta_1, b + \delta_1)$ em l' e usando a definição de $\lim_{x \to c} g(x) = b$, chegamos ao fato ilustrado na Figura 4 – que existe um $\delta > 0$ tal que

(4) se $0 < |x - c| < \delta$, então $|g(x) - b| < \delta_1$.

Finalmente, combinando (4) e (3), vemos que

se $0 < |x - c| < \delta$, então $|f(g(x)) - f(b)| < \epsilon$,

que é a conclusão (1) desejada.

Teorema (3.14a)

Se n é um inteiro positivo e $f(x) = x^{1/n}$, então

$$f'(x) = \frac{1}{n} x^{(1/n) - 1}$$

DEMONSTRAÇÃO

Pela Definição (3.5)

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^{1/n} - x^{1/n}}{h}$$

Consideremos a identidade

$$u^n - v^n = (u - v)(u^{n-1} + u^{n-2}v + \ldots + uv^{n-2} + v^{n-1})$$

Se $u \neq v$, então

$$\frac{u - v}{u^n - v^n} = \frac{1}{u^{n-1} + u^{n-2}v + \ldots + uv^{n-2} + v^{n-1}}$$

Fazendo $u = (x + h)^{1/n}$ e $v = x^{1/n}$, obtemos

$$\frac{(x + h)^{1/n} - x^{1/n}}{(x + h) - x} =$$

$$\frac{1}{(x + h)^{(n-1)/n} + (x + h)^{(n-2)/n} x^{1/n} + \ldots + (x + h)^{1/n} x^{(n-2)/n} + x^{(n-1)/n}}$$

Fazendo $h \to 0$, temos

$$f'(x) = \frac{1}{x^{(n-1)/n} + x^{(n-1)/n} + \ldots + x^{(n-1)/n} + x^{(n-1)/n}}$$

$$= \frac{1}{nx^{1-(1/n)}} = \frac{1}{n} x^{(1/n) - 1}$$

Regra da Cadeia (3.33)

Se $y = f(u)$, $u = g(x)$ e ambas as derivadas $\frac{dy}{du}$ e $\frac{du}{dx}$ existem, então a função composta definida por $y = f(g(x))$ tem derivada dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = f'(u)g'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

DEMONSTRAÇÃO

Se $y = f(x)$ e $\Delta x \neq 0$, então a diferença entre a derivada $f'(x)$ e a razão $\Delta y/\Delta x$ é pequena numericamente. Como esta diferença depende do tamanho de Δx, representá-la-emos pela notação $\eta(\Delta x)$. Assim, para cada $\Delta x \neq 0$,

$$\eta(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} + f'(x) \tag{1}$$

Note que $\eta(\Delta x)$ *não* representa o produto de η e Δx, mas afirma que η *é uma função* de Δx, cujos valores são dados por (1). Além disso, aplicando (3.27), vemos que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \eta(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) \right) = 0 \tag{2}$$

A função η foi definida apenas para valores de Δx diferentes de zero. Convém estender a definição de η de modo a incluir $\Delta x = 0$, fazendo $\eta(0) = 0$. Segue-se então de (2) que η *é contínua em 0*.

Multiplicando ambos os membros de (1) por Δx e redispondo os termos, obtemos

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \eta(\Delta x) \cdot \Delta x \tag{3}$$

o que é verdade, quer $\Delta x \neq 0$, quer $\Delta x = 0$. Como $f'(x)\,\Delta x = dy$, segue-se de (3) que

$$\Delta y - dy = \eta(\Delta x) \cdot \Delta x \tag{4}$$

Consideremos agora a situação mencionada na hipótese do teorema,

$$y = f(u) \quad \text{e} \quad u = g(x)$$

Se $g(x)$ é o domínio de f, então podemos escrever

$$y = f(u) = f(g(x))$$

isto é, y é uma função de x. Se dermos a x um incremento Δx, haverá um incremento Δu de u e, por sua vez, um incremento Δy de $y = f(u)$. Assim,

$$\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x)$$

$$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u)$$

Como dy/du existe, podemos utilizar (3) com u como variável independente, para escrever

$$\Delta y = f'(u)\,\Delta u + \eta(\Delta u) \cdot \Delta u \tag{5}$$

para uma função η de Δu tal que, por (2),

$$\lim_{\Delta u \to 0} \eta(\Delta u) = 0 \tag{6}$$

Além disso, η é contínua em $\Delta u = 0$ e (5) é verdadeira se $\Delta u = 0$. Dividindo ambos os membros de (5) por Δx, obtemos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \eta(\Delta u) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Tomando agora o limite quando Δx tende para zero e considerando que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} \quad \text{e} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}$$

vemos que

$$\frac{dy}{dx} = f'(u)\frac{du}{dx} + \lim_{\Delta x \to 0} \eta(\Delta u) \cdot \frac{du}{dx}$$

Como $f'(u) = dy/du$, podemos completar a prova mostrando que o limite indicado na última equação é 0. Para tanto, observemos que, como g é diferenciável, é contínua e então

$$\lim_{\Delta x \to 0} [g(x + \Delta x) - g(x)] = 0$$

ou, equivalentemente,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0$$

Em outras palavras, Δu tende para 0 quando Δx tende para 0. Considerando este fato, juntamente com (6), obtemos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \eta(\Delta u) = \lim_{\Delta u \to 0} \eta(\Delta u) = 0 \tag{7}$$

e o teorema está demonstrado. Pode-se estabelecer que $\lim_{\Delta x \to 0} \eta(\Delta u) = 0$ também por meio de um argumento do tipo $\epsilon - \delta$ utilizando (2.4).

Teorema (5.22)

Se f é integrável em $[a, b]$ e c é um número arbitrário, então cf é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

DEMONSTRAÇÃO

Se $c = 0$, o resultado decorre do Teorema (5.21). Suponhamos, portanto, $c \neq 0$. Como f é integrável, $\int_a^b f(x)\,dx = I$ para algum número I. Se P é uma partição de $[a, b]$, então cada soma de Riemann R_p para a função cf tem a forma $\Sigma_k\, cf(w_k)\,\Delta x_k$ tal que, para todo k, w_k é o $k^{\text{ésimo}}$ subintervalo $[x_{k-1}, x]$ de P. Queremos mostrar que, para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que, sempre que

$$(1) \qquad \left| \sum_k cf(w_k)\,\Delta x_k - cI \right| < \epsilon$$

para todo w_k em $[x_{k-1}, x_k]$. Fazendo $\epsilon' = \epsilon/|c|$, então, como f é integrável, existe um $\delta > 0$ tal que, sempre que $\|P\| < \delta$,

$$\left| \sum_k f(w_k)\,\Delta x_k - I \right| < \epsilon' = \frac{\epsilon}{|c|}$$

Multiplicando ambos os membros desta desigualdade por $|c|$, somos conduzido a (1). Logo

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_k cf(w_k)\,\Delta x_k = cI = c\int_a^b f(x)\,dx$$

Teorema (5.23)

Se f e g são integráveis em $[a, b]$, então $f + g$ é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

DEMONSTRAÇÃO

Por hipótese, existem números reais I_1 e I_2 tais que

$$\int_a^b f(x)\,dx = I_1 \quad \text{e} \quad \int_a^b g(x)\,dx = I_2$$

Seja P uma partição de $[a, b]$ e denotemos por R_p uma soma de Riemann arbitrária para $f + g$ associada a P; isto é,

$$(1) \qquad R_p = \sum_k [f(w_k) + g(w_k)]\,\Delta x_k$$

tal que w_k esteja em $[x_{k-1}, x_k]$ para todo k. Queremos mostrar que, para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que, sempre que $\|P\| < \delta$, $|R_p - (I_1 + I_2)| < \epsilon$. Aplicando o Teorema (5.11)(i), podemos escrever (1) na forma

$$R_p = \sum_k f(w_k)\,\Delta x_k + \sum_k g(w_k)\,\Delta x_k$$

Redispondo os termos e usando a desigualdade do triângulo, obtemos

$$(2) \qquad |R_p - (I_1 + I_2)| = \left| \left(\sum_k f(w_k)\,\Delta x_k - I_1 \right) + \left(\sum_k g(w_k)\,\Delta x_k - I_2 \right) \right|$$
$$\leq \left| \sum_k f(w_k)\,\Delta x_k - I_1 \right| + \left| \sum_k g(w_k)\,\Delta x_k - I_2 \right|$$

Pela integrabilidade de f e g, se $\epsilon' = \epsilon/2$, então existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que, sempre que $\|P\| < \delta_1$ e $\|P\| < \delta_2$,

$$(3) \qquad \left| \sum_k f(w_k)\,\Delta x_k - I_1 \right| < \epsilon' = \epsilon/2$$

e

$$\left| \sum_k g(w_k)\,\Delta x_k - I_2 \right| < \epsilon' = \epsilon/2$$

para todo em w_k $[x_{k-1}, x_k]$. Denotando por δ o menor dos números δ_1 e δ_2, sempre que $\|P\| < \delta$, ambas as desigualdades em (3) são verdadeiras e então, por (2),

$$|R_p - (I_1 + I_2)| < (\epsilon/2) + (\epsilon/2) = \epsilon$$

que é o que queríamos provar.

Teorema (5.24)

Se $a < c < b$ e se f é integrável em $[a, c]$ e em $[c, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

DEMONSTRAÇÃO

Por hipótese, existem números reais I_1 e I_2 tais que

$$(1) \qquad \int_a^c f(x)\,dx = I_1 \quad \text{e} \quad \int_c^b f(x)\,dx = I_2$$

Denotemos uma partição de $[a, c]$ por P_1, de $[c, b]$ por P_2 e de $[a, b]$ por P. Denotaremos por R_{P_1}, R_{P_2} e R_P, somas de Riemann arbitrárias associadas a P_1, P_2 e P, respectivamente. Devemos mostrar que para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que se $\|P\| < \delta$, então $|R_P - (I_1 + I_2)| < \epsilon$.

Fazendo $\epsilon' = \epsilon/4$, então, por (1) existem números positivos δ_1 e δ_2 tais que se $\|P_1\| < \delta_1$ e $\|P_2\| < \delta_2$, então

$$(2) \qquad |R_{P_1} - I_1| < \epsilon' = \epsilon/4 \quad \text{e} \quad |R_{P_2} - I_2| < \epsilon' = \epsilon/4$$

Denotando por δ o menor dos números δ_1 e δ_2, então ambas as desigualdades em (2) são verdadeiras sempre que $\|P\| < \delta$. Além disso, como f é integrável em $[a, c]$ e $[c, b]$, é limitada em ambos os intervalos e, então, existe um número M tal que $|f(x)| \le M$ para todo x em $[a, b]$. Admitiremos agora que δ tenha sido escolhido de modo que, além da exigência prévia, também tenhamos $\delta < \epsilon/(4M)$.

Seja P uma partição de $[a, b]$ tal que $\|P\| < \delta$. Se os números que definem P são

$$a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$$

então há um único intervalo semi-aberto da forma $(x_{d-1}, x_d]$ que contém c. Se $R_P = \Sigma_{k=1}^{n} f(w_k)\,\Delta x_k$, podemos escrever

$$(3) \qquad R_P = \sum_{k=1}^{d-1} f(w_k)\,\Delta x_k + f(w_d)\,\Delta x_d + \sum_{k=d+1}^{n} f(w_k)\,\Delta x_k.$$

Denotemos por P_1 a partição de $[a, c]$ determinada por $\{a, x_1, \ldots, x_{d-1}, c\}$, por P_2 a partição de $[c, b]$ determinada por $\{c, x_d, \ldots, x_{n-1}, b\}$, e consideremos as somas de Riemann

$$(4) \qquad \begin{aligned} R_{P_1} &= \sum_{k=1}^{d-1} f(w_k)\,\Delta x_k + f(c)(c - x_{d-1}) \\ R_{P_2} &= f(c)(x_d - c) + \sum_{k=d+1}^{n} f(w_k)\,\Delta_k \end{aligned}$$

Pela desigualdade do triângulo e por (2), obtemos

$$|(R_{P_1} + R_{P_2}) - (I_1 + I_2)| = |(R_{P_1} - I_1) + (R_{P_2} - I_2)|$$

$$(5) \qquad \le |R_{P_1} - I_1| + |R_{P_2} - I_2|$$

$$< \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2}$$

Segue-se de (3) e (4) que

$$|R_P - (R_{P_1} + R_{P_2})| = |f(w_d) - f(c)|\,\Delta x_d$$

Empregando a desigualdade do triângulo e a escolha de δ vem

$$(6) \qquad \begin{aligned} |R_P - (R_{P_1} + R_{P_2})| &\le (|f(w_d)| + |f(c)|)\,\Delta x_d \\ &\le (M + M)[\epsilon/(4M)] = \epsilon/2, \end{aligned}$$

desde que $\|P\| < \delta$. Escrevendo

$$\begin{aligned} |R_P - (I_1 + I_2)| &= |R_P - (R_{P_1} + R_{P_2}) + (R_{P_1} + R_{P_2}) - (I_1 + I_2)| \\ &\le |R_P - (R_{P_1} + R_{P_2})| + |(R_{P_1} + R_{P_2}) - (I_1 + I_2)| \end{aligned}$$

segue-se então de (6) e (5) que, sempre que $\|P\| < \delta$,

$$|R_P - (I_1 + I_2)| < (\epsilon/2) + (\epsilon/2) = \epsilon$$

para toda soma de Riemann R_P. Isto completa a demonstração.

Teorema (5.26)

> Se f é integrável em $[a, b]$ e $f(x) \ge 0$ para todo x em $[a, b]$, então
>
> $$\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$$

DEMONSTRAÇÃO

Daremos uma demonstração indireta. Seja $\int_a^b f(x)\,dx = I$ e *suponhamos* que $I < 0$. Consideremos uma partição qualquer P de $[a, b]$ e seja $R_P = \Sigma_k f(w_k)\,\Delta x_k$, uma soma de Riemann arbitrária associada a P. Como $f(w_k) \ge 0$ para todo w_k em $[x_{k-1}, x_k]$, segue-se que $R_P \ge 0$. Fazendo $\epsilon = -(I/2)$, então, de acordo com a Definição (5.15), sempre que $\|P\|$ for suficientemente pequeno,

$$|R_P - I| < \epsilon = -\frac{I}{2}$$

Segue-se que $R_p < I - (I/2) = I/2 < 0$, uma contradição. Portanto, a suposição $I < 0$ é falsa e, então, $I \geq 0$.

Teorema (7.6)

> Se f é contínua e crescente em $[a, b]$, então f tem uma função inversa f^{-1} que é contínua e crescente em $[f(a), f(b)]$.

DEMONSTRAÇÃO

Se f é crescente, então f é um-a-um e, então, f^{-1} existe. Para provar que f^{-1} é crescente, devemos mostrar que se $w_1 < w_2$ em $[f(a), f(b)]$, então $f^{-1}(w_1) < f^{-1}(w_2)$ em $[a, b]$. Daremos uma prova indireta deste fato. *Suponhamos* $f^{-1}(w_2) \leq f^{-1}(w_1)$.

Como f é crescente, segue-se que $f(f^{-1}(w_2)) \leq f(f^{-1}(w_1))$ e, então, $w_2 \leq w_1$, o que é uma contradição. Conseqüentemente, $f^{-1}(w_1) < f^{-1}(w_2)$.

Provamos em seguida que f^{-1} é contínua em $[f(a), f(b)]$. Lembremos que $y = f(x)$ se e somente se $x = f^{-1}(y)$. Em particular, se y_0 está em um intervalo aberto $(f(a), f(b))$, denotemos por x_0 o número no intervalo (a, b) tal que $y_0 = f(x_0)$, ou, equivalentemente, $x_0 = f^{-1}(y)$. Queremos mostrar que

$$\text{(1)} \qquad \lim_{y \to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) = x_0$$

A Figura 5 exibe uma representação geométrica de f e de sua inversa f^{-1}. O domínio $[a, b]$ de f é representado por pontos no eixo-x e o domínio $[f(a), f(b)]$ de f^{-1}, por pontos no eixo-y.

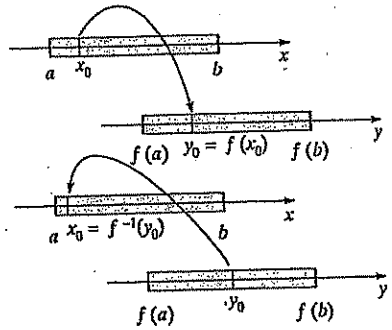


Figura 5

As setas de um eixo para o outro representam valores funcionais. Para provar (1), consideremos um intervalo arbitrário $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ para $\epsilon > 0$. Basta achar um intervalo $(y_0 - \delta, y_0 + \delta)$, do tipo esboçado na Figura 6, tal que, quando y está em $(y_0 - \delta, y_0 + \delta)$, $f^{-1}(y)$ está em $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$. Podemos admitir que $x_0 - \epsilon$ e $x_0 + \epsilon$ estejam em $[a, b]$. Conforme a Figura 7, sejam $\delta_1 = y_0 - f(x_0 - \epsilon)$ e $\delta_2 = f(x_0 + \epsilon) - y_0$. Como f define uma correspondência um-a-um entre os números nos intervalos $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ e $(y_0 - \delta_1, y_0 + \delta_2)$, os valores funcionais de f^{-1} que correspondem a números em $(y_0 - \delta_1, y_0 + \delta_2)$ devem estar em $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$. Denotemos por δ o menor dos números δ_1 e δ_2. Segue-se que, se y está em $(y_0 - \delta, y_0 + \delta)$, então $f^{-1}(y)$ está em $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$, que é o que queríamos provar.

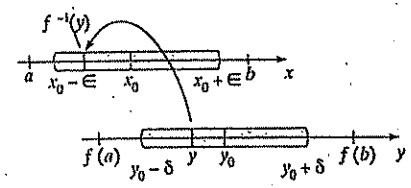


Figura 6

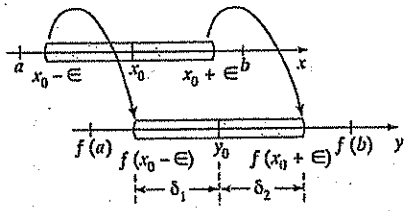


Figura 7

A continuidade nos pontos extremos $f(a)$ e $f(b)$ do domínio de f^{-1} pode ser provada de maneira análoga, utilizando-se limites laterais.

Teorema (17.35)

> Se $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$ é uma transformação de coordenadas, então
>
> $$\iint_R F(x, y)\,dx\,dy = \pm \iint_S F(f(u, v), g(u, v)) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\,du\,dv$$
>
> À medida que (u, v) percorre a fronteira K de S uma vez no sentido positivo, o ponto correspondente (x, y) percorre a fronteira C de R uma vez, seja no sentido positivo (quando é escolhido o sinal "mais"), seja no sentido negativo (quando é escolhido o sinal "menos").

DEMONSTRAÇÃO

Comecemos escolhendo $G(x, y)$ tal que $\partial G/\partial x = F$. Aplicando o teorema de Green (18.19) com $G = N$, obtemos

$$(1) \qquad \iint_R F(x, y)\,dx\,dy = \iint_R \frac{\partial}{\partial x}[G(x, y)]\,dx\,dy = \oint_C G(x,\ y)\,dy$$

Suponha que a curva K no plano uv admita uma parametrização

$$u = \phi(t),\ v = \psi(t);\quad a \le t \le b$$

Por nossas hipóteses sobre a transformação, as equações paramétricas para a curva C no plano xy são

$$(2) \qquad x = f(u, v) = f(\phi(t), \psi(t))$$
$$y = g(u, v) = g(\phi(t), \psi(t))$$

para $a \le t \le b$. Podemos, portanto, calcular a integral curvilínea $\oint_c G(x,\ y)\,dy$ em (1) por meio de substituições formais para x e y. Para simplificar a notação, seja

$$H(t) = G[f(\phi(t), \psi(t)), g(\phi(t), \psi(t))]$$

Aplicando a regra da cadeia a y em (2) obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dt} = \frac{\partial y}{\partial u}\phi'(t) + \frac{\partial y}{\partial v}\psi'(t).$$

Conseqüentemente,

$$\oint_c G(x, y)\,dy = \oint_c H(t)\frac{dy}{dt}\,dt$$
$$= \int_a^b H(t)\left[\frac{\partial y}{\partial u}\phi'(t) + \frac{\partial y}{\partial v}\psi'(t)\right]dt$$

Como $du = \phi'(t)\,dt$ e $dv = \psi'(t)\,dt$, podemos considerar a última integral curvilínea como uma integral curvilínea ao longo da curva K no plano-uv. Assim,

$$(3) \qquad \oint_c G(x, y)\,dy = \pm \oint_k G\frac{\partial y}{\partial u}\,du + G\frac{\partial y}{\partial v}\,dv$$

Por simplicidade, usamos G como abreviação de $G(f(u, v), g(u, v))$. Para a escolha do sinal + ou do sinal −, fazemos t variar de a a b e observamos se (x, y) descreve C no mesmo sentido ou no sentido oposto, respectivamente, em que (u, v) descreve K.

A integral curvilínea à direita de (3) tem a forma

$$\oint_K M\,du + N\,dv$$

com $\qquad M = G\frac{\partial y}{\partial u}$ e $N = G\frac{\partial y}{\partial v}$

Aplicando o teorema de Green, obtemos

$$\oint_K M\,du + N\,dv$$
$$= \iint_S \left(\frac{\partial N}{\partial u} - \frac{\partial M}{\partial v}\right)du\,dv$$
$$= \iint_S \left(G\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - G\frac{\partial^2 y}{\partial v\,\partial u} - \frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)du\,dv$$
$$= \iint_S \left[\left(\frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\frac{\partial y}{\partial v} - \left(\frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right)\frac{\partial y}{\partial u}\right]du\,dv$$
$$= \iint_S \frac{\partial G}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)du\,dv$$

Levando em conta o fato de que $\partial G/\partial x = F(x, y)$, juntamente com a Definição (17.34) do Jacobiano, temos

$$\oint_K M\,du + N\,dv = \iint_S f(f(u, v), g(u, v))\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\,du\,dv$$

Combinando esta fórmula com (1) e (3), obtemos o resultado desejado.

III TABELAS

Tábua A Funções Trigonométricas

Graus	Radianos	sen	tg	cot	cos		
0	0,000	0,000	0,000		1,000	1,571	90
1	0,017	0,017	0,017	57,29	1,000	1,553	89
2	0,035	0,035	0,035	28,64	0,999	1,536	88
3	0,052	0,052	0,052	19,081	0,999	1,518	87
4	0,070	0,070	0,070	14,301	0,998	1,501	86
5	0,087	0,087	0,087	11,430	0,996	1,484	85
6	0,105	0,105	0,105	9,514	0,995	1,466	84
7	0,122	0,122	0,123	8,144	0,993	1,449	83
8	0,140	0,139	0,141	7,115	0,990	1,431	82

Graus	Radianos	sen	tg	cot	cos		
9	0,157	0,156	0,158	6,314	0,988	1,414	81
10	0,175	0,174	0,176	5,671	0,985	1,396	80
11	0,192	0,191	0,194	5,145	0,982	1,379	79
12	0,209	0,208	0,213	4,705	0,978	1,361	78
13	0,227	0,225	0,231	4,331	0,974	1,344	77
14	0,244	0,242	0,249	4,011	0,970	1,326	76
15	0,262	0,259	0,268	3,732	0,966	1,309	75
16	0,279	0,276	0,287	3,487	0,961	1,292	74
17	0,297	0,292	0,306	3,271	0,956	1,274	73
18	0,314	0,309	0,325	3,078	0,951	1,257	72
19	0,332	0,326	0,344	2,904	0,946	1,239	71
20	0,349	0,342	0,364	2,747	0,940	1,222	70
21	0,367	0,358	0,384	2,605	0,934	1,204	69
22	0,384	0,375	0,404	2,475	0,927	1,187	68
23	0,401	0,391	0,424	2,356	0,921	1,169	67
24	0,419	0,407	0,445	2,246	0,914	1,152	66
25	0,436	0,423	0,466	2,144	0,906	1,134	65
26	0,454	0,438	0,488	2,050	0,899	1,117	64
27	0,471	0,454	0,510	1,963	0,891	1,100	63
28	0,489	0,469	0,532	1,881	0,883	1,082	62
29	0,506	0,485	0,554	1,804	0,875	1,065	61
30	0,524	0,500	0,577	1,732	0,866	1,047	60
31	0,541	0,515	0,601	1,664	0,857	1,030	59
32	0,559	0,530	0,625	1,600	0,848	1,012	58
33	0,576	0,545	0,649	1,540	0,839	0,995	57
34	0,593	0,559	0,675	1,483	0,829	0,977	56
35	0,611	0,574	0,700	1,428	0,819	0,960	55
36	0,628	0,588	0,727	1,376	0,809	0,942	54
37	0,646	0,602	0,754	1,327	0,799	0,925	53
38	0,663	0,616	0,781	1,280	0,788	0,908	52
39	0,681	0,629	0,810	1,235	0,777	0,890	51
40	0,698	0,643	0,839	1,192	0,766	0,873	50
41	0,716	0,656	0,869	1,150	0,755	0,855	49

UFPU/BIBLIOTECA/PRAI

Graus	Radianos	sen	tg	cot	cos		
42	0,733	0,669	0,900	1,111	0,743	0,838	48
43	0,750	0,682	0,933	1,072	0,731	0,820	47
44	0,768	0,695	0,966	1,036	0,719	0,803	46
45	0,785	0,707	1,000	1,000	0,707	0,785	45
	cos	cot	tg	sen	Radianos	Graus	

Tábua B Funções Exponenciais

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
0,00	1,0000	1,0000	2,50	12,182	0,0821
0,05	1,0513	0,9512	2,60	13,464	0,0743
0,10	1,1052	0,9048	2,70	14,880	0,0672
0,15	1,1618	0,8607	2,80	16,445	0,0608
0,20	1,2214	0,8187	2,90	18,174	0,0550
0,25	1,2840	0,7788	3,00	20,086	0,0498
0,30	1,3499	0,7408	3,10	22,198	0,0450
0,35	1,4191	0,7047	3,20	24,533	0,0408
0,40	1,4918	0,6703	3,30	27,113	0,0369
0,45	1,5683	0,6376	3,40	29,964	0,0334
0,50	1,6487	0,6065	3,50	33,115	0,0302
0,55	1,7333	0,5769	3,60	36,598	0,0273
0,60	1,8221	0,5488	3,70	40,447	0,0247
0,65	1,9155	0,5220	3,80	44,701	0,0224
0,70	2,0138	0,4966	3,90	49,402	0,0202
0,75	2,1170	0,4724	4,00	54,598	0,0183
0,80	2,2255	0,4493	4,10	60,340	0,0166
0,85	2,3396	0,4274	4,20	66,686	0,0150
0,90	2,4596	0,4066	4,30	73,700	0,0136
0,95	2,5857	0,3867	4,40	81,451	0,0123
1,00	2,7183	0,3679	4,50	90,017	0,0111
1,10	3,0042	0,3329	4,60	99,484	0,0101
1,20	3,3201	0,3012	4,70	109,95	0,0091
1,30	3,6693	0,2725	4,80	121,51	0,0082

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
1,40	4,0552	0,2466	4,90	134,29	0,0074
1,50	4,4817	0,2231	5,00	148,41	0,0067
1,60	4,9530	0,2019	6,00	403,43	0,0025
1,70	5,4739	0,1827	7,00	1096,6	0,0009
1,80	6,0496	0,1653	8,00	2981,0	0,0003
1,90	6,6859	0,1496	9,00	8103,1	0,0001
2,00	7,3891	0,1353	10,00	22026,0	0,00005
2,10	8,1662	0,1225			
2,20	9,0250	0,1108			
2,30	9,9742	0,1003			
2,40	11,0232	0,0907			

Tábua C Logaritmos Naturais

n	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0*		7,697	8,391	8,796	9,084	9,307	9,489	9,643	9,777	9,895
1	0,000	0,095	0,182	0,262	0,336	0,405	0,470	0,531	0,588	0,642
2	0,693	0,742	0,788	0,833	0,875	0,916	0,956	0,993	1,030	1,065
3	1,099	1,131	1,163	1,194	1,224	1,253	1,281	1,308	1,335	1,361
4	1,386	1,411	1,435	1,459	1,482	1,504	1,526	1,548	1,569	1,589
5	1,609	1,629	1,649	1,668	1,686	1,705	1,723	1,740	1,758	1,775
6	1,792	1,808	1,825	1,841	1,856	1,872	1,887	1,902	1,917	1,932
7	1,946	1,960	1,974	1,988	2,001	2,015	2,028	2,041	2,054	2,067
8	2,079	2,092	2,104	2,116	2,128	2,140	2,152	2,163	2,175	2,186
9	2,197	2,208	2,219	2,230	2,241	2,251	2,262	2,272	2,282	2,293
10	2,303	2,313	2,322	2,332	2,342	2,351	2,361	2,370	2,380	2,389

* Subtrair 10 se $n < 1$; por exemplo, $\ln 0{,}3 = 8{,}796 - 10 = -1{,}204$

IV TÁBUA DE INTEGRAIS

Formas básicas

1 $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

2 $\int u^n\,du = \frac{1}{n+1}u^{n+1} + C, \quad n \neq -1$

3 $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

4 $\int e^u\,du = e^u + C$

5 $\int a^u\,du = \frac{1}{\ln a}a^u + C$

6 $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$

7 $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$

8 $\int \sec^2 u\,du = \operatorname{tg} u + C$

9 $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$

10 $\int \sec u \operatorname{tg} u\,du = \sec u + C$

11 $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$

12 $\int \operatorname{tg} u\,du = -\ln|\cos u| + C$

13 $\int \cot u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$

14 $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \operatorname{tg} u| + C$

15 $\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + C$

16 $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{arcsen}\frac{u}{a} + C$

17 $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C$

18 $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\frac{u}{a} + C$

19 $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C$

20 $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln|u + \sqrt{u^2-a^2}| + C$

Formas que envolvem $\sqrt{a^2+u^2}$

21 $\int \sqrt{a^2+u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2+u^2} + \frac{a^2}{2}\ln|u + \sqrt{a^2+u^2}| + C$

22 $\int u^2\sqrt{a^2+u^2}\,du = \frac{u}{8}(a^2+2u^2)\sqrt{a^2+u^2} - \frac{a^4}{8}\ln|u + \sqrt{a^2+u^2}| + C$

23 $\int \frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u}\,du = \sqrt{a^2+u^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+u^2}}{u}\right| + C$

24 $\int \frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u} + \ln|u + \sqrt{a^2+u^2}| + C$

25 $\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \ln|u + \sqrt{a^2+u^2}| + C$

26 $\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \frac{u}{2}\sqrt{a^2+u^2} - \frac{a^2}{2}\ln|u + \sqrt{a^2+u^2}| + C$

27 $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2+u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{a^2+u^2}+a}{u}\right| + C$

28 $\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2+u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2+u^2}}{a^2u} + C$

29 $\int \frac{du}{(a^2+u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2+u^2}} + C$

Formas que envolvem $\sqrt{a^2-u^2}$

30 $\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{u}{a} + C$

31 $\int u^2\sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2-a^2)\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^4}{8}\operatorname{arcsen}\frac{u}{a} + C$

32 $\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u}\,du = \sqrt{a^2-u^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right| + C$

33 $\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u^2}\,du = -\frac{1}{u}\sqrt{a^2-u^2} - \operatorname{arcsen}\frac{u}{a} + C$

34 $\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{u}{a} + C$

35 $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right| + C$

36 $\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{1}{a^2u}\sqrt{a^2-u^2} + C$

37 $\int (a^2-u^2)^{3/2}\,du = -\frac{u}{8}(2u^2-5a^2)\sqrt{a^2-u^2} + \frac{3a^4}{8}\operatorname{arcsen}\frac{u}{a} + C$

38 $\int \frac{du}{(a^2-u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2-u^2}} + C$

Formas que envolvem $\sqrt{u^2-a^2}$

39 $\int \sqrt{u^2-a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln|u+\sqrt{u^2-a^2}| + C$

40 $\int u^2\sqrt{u^2-a^2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2-a^2)\sqrt{u^2-a^2} - \frac{a^4}{8}\ln|u+\sqrt{u^2-a^2}| + C$

41 $\int \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u}\,du = \sqrt{u^2-a^2} - a\operatorname{arccos}\frac{a}{u} + C$

42 $\int \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u} + \ln|u+\sqrt{u^2-a^2}| + C$

43 $\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{u}{2}\sqrt{u^2-a^2} + \frac{a^2}{2}\ln|u+\sqrt{u^2-a^2}| + C$

44 $\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{a^2u} + C$

45 $\int \frac{du}{(u^2-a^2)^{3/2}} = -\frac{u}{a^2\sqrt{u^2-a^2}} + C$

46 $\int \frac{u^2\,du}{(u^2-a^2)^{3/2}} = \frac{-u}{\sqrt{u^2-a^2}} + \ln|u+\sqrt{u^2-a^2}| + C$

Formas que envolvem $a+bu$

47 $\int \frac{u\,du}{a+bu} = \frac{1}{b^2}(a+bu-a\ln|a+bu|) + C$

48 $\int \frac{u^2\,du}{a+bu} = \frac{1}{2b^3}[(a+bu)^2 - 4a(a+bu) + 2a^2\ln|a+bu|] + C$

49 $\int \frac{du}{u(a+bu)} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{u}{a+bu}\right| + C$

50 $\int \frac{du}{u^2(a+bu)} = -\frac{1}{au} + \frac{b}{a^2}\ln\left|\frac{a+bu}{u}\right| + C$

51 $\int \frac{u\,du}{(a+bu)^2} = \frac{a}{b^2(a+bu)} + \frac{1}{b^2}\ln|a+bu| + C$

52 $\int \frac{du}{u(a+bu)^2} = \frac{1}{a(a+bu)} - \frac{1}{a^2}\ln\left|\frac{a+bu}{u}\right| + C$

53 $\int \frac{u^2\,du}{(a+bu)^2} = \frac{1}{b^3}\left(a+bu - \frac{a^2}{a+bu} - 2a\ln|a+bu|\right) + C$

54 $\int u\sqrt{a+bu}\,du = \frac{2}{15b^2}(3bu-2a)(a+bu)^{3/2} + C$

55 $\int \frac{u\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{3b^2}(bu-2a)\sqrt{a+bu} + C$

56 $\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{15b^3}(8a^2+3b^2u^2-4abu)\sqrt{a+bu} + C$

57 $\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{\sqrt{a+bu}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bu}+\sqrt{a}}\right| + C$, se $a>0$

$= \frac{2}{\sqrt{-a}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a+1}{-a}} + C$, se $a<0$

58 $\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u}\,du = 2\sqrt{a+bu} + a\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$

59 $\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{a+bu}}{u} + \frac{b}{2}\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$

60 $\int u^n\sqrt{a+bu}\,du = \frac{2}{b(2n+3)}\left[u^n(a+bu)^{3/2} - na\int u^{n-1}\sqrt{a+bu}\,du\right]$

61 $\int \frac{u^n\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2u^n\sqrt{a+bu}}{b(2n+1)} - \frac{2na}{b(2n+1)}\int \frac{u^{n-1}\,du}{\sqrt{a+bu}}$

62 $\int \frac{du}{u^n\sqrt{a+bu}} = -\frac{\sqrt{a+bu}}{a(n-1)u^{n-1}} - \frac{b(2n-3)}{2a(n-1)}\int \frac{du}{u^{n-1}\sqrt{a+bu}}$

Formas trigonométricas

63 $\int \operatorname{sen}^2 u\,du = \frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C$

64 $\int \cos^2 u\,du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C$

65 $\int \operatorname{tg}^2 u\,du = \operatorname{tg} u - u + C$

66 $\int \operatorname{cot}^2 u\,du = -\operatorname{cot} u - u + C$

67 $\int \operatorname{sen}^3 u\,du = -\frac{1}{3}(2 + \operatorname{sen}^2 u)\cos u + C$

68 $\int \cos^3 u\,du = \frac{1}{3}(2 + \cos^2 u)\operatorname{sen} u + C$

69 $\int \operatorname{tg}^3 u\,du = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 u + \ln|\cos u| + C$

70 $\int \operatorname{cot}^3 u\,du = -\frac{1}{2}\operatorname{cot}^2 u - \ln|\operatorname{sen} u| + C$

71 $\int \sec^3 u\,du = \frac{1}{2}\sec u \operatorname{tg} u + \frac{1}{2}\ln|\sec u + \operatorname{tg} u| + C$

72 $\int \csc^3 u\,du = -\frac{1}{2}\csc u \operatorname{cot} u + \frac{1}{2}\ln|\csc u - \operatorname{cot} u| + C$

73 $\int \operatorname{sen}^n u\,du = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} u\,du$

74 $\int \cos^n u\,du = \frac{1}{n}\cos^{n-1} u \operatorname{sen} u + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} u\,du$

75 $\int \operatorname{tg}^n u\,du = \frac{1}{n-1}\operatorname{tg}^{n-1} u - \int \operatorname{tg}^{n-2} u\,du$

76 $\int \operatorname{cot}^n u\,du = \frac{-1}{n-1}\operatorname{cot}^{n-1} u - \int \operatorname{cot}^{n-2} u\,du$

77 $\int \sec^n u\,du = \frac{1}{n-1}\operatorname{tg} u \sec^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} u\,du$

78 $\int \csc^n u\,du = \frac{-1}{n-1}\operatorname{cot} u \csc^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} u\,du$

79 $\int \operatorname{sen} au \operatorname{sen} bu\,du = \frac{\operatorname{sen}(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\operatorname{sen}(a+b)u}{2(a+b)} + C$

80 $\int \cos au \cos bu\,du = \frac{\operatorname{sen}(a-b)u}{2(a-b)} + \frac{\operatorname{sen}(a+b)u}{2(a+b)} + C$

81 $\int \operatorname{sen} au \cos bu\,du = -\frac{\cos(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)u}{2(a+b)} + C$

82 $\int u \operatorname{sen} u\,du = \operatorname{sen} u - u\cos u + C$

83 $\int u \cos u\,du = \cos u + u \operatorname{sen} u + C$

84 $\int u^n \operatorname{sen} u\,du = -u^n \cos u + n\int u^{n-1}\cos u\,du$

85 $\int u^n \cos u\,du = u^n \operatorname{sen} u - n\int u^{n-1}\operatorname{sen} u\,du$

86 $\int \operatorname{sen}^n u \cos^m u\,du = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} u \cos^{m+1} u}{n+m} + \frac{n-1}{n+m}\int \operatorname{sen}^{n-2} u \cos^m u\,du$

$= \frac{\operatorname{sen}^{n+1} u \cos^{m-1} u}{n+m} + \frac{m-1}{n+m}\int \operatorname{sen}^n u \cos^{m-2} u\,du$

Formas trigonométricas inversas

87 $\int \operatorname{arcsen} u\,du = u \operatorname{arcsen} u + \sqrt{1-u^2} + C$

88 $\int \arccos u\,du = u \arccos u - \sqrt{1-u^2} + C$

89 $\int \operatorname{arctg} u\,du = u \operatorname{arctg} u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) + C$

90 $\int \operatorname{arcsen} u\,du = \frac{2u^2-1}{4}\operatorname{arcsen} u + \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$

91 $\int u \arccos u\,du = \frac{2u^2-1}{4}\arccos u - \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$

92 $\int u \operatorname{arctg} u\,du = \frac{u^2+1}{2}\operatorname{arctg} u - \frac{u}{2} + C$

93 $\int u^n \operatorname{arcsen} u\,du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\operatorname{arcsen} u - \int \frac{u^{n+1}\,du}{\sqrt{1-u^2}}\right], \quad n \neq -1$

94 $\int u^n \arccos u\,du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\arccos u + \int \frac{u^{n+1}\,du}{\sqrt{1-u^2}}\right], \quad n \neq -1$

95 $\int u^n \operatorname{arctg} u\,du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\operatorname{arctg} u - \int \frac{u^{n+1}\,du}{1+u^2}\right], \quad n \neq -1$

Formas exponenciais e logarítmicas

96 $\int ue^{au}\,du = \frac{1}{a^2}(au-1)e^{au} + C$

97 $\int u^n e^{au}\,du = \frac{1}{a}u^n e^{au} - \frac{n}{a}\int u^{n-1}e^{au}\,du$

98 $\int e^{au}\operatorname{sen} bu\,du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}(a \operatorname{sen} bu - b\cos bu) + C$

99 $\int e^{au}\cos bu\,du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}(a\cos bu + b \operatorname{sen} bu) + C$

100 $\int \ln u\,du = u\ln u - u + C$

101 $\int u^n \ln u\,du = \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2}[(n+1)\ln u - 1] + C$

102 $\int \frac{1}{u \ln u}\,du = \ln|\ln u| + C$

Formas hiperbólicas

103 $\int \operatorname{senh} u\,du = \cosh u + C$

104 $\int \cosh u\,du = \operatorname{senh} u + C$

105 $\int \operatorname{tgh} u\,du = \ln \cosh u + C$

106 $\int \coth u\,du = \ln|\operatorname{senh} u| + C$

107 $\int \operatorname{sech} u\,du = \operatorname{arctgh} \operatorname{senh} u + C$

108 $\int \operatorname{csch} u\,du = \ln|\operatorname{tgh} \tfrac{1}{2}u| + C$

109 $\int \operatorname{sech}^2 u\,du = \operatorname{tgh} u + C$

110 $\int \operatorname{csch}^2 u\,du = -\coth u + C$

111 $\int \operatorname{sech} u \operatorname{tgh} u\,du = -\operatorname{sech} u + C$

112 $\int \operatorname{csch} u \coth u\,du = -\operatorname{csch} u + C$

Formas que envolvem $\sqrt{2au - u^2}$

113 $\int \sqrt{2au-u^2}\,du = \frac{u-a}{2}\sqrt{2au-u^2} + \frac{a^2}{2}\arccos\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

114 $\int u\sqrt{2au-u^2}\,du = \frac{2u^2-au-3a^2}{6}\sqrt{2au-u^2} + \frac{a^3}{2}\arccos\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

115 $\int \frac{\sqrt{2au-u^2}}{u}\,du = \sqrt{2au-u^2} + a\arccos\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

116 $\int \frac{\sqrt{2au-u^2}}{u^2}\,du = -\frac{2\sqrt{2au-u^2}}{u} - \arccos\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

117 $\int \frac{du}{\sqrt{2au-u^2}} = \arccos\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

118 $\int \frac{u\,du}{\sqrt{2au-u^2}} = -\sqrt{2au-u^2} + a\arccos\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

119 $\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{2au-u^2}} = -\frac{(u+3a)}{2}\sqrt{2au-u^2} + \frac{3a^2}{2}\arccos\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

120 $\int \frac{du}{u\sqrt{2au-u^2}} = -\frac{\sqrt{2au-u^2}}{au} + C$

MAKRON Books

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE NÚMERO ÍMPAR

Não são dadas as respostas de exercícios que exigem demonstrações longas.

CAPÍTULO 11

EXERCÍCIOS 11.1

1 $\frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{3}{11}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}$

3 $\frac{3}{5}, -\frac{9}{11}, -\frac{29}{21}, -\frac{57}{35}; -2$

5 $-5, -5, -5, -5; -5$

7 $2, \frac{7}{3}, \frac{25}{14}, \frac{7}{5}; 0$

9 $\frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{18}}, \frac{2}{5}; 0$

11 $\frac{3}{10}, -\frac{6}{17}, \frac{9}{26}, -\frac{12}{37}; 0$

13 1,1; 1,01, 1,001; 1,0001; 1 15 2, 0, 2, 0; NE

17 C; 0 19 C; $\frac{\pi}{2}$

21 D 23 C; 0 25 D

27 D 29 C; e 31 C; 0

33 C; $\frac{1}{2}$ 35 D 37 C; 1

39 C; 0 41 C; 0

43 (b) 10.000 em A; 5.000 em B; 20.000 em C

45 (a) A seqüência parece convergir para 1.

(b) Use a indução matemática; 1

47 (a) A seqüência parece convergir para 0,739, aproximadamente.

49 (a) $x_2 = 3{,}5$; $x_3 = 3{,}178571429$, $x_4 = 3{,}162319422$, $x_5 = 3{,}162277661$, $x_6 = 3{,}162277660$

51 (a) $B = \frac{1}{4}$ (b) 1,10

EXERCÍCIOS 11.2

1 (a) $-\frac{2}{35}, -\frac{4}{45}, -\frac{6}{55}$ (b) $\frac{2n}{5(2n+5)}$ (c) C; $-\frac{1}{5}$

3 (a) $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}$ (b) $\frac{n}{2n+1}$ (c) C; $\frac{1}{2}$

5 (a) $-\ln 2, -\ln 3, -\ln 4$ (b) $-\ln(n+1)$ (c) D

7 C; 4 9 C; $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}$ 11 C; $\frac{37}{99}$

13 D 15 D 17 $-1 < x < 1$; $\frac{1}{1+x}$

19 $1 < x < 5$; $\frac{1}{5-x}$

21 $\frac{23}{99}$ 23 $\frac{16.181}{4.995}$ 25 C 27 C 29 D 31 D

33 D 35 Necessário investigação adicional

37 D 39 D 41 C; $\frac{41}{24}$ 43 C; $\frac{6}{7}$

45 C; $\frac{8}{7}$ 47 C; $\frac{5}{3}$

49 (a) 0,21037; 0,26720; 026940 (b) 0,265

51 $S_{32} \approx 4{,}06$

53 Não prove; faça $a_n = 1$ e $b_n = -1$

55 30 m 57 (b) $\frac{Q}{1-e^{-ct}}$ (c) $-\frac{1}{c}\ln\frac{M-Q}{M}$

59 (b) 2.000

61 (a) $a_{k+1} = \sqrt{10}a_k$

(b) $a_n = \left(\frac{1}{4}\sqrt{10}\right)^{n-1} a_1$; $A_n = \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1} A_1$;

$P_n = \left(\frac{1}{4}\sqrt{10}\right)^{n-1} P_1$

(c) $\frac{16}{4-\sqrt{10}}a_1$; $\frac{8}{3}a_1^2$

EXERCÍCIOS 11.3

Exercs. 1-12: (a) Cada função f é positiva e contínua no intervalo de integração. Como $f'(x)$ é negativa, f é decrescente. (b) É dado o valor da integral imprópria, quando existe.

1 (a) $f'(x) = \frac{-4}{(2x+3)^3} < 0$ se $x \geq 1$

(b) $\int_1^\infty f(x)\,dx = \frac{1}{10}$; C

3 (a) $f'(x) = \frac{-4}{(4x+7)^2} < 0$ se $x \geq 1$

(b) $\int_1^\infty f(x)\,dx = \infty$; D

5 (a) $f'(x) = x(2-3x^3)e^{-x^3} < 0$ se $x \geq 1$

(b) $\int_1^\infty f(x)\,dx = \frac{1}{3e}$; C

7 (a) $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} < 0$ se $x \geq 3$

(b) $\int_3^\infty f(x)\,dx = \infty$; D

9 (a) $f'(x) = \frac{1-2x^2}{x^2(x^2-1)^{3/2}} < 0$ se $x \geq 2$

(b) $\int_2^\infty f(x)\,dx = \frac{\pi}{6}$; C

11 (a) $f'(x) = 1\frac{-2x\ \text{arctg}\ x}{(1+x^2)^2} < 0$ se $x \geq 1$

(b) $\int_1^\infty f(x)\,dx = \frac{3\pi^2}{32}$; C

Exercs. 13-28: Dá-se um b_n típico; entretanto, há muitas outras escolhas possíveis.

13 $b_n = \frac{1}{n^4}$; C 15 $b_n = \frac{1}{3^n}$; C

17 $b_n = \frac{\pi/4}{n}$; D 19 $b_n = \frac{1}{n^2}$; C

21 $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$; D 23 $b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$; C

25 $b_n = \frac{1}{e^n}$; C 27 $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$; D

29 D 31 C 33 D 35 D

37 C 39 C 41 C 43 C

45 C 47 $k > 1$

49 (b) $n > e^{100} - 1 \approx 2{,}688 \times 10^{43}$

51 Como $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, existe um M tal que se $k > M$, então $\frac{a_k}{b_k} < 1$, ou $a_k < b_k$. Como $\sum b_n$ converge e $a_n < b_n$ para quase todos os termos, $\sum a_n$ deve também convergir.

53 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$, onde o erro

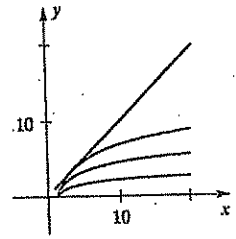
$E = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \int_n^\infty f(x)\,dx$, (ver Figura 11.8.)

55 8

57 Como $\sum a_n$ converge, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ e $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty$. Por (11.17), $\sum \frac{1}{a_n}$ diverge.

59 0,405

61 A série diverge para $k = 1, 2$ e 3.



EXERCÍCIOS 11.4

1 $\frac{1}{2}$; C 3 $\frac{5}{3}$; D 5 0; C 7 1; inconclusivo

9 ∞; D 11 0; C 13 2; D 15 $\frac{1}{3}$; C 17 $\frac{1}{2}$; C

19 C 21 C 23 C 25 C

27 D 29 C 31 D 33 C

35 D 37 D 39 D

EXERCÍCIOS 11.5

1 (a) As condições (i) e (ii) são satisfeitas

(b) Converge, por (11.30)

3 (a) A condição (i) é satisfeita, mas a (ii) não

(b) Diverge, por (11.17)

5 CC 7 CC 9 D 11 AC 13 AC

15 D 17 CC 19 AC 21 D 23 CC

25 D 27 D 29 D 31 AC 33 0,368

35 0,901 37 0,306 39 141 41 5

45 Não. Se $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, então tanto $\sum a_n$ como $\sum b_n$ convergem, de acordo com o teste para séries alternadas. Todavia, $\sum a_n b_n = \sum \frac{1}{n}$, que diverge.

EXERCÍCIOS 11.6

1 $[-1, 1)$ 3 $(-2, 2)$ 5 $(-1, 1]$

7 $[-1, 1)$ 9 $[-1, 1]$ 11 $(-6, 14)$

13 Converge somente se $x = 0$ 15 $(-2, 2)$

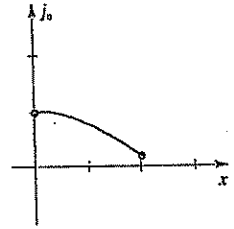
17 $(-\infty, \infty)$ 19 $\left[\frac{17}{9}, \frac{19}{9}\right)$ 21 $(-12, 4)$

23 Converge só se $x = 3$ 25 $(0, 2e)$

27 $\left(-\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right]$ 29 $(-\infty, \infty)$ 31 $\frac{3}{2}$

33 $\frac{1}{e}$ 35 ∞ 37 Use (11.35).

39 $J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2.304}$



41 Use (11.35) 43 Use (11.37).

45 Suponha $\sum a_n x^n$ absolutamente convergente em $x = r$. Seja $x = -r$. Então $\sum |a_n(-r)^n| = |\sum a_n r^n|$ é absolutamente convergente, o que implica que $\sum a_n(-r)^n$ é convergente. Isto é uma contradição.

EXERCÍCIOS 11.7

1 (a) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n x^{n-1}$; $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n+1} x^{n+1}$

3 (a) $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{7}{2}\right)^n x^n$

(b) $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n7^n}{2^n} x^{n-1}$;

$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{7^n}{(n+1)2^n} x^{n+1}$

5 $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+2}$; $r = 1$ 7 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^{n+1}}$; $r = \frac{2}{3}$

9 $-1 - x - 2\sum_{n=2}^{\infty} x^n$; $r = 1$

11 (b) 0,183; 0,182321557

15 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} x^{n+1}$ 17 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} x^{n+3}$

19 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} x^{2n+4}$

21 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{(2n+1)/2}$

23 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-5^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ 25 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{6n+2}$

27 0,3333 29 0,0992

31 0,9677 33 $\sum_{n=1}^{\infty} (2n)x^{2n-1}$ 37 $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$

EXERCÍCIOS 11.8

1 $\frac{3^n}{n!}$ 3 $(-1)^n \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}$

5 $(-1)^n 3^n$ 7 (b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$

9 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+2}$

11 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} x^{2n}$

13 $1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}$ 15 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 10)^n}{n!} x^n$

17 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{2}(2n+1)!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2n+1} +$
$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{2}(2n)!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2n}$

19 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}} (x-2)^n$ 21 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{e^2 n!} (x+1)^n$

23 $2 + 2\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 7\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2$

25 $\frac{\pi}{6} + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

27 $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2e}(x+1)^2 + \frac{1}{3e}(x+1)^3$

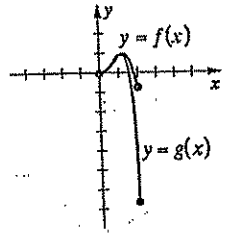
29 0,5; 0,125 31 0,9986; $3{,}13 \times 10^{-7}$

33 0,0997; 2×10^{-6} 35 0,6667; 0,1

37 0,4969; $9{,}04 \times 10^{-6}$ 39 0,4864 41 0,4484

43 (a) 0,309524, −0,690476

(b) A primeira aproximação é mais precisa.



45 $2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$

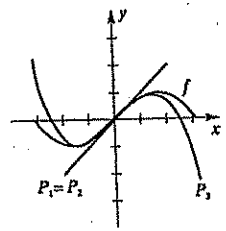
47 (a) $\pi = 4\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \cdots\right]$

(b) 3,34 com erro inferior a $\frac{4}{11}$ (c) 40.000

EXERCÍCIOS 11.9

1 (a) x; x; $x - \frac{1}{6}x^3$

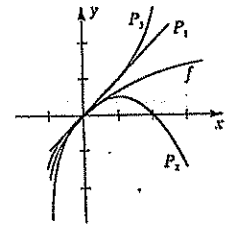
(b)



(c) $0{,}0500; 2{,}6 \times 10^{-7}$

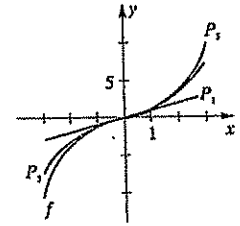
3 (a) x; $x - \frac{1}{2}x^2$; $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$

(b)



(c) 0,7380; 0,164

5



$P_1(x) = x$;
$P_3(x) = x + \frac{1}{6}x^3$;
$P_5(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$

7 $\operatorname{sen} x = 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{24}\operatorname{sen} z\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4$,
z entre x e $\frac{\pi}{2}$.

9 $\sqrt{x} = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2$
$+ \frac{1}{512}(x-4)^3 - \frac{5}{128}z^{-7/2}(x-4)^4$, z entre x e 4.

11 $\operatorname{tg} x = 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 +$
$\frac{16}{3}(3\operatorname{tg}^4 z + 4\operatorname{tg}^2 z + 1)\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3$, z entre x e $\frac{\pi}{4}$.

13 $\frac{1}{x} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x+2) - \frac{1}{8}(x+2)^2 - \frac{1}{16}(x+2)^3$
$- \frac{1}{32}(x+2)^4 - \frac{1}{64}(x+2)^5 + z^{-7}(x+2)^6$,
z entre x e -2.

15 $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 +$
$\frac{3z^2-1}{3(1+z^2)^3}(x-1)^3$, z entre x e 1.

17 $xe^x = -\frac{1}{e} + \frac{1}{2e}(x+1)^2 + \frac{1}{3e}(x+1)^3 +$
$\frac{1}{8e}(x+1)^4 + \frac{ze^z + 5e^z}{120}(x+1)^5$, z entre x e -1.

Exercs. 19-30: Como $c = 0$, z está entre x e 0.

19 $\ln(x+1) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{x^5}{5(z+1)^5}$

21 $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{\operatorname{sen} z}{9!}x^9$

23 $e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 +$
$\frac{4}{15}x^5 + \frac{4}{45}e^{2z}x^6$

25 $\frac{1}{(x-1)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 +$
$6x^5 + 7x^6(z-1)^{-8}$

27 $\operatorname{arcsen} x = x + \frac{1 + 2z^2}{6(1 - z^2)^{5/2}}x^3$

29 $f(x) = -5x^3 + 2x^4$

31 0,9998; $|R_3(x)| < 4 \times 10^{-9}$

33 2,0075; $|R_3(x)| < 3 \times 10^{-10}$

35 −0,454545; $|R_5(x)| \leq 5 \times 10^{-7}$

37 0,223; $|R_4(x)| < 2 \times 10^{-4}$

39 0,8660254; $|R_8(x)| < 8{,}2 \times 10^{-9}$

41 Cinco decimais, pois $|R_3(x)| \leq 4{,}2 \times 10^{-6} < 0{,}5 \times 10^{-5}$

43 Três decimais, pois $|R_2(x)| \leq 1{,}85 \times 10^{-4} < 0{,}5 \times 10^{-3}$

45 Quatro decimais, pois $|R_3(x)| \leq 3{,}82 \times 10^{-5} < 0{,}5 \times 10^{-4}$

47 Se f é um polinômio de grau n, então o resto de Taylor $R_n(x) = 0$, pois $f^{(n+1)}(x) = 0$. Por (11.45), temos $f(x) = P_n(x)$.

EXERCÍCIOS 11.10

1 (a) $1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2^n n!}x^n$; 1

(b) $1-\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{8}x^6-\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2^n n!}x^{3n}$; 1

3 $1-\frac{2}{3}x+\frac{5}{9}x^2+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-2)(-5)(-8)\ldots(1-3n)}{3^n n!}x^n$; 1

5 $1-\frac{3}{5}x+\frac{3}{25}x^2+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(3)(-2)(-7)\ldots(8-5n)}{5^n n!}(-x)^n$; 1

7 $1-2x+3x^2+\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n$; 1

9 $1-3x+6x^2+\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2}(n+1)(n+2)x^n$; 1

11 $2+\frac{1}{12}x-\frac{1}{288}x^2+2\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-4)}{24^n n!}x^n$; 8

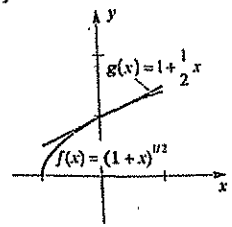
13 (a) $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n(2n+1)n!}x^{2n+1}$

(b) 1

Exercs. 15-20: O erro na aproximação é inferior a $0,5\times 10^{-3}$.

15 0,508 17 0,198 19 0,296

21 $[-0,7; 1]$



23 (a) Use $(1-x)^{-1/2}=1+\frac{1}{2}x$ e uma fórmula do ângulo metade.

(b) $6,39\sqrt{\frac{L}{g}}$

11.11 EXERCÍCIOS DE REVISÃO

1 C; 0	3 D	5 C; 5	7 C
9 AC	11 D	13 D	15 AC
17 D	19 D	21 AC	23 CC
25 C	27 C	29 C	31 CC
33 C	35 C	37 D	39 0,158
41 $(-3, 3)$	43 $[-12, -8)$		45 $\frac{1}{4}$

47 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n)!}x^{2n-1}$; ∞

49 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}}{(2n+1)!}x^{2n+1}$; ∞

51 $1+\frac{2}{3}x+2\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-5)}{3^n n!}x^n$; 1

53 $e^{-x}=e^2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}(x+2)^n$

55 $\sqrt{x}=2+\frac{1}{4}(x-4)+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2^{3n-1}n!}(x-4)^n$

57 0,189 59 1,002

61 $\ln\cos x=\ln\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)-\frac{1}{3}\sqrt{3}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{2}{3}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2-\frac{4}{27}\sqrt{3}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^3-\frac{1}{12}(\sec^4 z+2\sec^2 z\,\mathrm{tg}^2 z)\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^4$, z está entre x e $\frac{\pi}{6}$

63 $e^{-x^2}=1-x^2+\frac{1}{6}(4z^4-12z^2+3)e^{-z^2}x^4$, z está entre x e 0

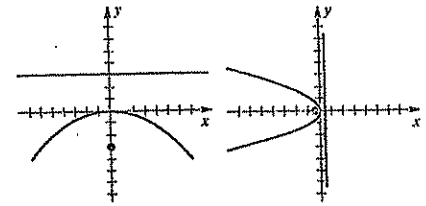
65 0,7314

CAPÍTULO 12

EXERCÍCIOS 12.1

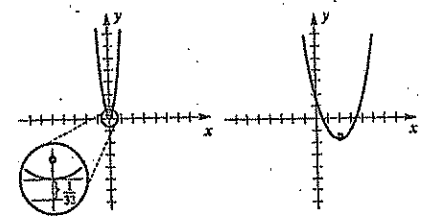
1 $V(0, 0)$; $F(0, -3)$; $y=3$

3 $V(0, 0)$; $F\left(-\frac{3}{8}, 0\right)$; $x=\frac{3}{8}$

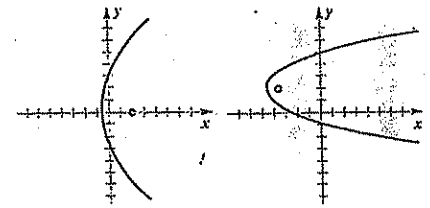


5 $V(0, 0)$; $F\left(0, \frac{1}{32}\right)$; $y=-\frac{1}{32}$

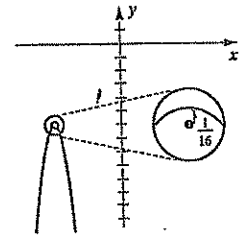
7 $V(2, -2)$; $F\left(2, -\frac{7}{4}\right)$



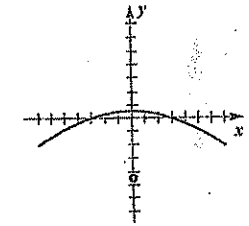
9 $V(-1, 0)$; $F(2, 0)$; 11 $V(-4, 2)$; $F\left(-\frac{7}{2}, 2\right)$;



13 $V(-5, -6)$; $F\left(-5, -\frac{97}{16}\right)$



15 $V\left(0, \frac{1}{2}\right)$; $F\left(0, -\frac{9}{2}\right)$



17 $y^2=8x$ 19 $(y+5)^2=4(x-3)$

21 $y^2=-12(x+1)$ 23 $3x^2=-4y$

25 $\frac{9}{16}$ do vértice m

27 (a) $\frac{8}{3}$ (b) 2π (c) $\frac{16\pi}{5}$

29 (a) $p=\frac{r^2}{4h}$ (b) $\frac{1}{2}\pi r^2 h$

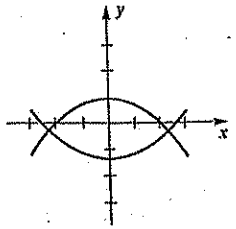
31 (a) $x^2 = 150\,(y-3)$

(b) $\int_{-60}^{60} \sqrt{1+\left(\frac{1}{75}x\right)^2}\,dx$

33 *Sugestão:* Seja (v, ax^2+k) o canto superior direito do retângulo

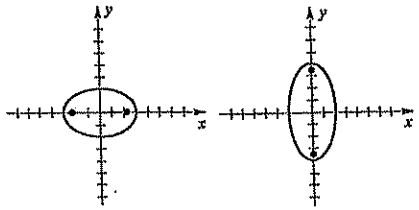
35 (a) $y = -\frac{7}{160}x^2 + x$ (b) 5,3 m

39 $(\pm 2{,}280, -0{,}3)$

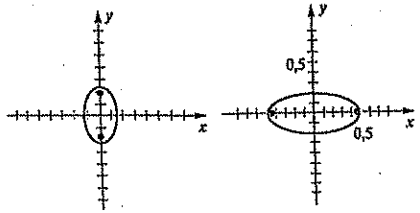


EXERCÍCIOS 12.2

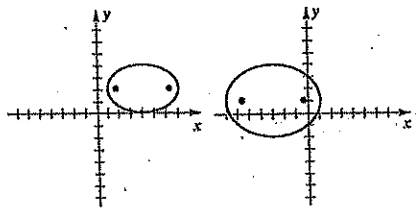
1 $V(\pm 3, 0)$; $F(\pm\sqrt{5}, 0)$ 3 $V(0, \pm 4)$; $F(0, \pm 2\sqrt{3})$



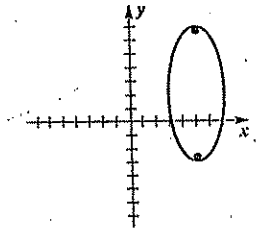
5 $V(0, \pm\sqrt{5})$; $F(0, \pm\sqrt{3})$ 7 $V\left(\pm\frac{1}{2}, 0\right)$; $F\left(\pm\frac{1}{10}\sqrt{21}, 0\right)$



9 $V(4, \pm 3, 2)$; $F(4, \pm\sqrt{5}, 2)$ 11 $V(-3, \pm 4, 1)$; $F(-3, \pm\sqrt{7}, 1)$



13 $V(5, 2 \pm 5)$; $F(5, 2 \pm \sqrt{21})$



15 $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{39} = 1$ 17 $\frac{4x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

19 $\frac{8x^2}{81} + \frac{y^2}{36} = 1$ 21 $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{16} = 1$

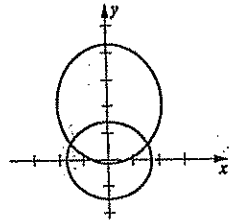
23 $\frac{x^2}{4} + 9y^2 = 1$ 25 2,75 m

29 (a) $\sqrt{\frac{2E}{m}}$; $\sqrt{\frac{2E}{k}}$ (b) $A\sqrt{mk} = 2\pi E$

31 $\left(\pm\sqrt{3}, \frac{3}{2}\right)$ 33 $5x - 6y = -28$; $6x + 5y = 3$

35 $\frac{4}{3}\pi ab^2$ 37 864 41 509×10^6 km^2

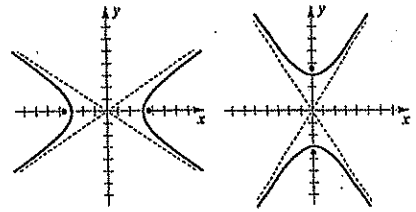
45 (a) $(\pm 1{,}540; 0{,}618)$



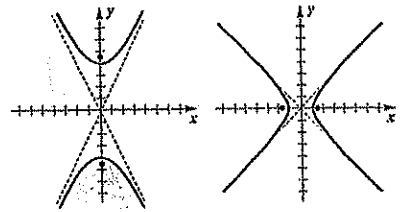
(b) $2\int_0^{1,54}\left[\sqrt{\frac{1}{2,9}(6{,}09 - 2{,}1x^2)} - \left(2{,}1 - \sqrt{\frac{1}{4,3}(21{,}07 - 4{,}9x^2)}\right)\right]dx$

EXERCÍCIOS 12.3

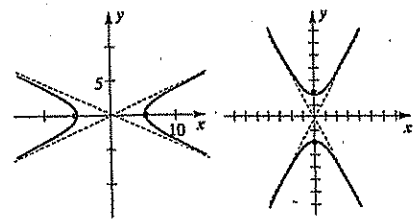
1 $V(\pm 3, 0)$; $F(\pm\sqrt{13}, 0)$ 3 $V(0, \pm 3)$; $F(0, \pm\sqrt{13})$



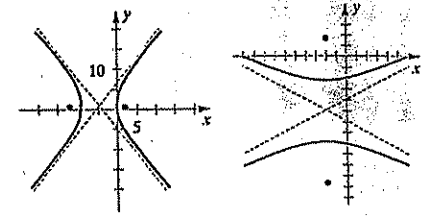
5 $V(0, \pm 4)$; $F(0, \pm 2\sqrt{5})$ 7 $V(\pm 1, 0)$; $F(\pm\sqrt{2}, 0)$



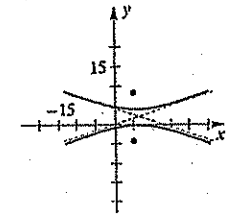
9 $V(\pm 5, 0)$; $F(\pm\sqrt{30}, 0)$ 11 $V(0, \pm\sqrt{3})$; $F(0, \pm 2)$



13 $V(-5 \pm 2\sqrt{5}, 1)$; $F\left(-5 \pm \frac{1}{2}\sqrt{205}, 1\right)$ 15 $V(-2, -5 \pm 3)$; $F(-2, -5 \pm 3\sqrt{5})$



17 $V(6, 2 \pm 2)$; $F(6, 2 \pm 2\sqrt{10})$

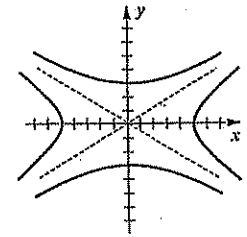


19 $y^2 - \frac{x^2}{15} = 1$ 21 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

23 $\frac{y^2}{21} - \frac{x^2}{4} = 1$ 25 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$

27 $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{100} = 1$

29 Os gráficos têm as mesmas assíntotas.



31 Com um sistema coordenado como o do Exemplo 5, as coordenadas do navio são $\left(\frac{80}{3}\sqrt{34}, 100\right) \approx (155{,}5; 100)$.

33 $(\pm 2\sqrt{2}, -6)$ 35 $4x + 5y = -3$; $5x - 4y = -14$

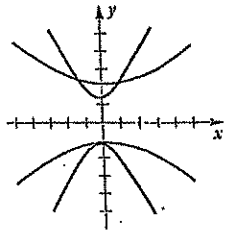
37 $\frac{b}{a}[bc - a^2 \ln(b + c) + a^2 \ln a]$

39 $4\pi\sqrt{2}\left(2\sqrt{3} - \sqrt{2} + \ln\frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{3}}\right) \approx 28{,}69$

41 $\frac{1}{2}$ AU

43 Os raios convergirão para o foco exterior do espelho hiperbólico, localizado abaixo do espelho parabólico na figura.

45 (a) (0,741; 2,206)

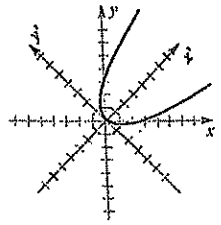


(b) $\int_0^{0,74} \left\{0{,}5 + \sqrt{\frac{1}{5{,}3}[14{,}31 + 2{,}7(x - 0{,}1)^2]} - \sqrt{[0{,}1 + \sqrt{1{,}6 + 3{,}2(x + 0{,}2)^2}]}\right\} dx$

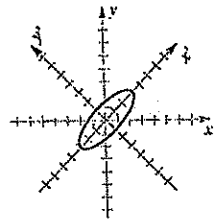
EXERCÍCIOS 12.4

Exercs. 1-13: A resposta em (a) dá o valor de $B^2 - 4AC$ no teorema de identificação.

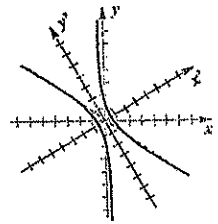
1 (a) 0, parábola
(b) $(y')^2 = 2(x')$



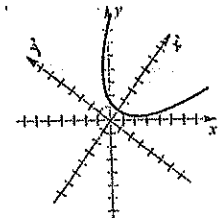
3 (a) -36, elipse (b) $\frac{(x')^2}{9} + (y')^2 = 1$



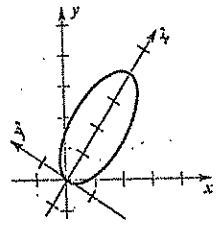
5 (a) 256, hipérbole (b) $\frac{(x')^2}{1/4} - (y')^2 = 1$



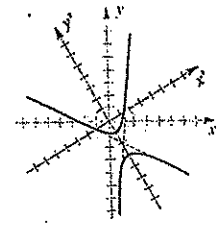
7 (a) 0, parábola (b) $(y')^2 = 4(x' - 1)$



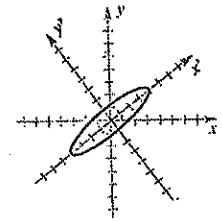
9 (a) -2.704, elipse (b) $\frac{(x'-2)^2}{4} + (y')^2 = 1$



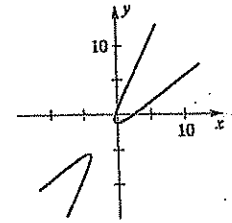
11 (a) 128, hipérbole (b) $(y' + 2)^2 - \frac{(x')^2}{1/2} = 1$



13 (a) -1.600, elipse (b) $\frac{(x')^2}{16} + (y')^2 = 1$

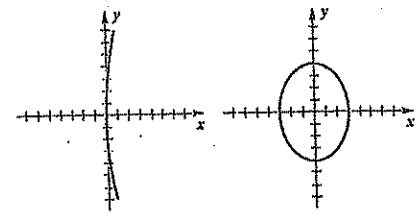


15

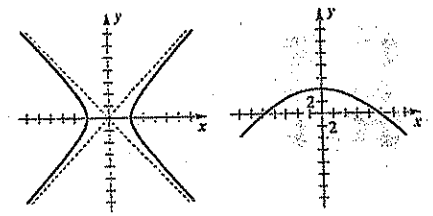


12.5 EXERCÍCIOS DE REVISÃO

1 $V(0, 0)$; $F(16, 0)$ 3 $V(0, \pm 4)$; $F(0, \pm\sqrt{7})$

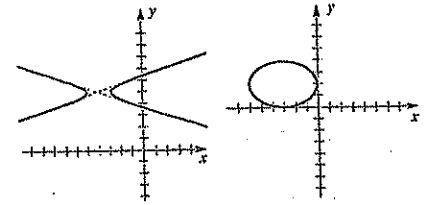


5 $V(\pm 2, 0)$; $F(\pm 2\sqrt{2}, 0)$ 7 $V(0, 4)$; $F\left(0, -\frac{9}{4}\right)$

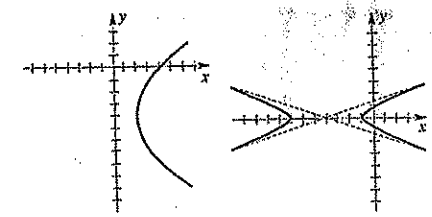


9 $V(-4 \pm 1, 5)$
$F\left(-4 \pm \frac{1}{3}\sqrt{10}, 5\right)$

11 $V(-3 \pm 3, 2)$;
$F(-3 \pm \sqrt{5}, 2)$



13 $V(2, -4)$; $F(4, -4)$ 15 $V(-4 \pm 3, 0)$;
$F(-4 \pm \sqrt{10}, 0)$



17 $\frac{y^2}{49} - \frac{x^2}{9} = 1$ 19 $x^2 = -40y$

21 $\frac{x^2}{75} + \frac{y^2}{100} = 1$ 23 $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{4/9} = 1$

25 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{45} = 1$

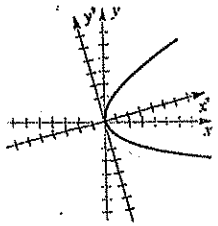
27 (a) $y = \sqrt{960\left(1 - \frac{x^2}{10.000}\right)}$ (b) $\sqrt{960}$

29 $y - 2 = -\frac{16}{15}(x+3)$; $y - 2 = \frac{15}{16}(x+3)$

33 $\frac{8}{3}p^2$ 35 $\frac{64\pi}{3}$

37 $\bar{x} = 0$; $\bar{y} = \frac{(2/3)b^3}{K}$, com $K = bc - a^2[\ln(c+b) - \ln a]$

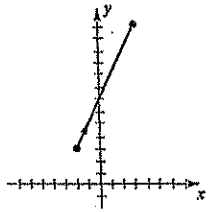
39 $(y')^2 = 3x'$



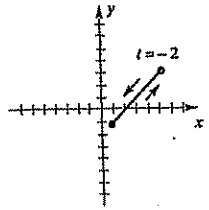
CAPÍTULO 13

EXERCÍCIOS 13.1

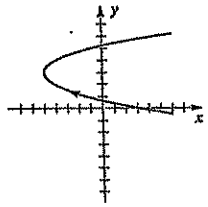
1 $y = 2x + 7$



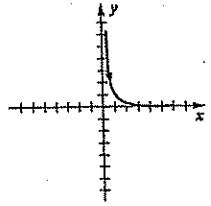
3 $y = x - 2$



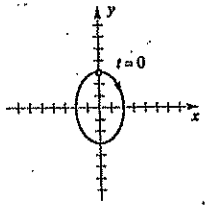
5 $(y-3)^2 = x + 5$



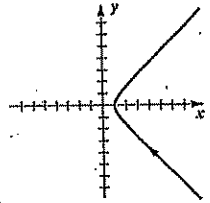
7 $y = \frac{1}{x^2}$



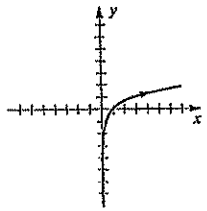
9 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$



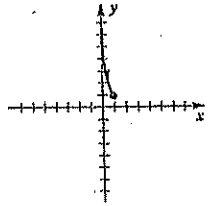
11 $x^2 - y^2 = 1$



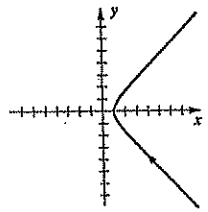
13 $y = \ln x$



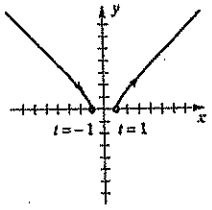
15 $y = \frac{1}{x}$



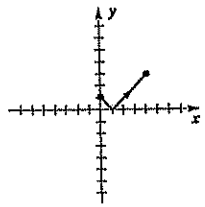
17 $x^2 - y^2 = 1$



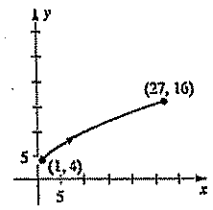
19 $y = \sqrt{x^2 - 1}$



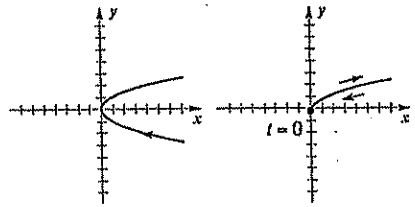
21 $y = |x - 1|$



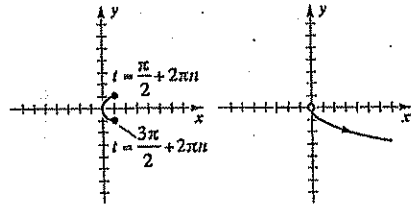
23 $y = (x^{1/3} + 1)^2$



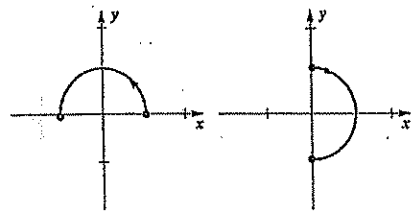
25 C_1 C_2



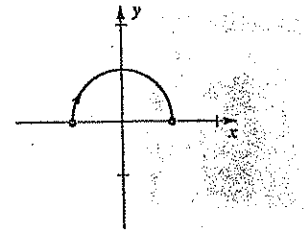
C_3 C_4



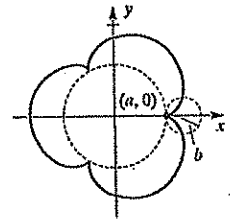
27 (a) (b)



(c)

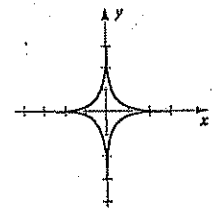


35 $x = 4b\cos t - b\cos 4t$, $y = 4b\operatorname{sen} t - b\operatorname{sen} 4t$

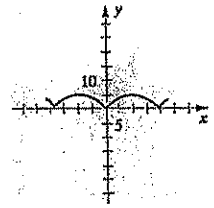


39 (a) A figura é uma elipse de centro (0, 0) e eixos de comprimentos $2a$ e $2b$.

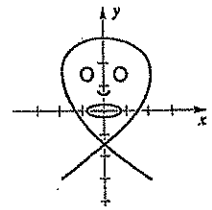
41



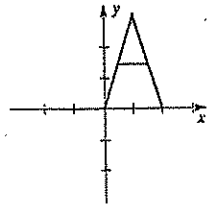
43



45 Uma máscara com boca, nariz e olhos



47 A letra A



EXERCÍCIOS 13.2

1 $1; -1$ 3 $\frac{1}{4}; -4$ 5 $-\frac{2}{e^3}; \frac{1}{2}e^3$

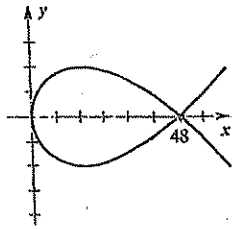
7 $-\frac{3}{2}\operatorname{tg} 1 \approx -2{,}34; \frac{2}{3}\cot 1 \approx 0{,}43$

9 $(-27, -108), (1, 12)$

11 (a) Horizontal: $(16, \pm 16)$; vertical: $(0, 0)$

(b) $\frac{et^2 + 12}{64t^3}$

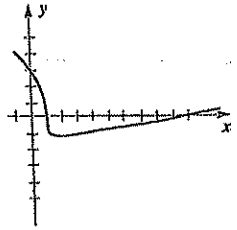
(c)



13 (a) Horizontal: $(2, -1)$; vertical: $(1, 0)$

(b) $\frac{-2t + 4}{9t^5}$

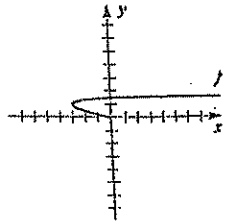
(c)



15 (a) Horizontal: nenhuma vertical: $(0, 0), (-3, 1)$

(b) $\frac{1 - 3t}{144t^{3/2}(t-1)^3}$

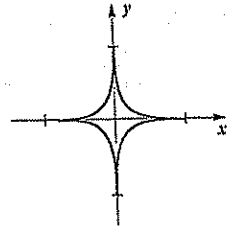
(c)



17 (a) Horizontal: $(\pm 1, 0)$; vertical: $(0, \pm 1)$

(b) $\frac{1}{3}\sec^4 t \csc t$

(c)



19 Horizontal: $(0, \pm 2), (2\sqrt{3}, \pm 2), (-2\sqrt{3}, \pm 2)$; vertical: $(4, \pm\sqrt{2}), (-4, \pm\sqrt{2})$

21 $\frac{2}{27}(34^{3/2} - 125) \approx 5{,}43$ 23 $\sqrt{2}(e^{\pi/2} - 1) \approx 5{,}39$

25 $\frac{1}{8}\pi^2 \approx 1{,}23$ 27 15,9

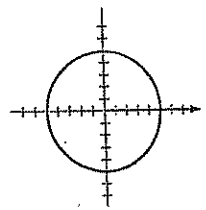
29 $\frac{8\pi}{3}(17^{3/2} - 1) \approx 578{,}83$ 31 $\frac{11\pi}{9} \approx 3{,}84$

33 $\frac{64\pi}{3} \approx 67{,}02$ 35 $\frac{536\pi}{5} \approx 336{,}78$

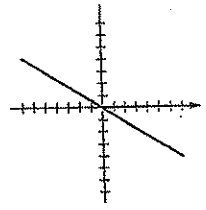
37 $\frac{2}{3}\sqrt{2}\pi(2e^{\pi} + 1) \approx 84{,}03$ 39 2,2

EXERCÍCIOS 13.3

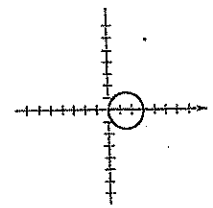
1



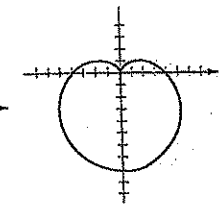
3



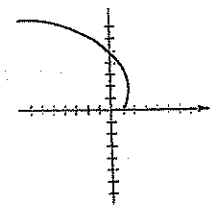
5



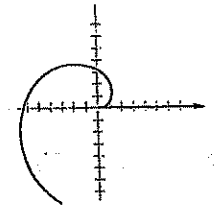
7



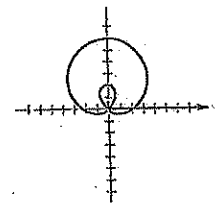
21



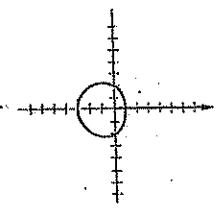
23



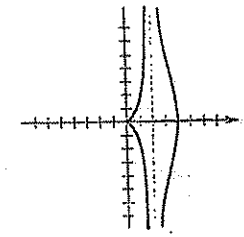
9



11



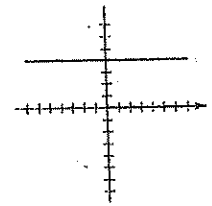
25



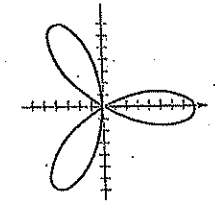
27 $r = -3\sec\theta$ 29 $r = 4$ 31 $\theta = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)$

33 $r^2 = -4\sec 2\theta$ 35 $r\,\theta = a \operatorname{sen}\theta$

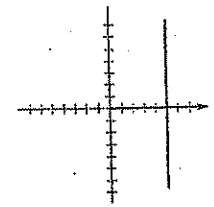
13



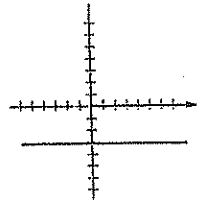
15



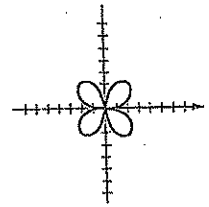
37 $x = 5$



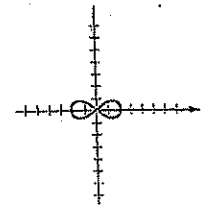
39 $y = -3$



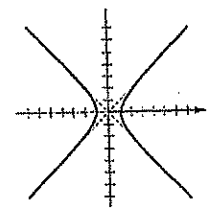
17



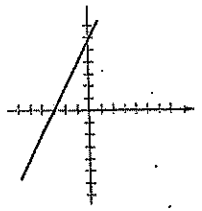
19



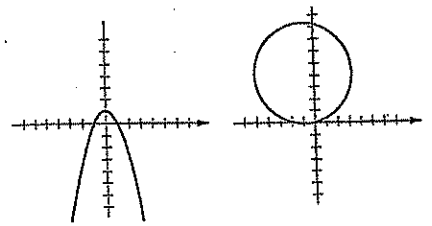
41 $x^2 - y^2 = 1$



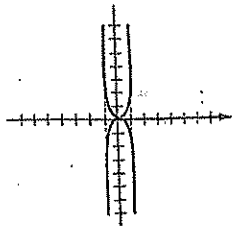
43 $y - 2x = 6$



45 $y = -x^2 + 1$ 47 $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 17$

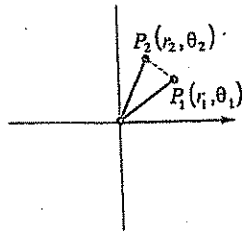


49 $y^2 = \dfrac{x^4}{1-x^2}$



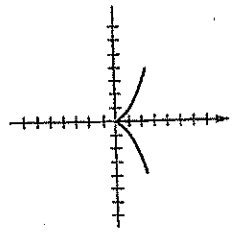
51 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 53 -1 55 2 57 0 59 $\dfrac{1}{\ln 2}$

61 Sejam $P_1(r_1, \theta_1)$ e $P_2(r_2, \theta_2)$ pontos de um plano-$r\theta$. Sejam $a = r_1$, $b = r_2$, $c = d(P_1, P_2)$ e $\gamma = \theta_2 - \theta_1$. Substituindo na lei dos cossenos, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, obtemos a fórmula.

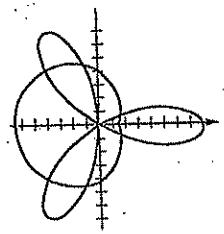


65 Use (13.10).

67 Simétrica em relação ao eixo polar.



69 Coordenadas polares aproximadas $(1{,}75, \pm 0{,}45)$, $(4{,}49; \pm 1{,}77)$, e $(5{,}76; \pm 2{,}35)$.



EXERCÍCIOS 13.4

1 π 3 $\dfrac{3\pi}{3}$ 5 $\dfrac{\pi}{2}$ 7 $\dfrac{1}{4}(e^{\pi} - 1) \approx 5{,}54$

9 2 11 $\dfrac{9\pi}{20}$

13 $\displaystyle\int_0^{\operatorname{arctg}(3/4)} \frac{1}{2}(\sec\theta)^2\, d\theta + \int_{\operatorname{arctg}(3/4)}^{\pi/2} \frac{1}{2}(5)^2\, d\theta$

15 $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 3} \frac{1}{2}[4\csc\theta)^2 - (2)^2]\, d\theta$

17 (a) $8\displaystyle\int_0^{\pi/6} \frac{1}{2}[(4\cos 2\theta)^2 - (2)^2]\, d\theta$

(b) $8\left[\displaystyle\int_0^{\pi/6} \frac{1}{2}(2)^2\, d\theta + \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1}{2}(4\cos 2\theta)^2\, d\theta\right]$

19 $2\pi + \dfrac{9}{2}\sqrt{3} \approx 14{,}08$ 21 $4\sqrt{3} - \dfrac{4\pi}{3} \approx 2{,}74$

23 $\dfrac{5\pi}{24} - \dfrac{1}{4}\sqrt{3} \approx 0{,}22$

25 $\dfrac{3\pi}{3} + 11\operatorname{arcsen}\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}\sqrt{15} \approx 4{,}17$

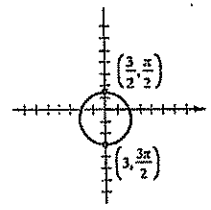
27 $\sqrt{2}(1 - e^{-2\pi}) \approx 1{,}41$ 29 2 31 $\dfrac{3\pi}{2}$ 33 2,4

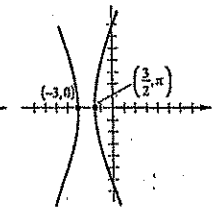
35 $\dfrac{128\pi}{5} \approx 80{,}42$ 37 $4\pi^2a^2$ 39 4,2

41 $4\pi^2ab$ 43 $\dfrac{2}{5}\pi\sqrt{2}(2 + e^{-\pi}) \approx 3{,}63$

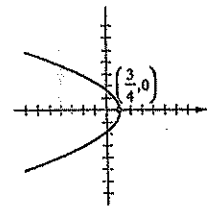
EXERCÍCIOS 13.5

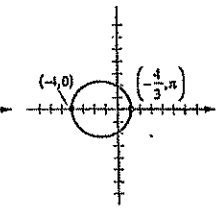
1 $\dfrac{1}{3}$, elipse 3 3, hipérbole



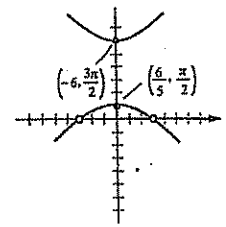


5 1, parábola 7 $\dfrac{1}{2}$, elipse





9 $\dfrac{3}{2}$, hipérbole



11 $9x^2 + 8y^2 + 12y - 36 = 0$

13 $8x^2 - y^2 + 36x + 36 = 0$

15 $4y^2 + 12x - 9 = 0$ 17 $3x^2 + 4y^2 + 8x - 16 = 0$

19 $4x^2 - 5y^2 + 36y - 36 = 0$, excluído $(\pm 3, 0)$

21 $r = \dfrac{2}{3 + \cos\theta}$ 23 $\dfrac{12}{1 - 4\operatorname{sen}\theta}$

25 $r = \dfrac{5}{1 + \cos\theta}$ 27 $r = \dfrac{8}{1 + \operatorname{sen}\theta}$

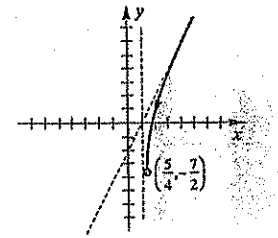
29 $-\dfrac{3}{5}\sqrt{5}$ 31 3

33 $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{2}(2\sec\theta)^2\, d\theta$

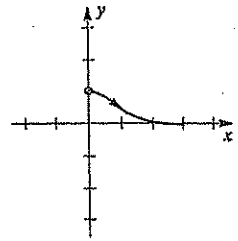
35 $\displaystyle\int_{5\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{2}\left(\frac{4}{1 - \cos\theta}\right)^2 d\theta$ 39 (b) $a\sqrt{1 - e^2}$

13.6 EXERCÍCIOS DE REVISÃO

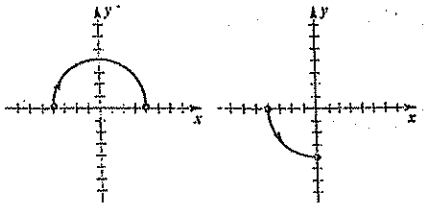
1 (a) $y = \dfrac{2x^2 - 4x + 1}{x - 1}$ (b)



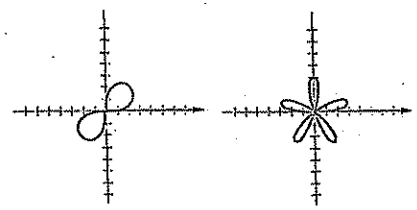
3 (a) $y = 2^{-x^2}$ (b)



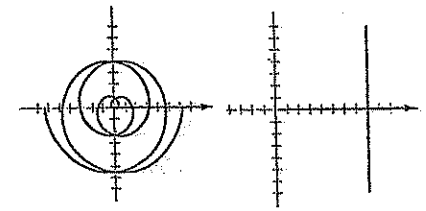
5 C_1 C_2



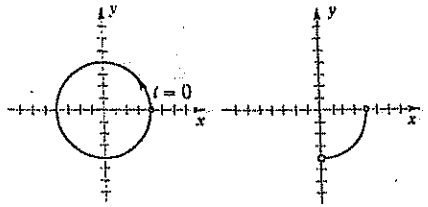
13 15



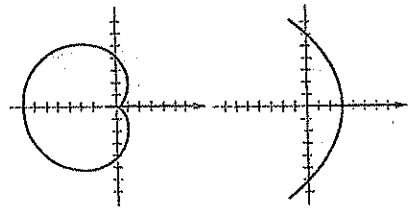
17 19



C_3 C_4



21 23

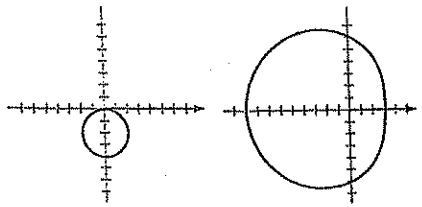


7 (a) $\frac{3t^2 + 2}{t}$

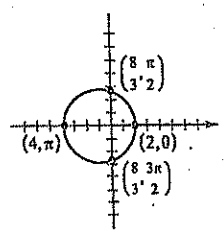
(b) Horizontal: nenhuma; vertical: 0

(c) $\frac{3t^2 - 2}{2t^3}$

9 11



25



27 $r = 4 \cot\theta \csc\theta$ 29 $r(2\cos\theta - 3\operatorname{sen}\theta) = 8$

31 $r = 2\cos\theta \sec 2\theta$ 33 $x^3 + xy^2 = y$

35 $(x^2 + y^2)^2 = 8xy$ 37 $y = (\operatorname{tg}\sqrt{3})x$

39 -1 41 2 43 $\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}) \approx 2{,}30$

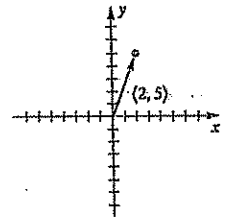
45 $2\pi[5\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})] \approx 49{,}97$

47 $2\pi a^2(2 - \sqrt{2}) \approx 3{,}68a^2$

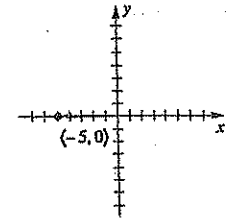
CAPÍTULO 14

EXERCÍCIOS 14.1

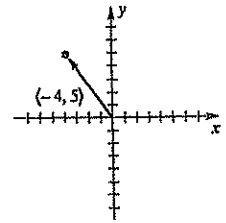
1 $\sqrt{29}$



3 5



5 $\sqrt{41}$



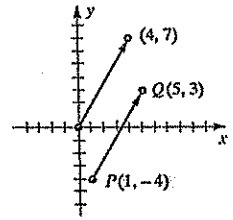
7 $\langle 3, 1\rangle, \langle 1, -7\rangle, \langle 4, -6\rangle, \langle -3, -12\rangle, \langle 3, -32\rangle$

9 $\langle -15, 6\rangle, \langle 1, -2\rangle, \langle -14, 4\rangle, \langle 24, -12\rangle, \langle 12, -12\rangle$

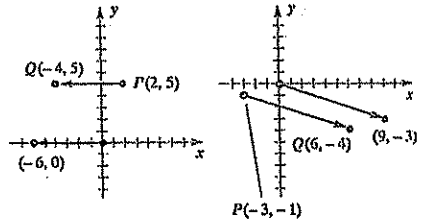
11 $2\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$, $4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$, $6\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $3\mathbf{i} - 15\mathbf{j}$, $17\mathbf{i} - 17\mathbf{j}$

13 b 15 f 17 $-\frac{1}{2}$ e

19 $\langle 4, 7\rangle$



21 $\langle -6, 0\rangle$ 23 $\langle 9, -3\rangle$



25 (a) $-\frac{8}{17}\mathbf{i} + \frac{15}{17}\mathbf{j}$ (b) $\frac{8}{17}\mathbf{i} - \frac{15}{17}\mathbf{j}$

27 (a) $\left\langle \frac{2}{\sqrt{29}}, -\frac{5}{\sqrt{29}} \right\rangle$ (b) $\left\langle -\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}} \right\rangle$

29 (a) $\langle -12, 6\rangle$ (b) $\left\langle -3, \frac{3}{2} \right\rangle$

31 $\frac{24}{\sqrt{65}}\mathbf{i} - \frac{42}{\sqrt{65}}\mathbf{j}$

33 (a) $\pm\frac{3}{5}$ (b) Nenhum (c) 0

35 20,48; 14,34 37 $-61{,}80$; 19,02

39 301,5 km/h; 144,3° 41 arcsen (0,4) ≈ 23,6°

43 $p = 2$; $q = -3$

45 Se a e b têm a mesma direção.

47 O círculo de centro (x_0, y_0) e raio c.

EXERCÍCIOS 14.2

1 (a) $\sqrt{104}$ (b) $\langle 3, 1, -1\rangle$ (c) $\langle 2, -6, 8\rangle$

3 (a) $\sqrt{53}$ (b) $\left(-\frac{1}{2}, -1, 1\right)$ (c) $\langle 7, -2, 0\rangle$

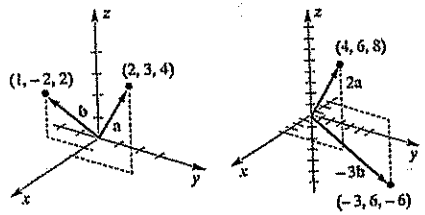
5 (a) $\sqrt{3}$ (b) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (c) $\langle -1, 1, 1\rangle$

7 (a) $\langle 1, 3, 0\rangle$ (b) $\langle -5, 9, 2\rangle$ (c) $\langle -22, 42, 9\rangle$
(d) $\sqrt{41}$ (e) $3\sqrt{41}$

9 (a) $4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ (b) $2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$
(c) $11\mathbf{i} - 28\mathbf{j} - 30\mathbf{k}$ (d) $\sqrt{29}$ (e) $3\sqrt{29}$

11 (a) $\mathbf{i} + \mathbf{k}$ (b) $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$
(c) $5\mathbf{i} + 9\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ (d) $\sqrt{2}$ (e) $3\sqrt{2}$

13



15 $\frac{1}{\sqrt{30}}\langle -2, 5, -1\rangle$

17 (a) $28\mathbf{i} - 30\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$ (b) $-\frac{14}{3}\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
(c) $\frac{2}{\sqrt{457}}(14\mathbf{i} - 15\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$

19 $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$

21 $(x+5)^2 + y^2 + (z-1)^2 = \frac{1}{4}$

23 (a) $(x+2)^2 + (y-4)^2 + (z+6)^2 = 36$
(b) $(x+2)^2 + (y-4)^2 + (z+6)^2 = 16$
(c) $(x+2)^2 + (y-4)^2 + (z+6)^2 = 4$

25 $(x+3)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^3 + z^2 = \frac{89}{4}$

27 $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$

29 $(-2, 1, -1)$; 2 31 $(4, 0, -4)$; 4

33 $(0, -2, 0)$; 2

35 Todos os pontos não exteriores à esfera de raio 1 e centro na origem.

37 Todos os pontos não exteriores a um paralelepípedo retângulo com centro na origem e arestas de comprimentos 2, 4 e 6 na direção dos eixos x, y e z, respectivamente.

39 Todos os pontos não exteriores a uma região cilíndrica de raio 5 e altura 6 com centro na origem e eixo ao longo do eixo-z.

41 Todos os pontos não situados em um plano coordenado.

43 *Sugestão:* P é $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{4}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{4}, \frac{z_4}{4}\right)$.

EXERCÍCIOS 14.3

1 3 3 (a) -12 (b) -12 5 -99 7 $-\frac{3}{\sqrt{30}}$

9 0 11 $\arccos\frac{-3}{\sqrt{534}} \approx 97{,}5°$

13 $\arccos\frac{6}{13} \approx 62{,}5°$

15 *Sugestão:* Use o teorema (14.21). 17 $-3, 5$

19 74 21 $\arccos\frac{37}{\sqrt{3081}} \approx 48{,}2°$

23 $\frac{-82}{\sqrt{126}}$ 25 1

27 $-4\sqrt{3} \approx 6{,}93$ N-m

29 $1000\sqrt{3} \approx 1.732$ N-m

35 (a) *Sugestão:* $a_1 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{i} = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{i}\|\cos\alpha$.

47 Quando a e b têm mesma direção ou direções opostas.

EXERCÍCIOS 14.4

1 $\langle 5, 10, 5\rangle$ 3 $\langle -4, 2, -1\rangle$

5 $-6\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 18\mathbf{k}$ 7 $0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = 0$

9 $0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = 0$

11 *Sugestão:* Use o Corolário (14.31).

13 $\langle 12, -14, 24\rangle$; $\langle 16, -2, -5\rangle$

Exercs. 15-18: c é um escalar não nulo.

15 (a) $c\langle 13, 7, 5\rangle$ (b) $\frac{9}{2}\sqrt{3}$

17 (a) $c\langle -10, -8, -20\rangle$ (b) $\sqrt{141}$

19 $\sqrt{\frac{282}{11}} \approx 5{,}06$ 23 4

EXERCÍCIOS 14.5

Nas respostas supõe-se que o domínio de cada parâmetro seja $\mathbb{R}$.

1 $x = 4 + \frac{1}{3}t$, $y = 2 + 2t$, $z = -3 + \frac{1}{2}t$

3 $x = 0, y = t, z = 0$

5 $x = 5 - 3t, y = -2 + 8t, z = 4 - 3t$; $\left(1, \frac{26}{3}, 0\right)$, $\left(\frac{17}{4}, 0, \frac{13}{4}\right)$, $\left(0, \frac{34}{3}, -1\right)$

7 $x = 2 - 8t, y = 0, z = 5 - 2t$; $(-18, 0, 0)$, está no plano-xz $\left(0, 0, \frac{9}{2}\right)$

9 $x = -6 - 3s, y = 4 + s, z = -3 + 9s$

11 $(5, -7, 3)$ 13 Não se interceptam

15 $\theta = \arccos\left(\frac{15}{\sqrt{38}\sqrt{18}}\right) \approx 55°$ e $180° - \theta$

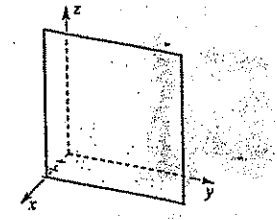
17 $\theta = \arccos\left(\frac{71}{\sqrt{82}\sqrt{249}}\right) \approx 60°$ e $180° - \theta$

19 (a) $z = 4$ (b) $x = 6$ (c) $y = -7$

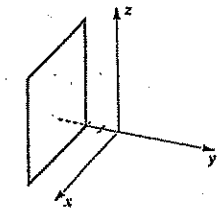
21 $6x - 5y - z = -84$ 23 $3x - y + 2z = -11$

25 $x + 42y - 5z = 8$ 27 $2x + y - 2z = -3$

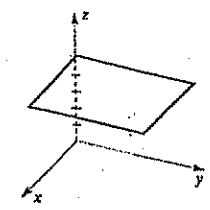
29 (a)



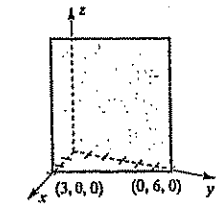
(b)



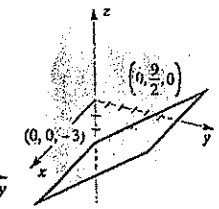
(c)



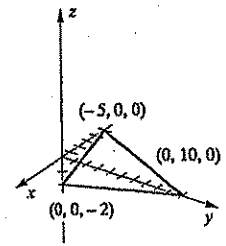
31



33



35



37 $x + z = 5$ 39 $3x + 2y = 6$

41 $4x - y + 3z + 7 = 0$ 43 $\frac{x-5}{-3} = \frac{y+2}{8} = \frac{z-4}{-3}$

45 $\frac{x-4}{-7} = \frac{z+3}{8}; y = 2$

47 $x = 3 - t, y = 2 + 5t, z = t$

49 $x = 3t, y = 4 - t, z = t$

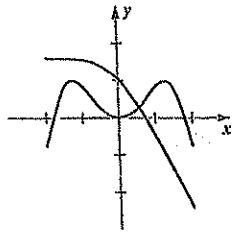
51 $\frac{7}{\sqrt{59}} \approx 0{,}91$ 53 $\frac{17}{6\sqrt{14}} \approx 0{,}76$

55 $\frac{89}{\sqrt{521}} \approx 3{,}90$ 57 $6x + 11y + 4z = 38$

59 $\sqrt{\frac{5.411}{90}} \approx 7{,}75$ 61 $\sqrt{\frac{474}{17}} \approx 5{,}28$

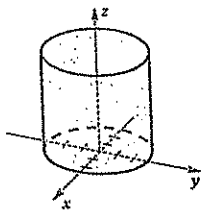
63 $\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{5} = 1$ 65 $6x + 4y + 3z = 12$

67 (a) (0,55; 0,30)
(b) 103°; 77°

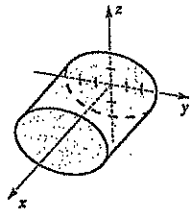


EXERCÍCIOS 14.6

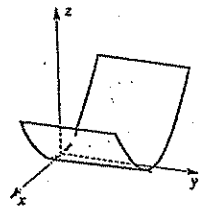
1



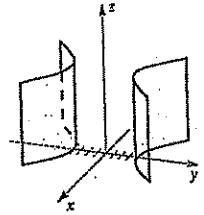
3



5



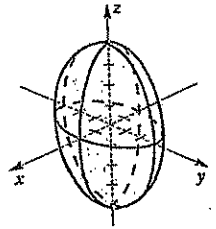
7



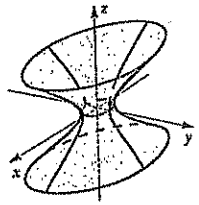
9 K 11 C 13 Q

15 P 17 A 19 E

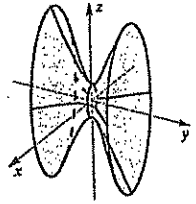
21



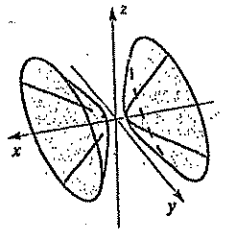
23 (a)



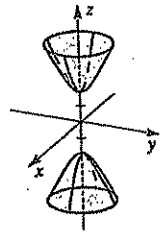
(b)



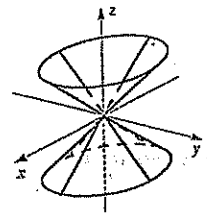
25 (a)



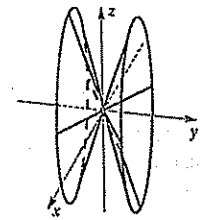
(b)



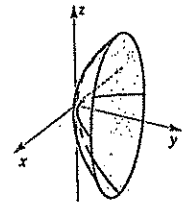
27 (a)



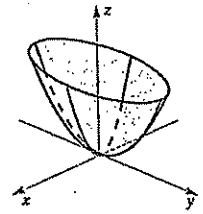
(b)



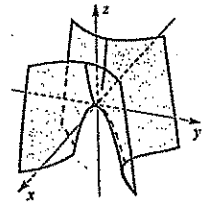
29 (a)



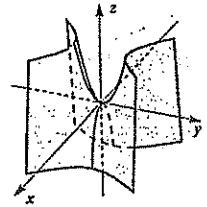
(b)



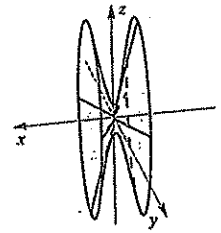
31 (a)



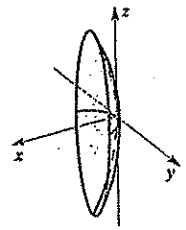
(b)



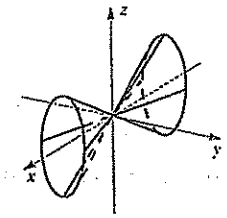
33 Hiperbolóide de uma folha



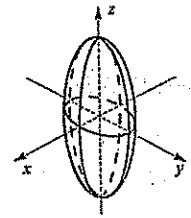
35 Parabolóide



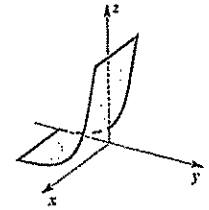
37 Cone



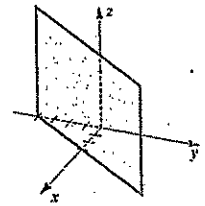
39 Elipsóide



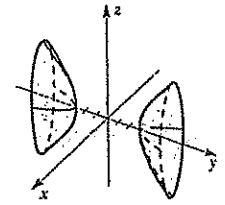
41 Cilindro exponencial



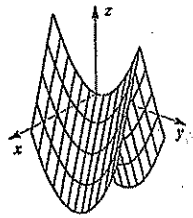
43 Plano



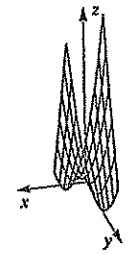
45 Hiperbolóide de duas folhas



47



49



51 $x^2 + z^2 + 4y^2 = 16$ 53 $z = 4 - x^2 - y^2$

55 $y^2 + z^2 - x^2 = 1$

57 (a) O elipsóide de Clarke é mais achatado nos pólos norte e sul.

(b) Elipses (c) Elipses

14.7 EXERCÍCIOS DE REVISÃO

1 $5\mathbf{i} - 13\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$ 3 $3\sqrt{33}$ 5 26

7 $\arccos \frac{-27}{\sqrt{962}} \approx 150{,}52^\circ$ 9 $\frac{1}{\sqrt{26}}(3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 4\mathbf{k})$

11 $22\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 17\mathbf{k}$ 13 $\frac{9}{\sqrt{33}} \approx 1{,}57$

15 156 17 0 19 80

21 *Sugestão:* Use o Teorema (14.21).

23 (a) $\sqrt{38}$ (b) $\left(2, -\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$

(c) $(x+1)^2 + (y+4)^2 + (z-3)^2 = 16$

(d) $y = -4$ (e) $x = 5 + 6t, y = -3 + t, z = 2 - t$

(f) $6x + y - z = 25$

25 $6x - 15y + 5z = 30$

27 $x = -13t + 5, y = 6t - 2, z = 5t$

29 $4x + 3y - 4z = 11$ 31 $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$

33 (a) $\frac{1}{\sqrt{66}}\langle 1, 4, 7\rangle$ (b) $x + 4y + 7z = 5$

(c) $x = 2 + 7t, y = -1 - 7t, z = 1 + 3t$

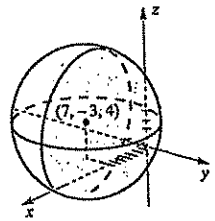
(d) 59 (e) $\arccos \frac{59}{\sqrt{3.745}} \approx 15{,}40^\circ$

(f) $\sqrt{66} \approx 8{,}12$ (g) $\sqrt{\frac{264}{35}} \approx 2{,}75$

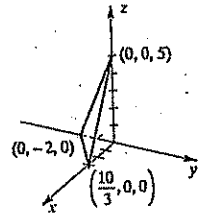
35 $x = 3 + 2t, y = -1 - 4t, z = 5 + 8t$; $x = -1 + 7t$, $y = 6 - 2t, z = -\frac{7}{2} - 2t$

37 $\theta = \arccos -\frac{25}{\sqrt{2.295}} \approx 121{,}46^\circ$ e $180^\circ - \theta$

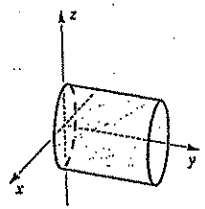
39



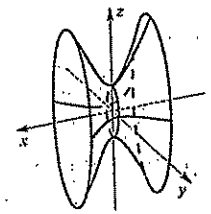
41



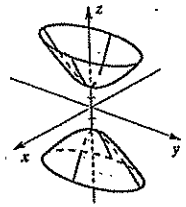
43



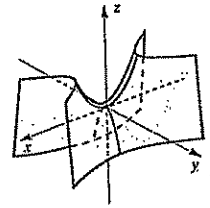
45



47



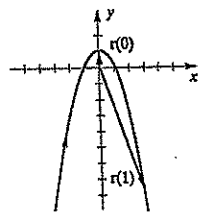
49



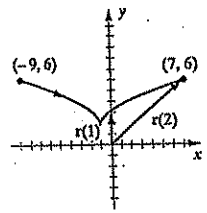
CAPÍTULO 15

EXERCÍCIOS 15.1

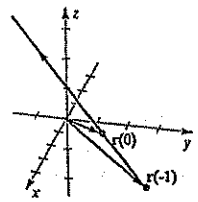
1



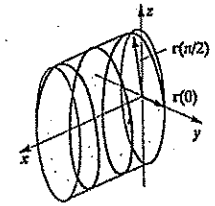
3



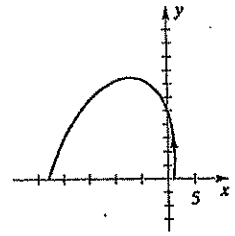
5



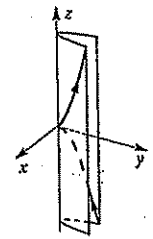
7



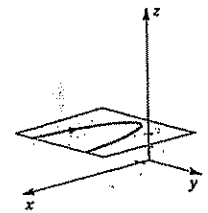
9



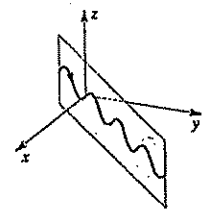
11



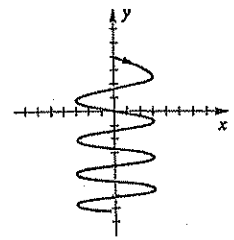
13



15



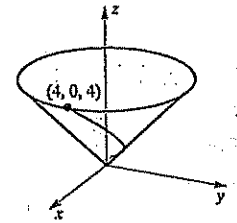
17



19 $\frac{5}{4}[4\sqrt{17} + \ln(4 + \sqrt{17})] \approx 23{,}23$

21 $\sqrt{3}(e^{2\pi} - 1) \approx 925{,}77$ 23 7

25 (b)



(c) $4\sqrt{3}$

27 (a) *Sugestão:* Seja $Ax + By + Cz = D$ a equação de um plano arbitrário.

(b) 7

EXERCÍCIOS 15.2

1 (a) $[1, 2]$

(b) $\frac{1}{2}(t-1)^{-1/2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}(2-t)^{-1/2}\mathbf{j}$;

$-\frac{1}{4}(t-1)^{-3/2}\mathbf{i} - \frac{1}{4}(2-t)^{-3/2}\mathbf{j}$

3 (a) $\left\{t : t \neq \frac{\pi}{2} + \pi n\right\}$ (b) $\sec^2 t\,\mathbf{i} + (2t + 8)\mathbf{j}$;

$2\sec^2 t \operatorname{tg} t\,\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

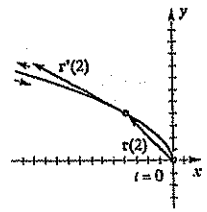
5 (a) $\left\{t : t \neq \frac{\pi}{2} + \pi n\right\}$

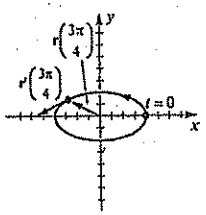
(b) $2t\mathbf{i} + \sec^2 t\,\mathbf{j}$; $2\mathbf{i} + 2\sec^2 t \operatorname{tg} t\,\mathbf{j}$

7 (a) $\{t : t \geq 0\}$

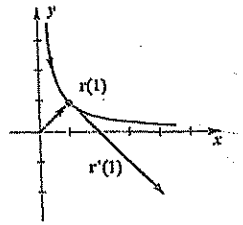
(b) $\frac{1}{2\sqrt{t}}\mathbf{i} + 2e^{2t}\mathbf{j} + \mathbf{k}$; $-\frac{1}{4t\sqrt{t}}\mathbf{i} + 4e^{2t}\mathbf{j}$

9 $-t^3\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$ 11 $-4\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j}$

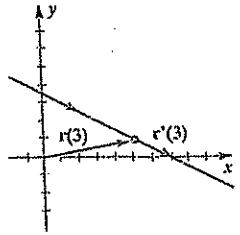




13 $3t^2\mathbf{i} - 3t^{-4}\mathbf{j}$



15 $2\mathbf{i} - \mathbf{j}$



17 $x = 1 + 6t, y = -2 - 10t, z = 10 + 8t$

19 $x = 1 + t, y = t, z = 4$ 21 $\pm\frac{1}{\sqrt{5}}(2\mathbf{i} - \mathbf{j})$

25 $x = ae^t$, $y = be^t$ e $z = ce^t$, para constantes a, b e c; o gráfico é uma semi-reta com a origem O omitida.

27 $16\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

29 $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} + (\ln\sqrt{2})\mathbf{k}$

31 $\left(\frac{1}{3}t^3 + 2\right)\mathbf{i} + (3t^2 + t - 3)\mathbf{j} + (2t^4 + 1)\mathbf{k}$

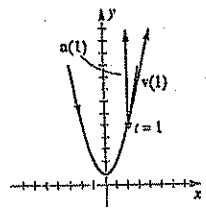
33 $(t^3 + t + 7)\mathbf{i} + (2t - t^4)\mathbf{j} + \left(\frac{1}{2}t^2 - 3t + 1\right)\mathbf{k}$

35 $x + y = 1$

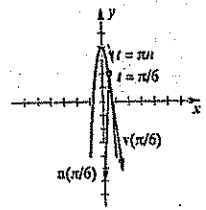
37 $(1 + 5t^2)\operatorname{sen} t + (2t^3 + 3t)\cos t$; $[(t^3 + 4t)\operatorname{sen} t - t^2\cos t]\mathbf{i} + [(3t^2 - 2)\operatorname{sen} t + (t^3 - 2t)\cos t]\mathbf{j} + [-3t\operatorname{sen} t + (1 - t^2)\cos t]\mathbf{k}$

EXERCÍCIOS 15.3

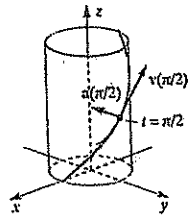
1



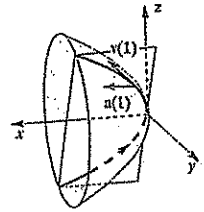
3



5



7



9 $-\frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j}$; $\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{2}{9}\mathbf{j}$; $\frac{1}{6}\sqrt{13}$

11 $2\mathbf{i} - \mathbf{j}$; $4\mathbf{i} + \mathbf{j}$; $\sqrt{5}$

13 $e^{\pi/2}(-\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$; $e^{\pi/2}(-2\mathbf{i} + \mathbf{k})$; $\sqrt{3}e^{\pi/2}$

15 $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$; 0; $\sqrt{14}$ 19 (a) 18.054 km/h

(b) 86,7 min

21 (a) $750\sqrt{3}\mathbf{i} + (-gt + 750)\mathbf{j}$

(b) $\frac{(1.500)^2}{8g} \approx 8.789$ m

(c) $\frac{(1.500)^2\sqrt{3}}{2g} \approx 60.892$ m

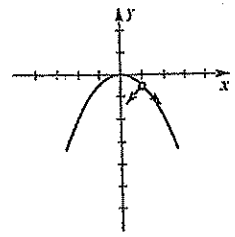
(d) 1.500 m/s

23 $\sqrt{100\ g}$ 25 0,46 rev/s 29 0,76 cm

EXERCÍCIOS 15.4

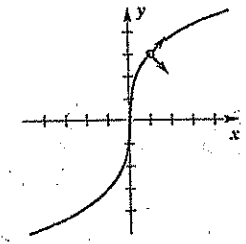
1 (a) $\frac{1}{(1+t^2)^{1/2}}\mathbf{i} - \frac{t}{(1+t^2)^{1/2}}\mathbf{j}$; $-\frac{t}{(1+t^2)^{1/2}}\mathbf{i} - \frac{1}{(1+t^2)^{1/2}}\mathbf{j}$

(b)



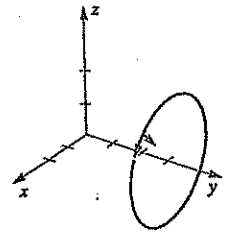
3 (a) $\frac{t^2}{(t^4+1)^{1/2}}\mathbf{i} + \frac{1}{(t^4+1)^{1/2}}\mathbf{j}$; $\frac{1}{(t^4+1)^{1/2}}\mathbf{i} - \frac{t^2}{(t^4+1)^{1/2}}\mathbf{j}$

(b)



5 (a) $\cos t\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\mathbf{k}$; $-\operatorname{sen} t\mathbf{i} - \cos t\mathbf{k}$

(b)

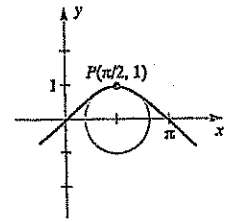


7 $\frac{6}{10^{3/2}} \approx 0,19$ 9 2 11 4

13 $\frac{2}{17^{3/2}} \approx 0,03$ 15 0 17 $\frac{48}{21^{3/2}} \approx 0,50$

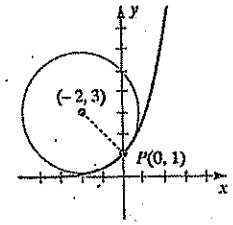
19 (a) 1 (b) $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

(c)



21 (a) $2\sqrt{2}$ (b) $(-2, 3)$

(c)



23 $\left(\ln\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 25 $(0, \pm 3)$

27 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\ln 2\right)$ 29 $(\pm\sqrt{2}, -20)$

31 $(0, 0)$ 35 $\frac{8 - 3\operatorname{sen}^2 2\theta}{(1 + 3\cos^2 2\theta)^{3/2}}$

39 $\left(-\frac{14}{3}, \frac{29}{12}\right)$ 41 $(4, -2)$ 43 $(0, -4)$

49 $x = \frac{4}{5}s - 3$, $y = \frac{3}{5}s + 5$; $s \geq 0$

51 $x = 4\cos\frac{1}{4}s$, $y = 4\operatorname{sen}\frac{1}{4}s$; $0 \leq s \leq 8\pi$

EXERCÍCIOS 15.5

1 $\frac{4t}{(4t^2+9)^{1/2}}; \frac{6}{(4t^2+9)^{1/2}}; \frac{6}{(4t^2+9)^{3/2}}$

3 $\frac{6t(t^2+2)}{(t^4+4t^2+1)^{1/2}}; \frac{6(t^4+t^2+1)^{1/2}}{(t^4+4t^2+1)^{1/2}};$

$\frac{2(t^4+t^2+1)^{1/2}}{3(t^4+4t^2+1)^{3/2}}$

5 $\frac{t}{(1+t^2)^{1/2}}; \frac{2+t^2}{(1+t^2)^{1/2}}; \frac{2+t^2}{(1+t^2)^{3/2}}$

7 $\frac{-65 \operatorname{sen} t \cos t}{(16\operatorname{sen}^2 t + 81\cos^2 t + 1)^{1/2}};$

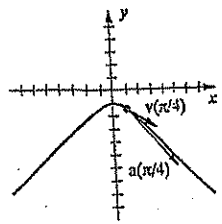
$\frac{(81\operatorname{sen}^2 t + 16\cos^2 t + 1.296)^{1/2}}{(16\operatorname{sen}^2 t + 81\cos^2 t + 1)^{1/2}};$

$\frac{(81\operatorname{sen}^2 t + 16\cos^2 t + 1.296)^{1/2}}{(16\operatorname{sen}^2 t + 81\cos^2 t + 1)^{3/2}};$

9 $\frac{36}{\sqrt{5}} \approx 16{,}10; \frac{18}{\sqrt{5}} \approx 8{,}05$

15.7 EXERCÍCIOS DE REVISÃO

1



3 $2\mathbf{i} + (8t - 4t^3)\mathbf{j}$; $2\mathbf{i} + (8 - 12t^2)\mathbf{j}$; $2|t|\sqrt{17 - 16t^2 + 4t^4}$

5 (a) $\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$ (b) $x = t, y = 1 + t, z = 1 + t$

7 $0, \frac{10}{3}$

9 $3\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} + 4t^3\mathbf{k}$, $6\mathbf{j} + 12t^2\mathbf{k}$, $\sqrt{34}$; $3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $6\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$, $\sqrt{34}$

11 $2\mathbf{i} + \frac{1}{4}\mathbf{j} - \mathbf{k}$

13 $\mathbf{r}(t) = (3t-4)\mathbf{i} + (2t^3 - 8t + 9)\mathbf{j} + \left(\frac{5}{2}t^2 - t\right)\mathbf{k}$

17 $\frac{108}{82^{3/2}} \approx 0{,}15$ 19 $\pm\frac{\sqrt{36 + \sqrt{3.096}}}{90} \approx \pm 1{,}009$

21 $\frac{5}{6}\sqrt{5} \approx 1{,}86$ 23 $\frac{-8\cos 2t \operatorname{sen} 2t + \operatorname{sen} t \cos t}{(4\cos^2 2t + \operatorname{sen}^2 t)^{1/2}}; \frac{2|\cos 2t \cos t + 2 \operatorname{sen} 2t \operatorname{sen} t|}{(4\cos^2 2t + \operatorname{sen}^2 t)^{1/2}}$

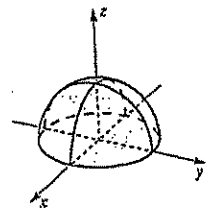
CAPÍTULO 16

EXERCÍCIOS 16.1

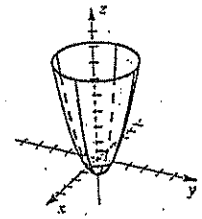
1 $\mathbb{R}^2$; $-29, 6, -4$ 3 $\{(u, v): u = 2v\}$; $-\frac{3}{2}, \frac{4}{9}, 0$

5 $\{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 \le 25\}$; 4, $2\sqrt{3}$

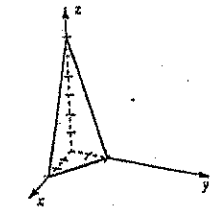
7



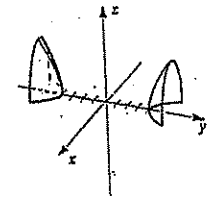
9



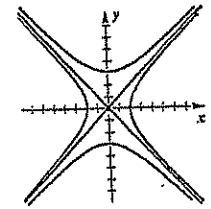
11



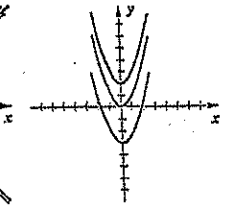
13



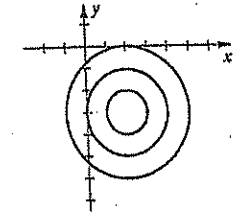
15



17



19



21 $y \operatorname{arctg} x = \pi$

23 $x^2 + 4y^2 - z^2 = -1$

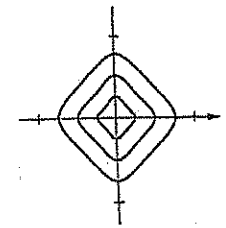
25 (a) Elipses (b) Nenhuma (c) Nenhuma

27 (a) $k > 8$; nenhuma; $k = 8$; o ponto $(0, 0, 8)$; $0 < k < 8$; círculos.

(b) Nenhuma (c) Nenhuma

29 (d) 31 (a) 33 (f)

35



37 Nenhum; a origem; a esfera de centro $(0, 0, 0)$ e raio 2.

39 Planos com intercepto-x k, intercepto-y $\frac{k}{2}$, intercepto-z $\frac{k}{3}$.

41 Nenhum; o eixo-z; o cilindro circular reto tendo o eixo-z como eixo e raio 2.

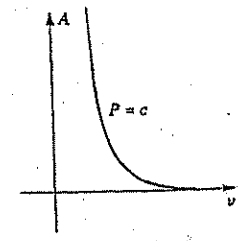
43 (a) círculos com centro na origem.

(b) $x^2 + y^2 = 100$

45 Cinco; esferas com centros na origem; a força F é constante se (x, y, z) se move ao longo de uma superfície de nível.

47 (a) $P = kAv^3, k > 0$

(b) Uma curva de nível típica (ver figura) mostra as combinações de áreas e velocidades de vento que resultam em uma potência fixa $P = c$.



(c) $Av^3 = 36 \cdot 10^3\pi$

49 Exemplo: 5'11" e 175 lb são aproximadamente 180 cm e 80 kg. Pelo gráfico, temos uma área de aproximadamente 2,0 m^2. Usando a fórmula, obtemos $S \approx 1{,}996$ m^2.

EXERCÍCIOS 16.2

1 $-\frac{2}{3}$ 3 1 5 0 7 0 9 $\frac{1}{2}$

Exercs. 11-20: A resposta dá equações de possíveis trajetórias, e seus valores resultantes, para usar em (16.4).

11 $x = 0, -\frac{1}{2}$; $y = 0, 2$ 13 $y - 2 = m(x - 1), \frac{m}{1 + m^2}$

15 $y = 2x, \frac{12}{31}$; $y = 0, 0$ 17 $x = y = 0, 0$; $x = y = z, 1$

19 $x = at$, $y = bt$, $z = ct$, $\dfrac{a^3 + b^3 + c^3}{abc}$

21 0 23 1 25 $\{(x, y): x + y > 1\}$

27 $\{(x, y): x \geq 0 \text{ e } |y| \leq 1\}$

29 $\{(x, y, z): z^2 = x^2 + y^2\}$

31 $\{(x, y, z): x \geq 2, yz > 0\}$

33 0 35 $\dfrac{x^4 - 2x^2y^2 + y^4 - 4}{x^2 - y^2}$; $\{(x, y): x^2 = y^2\}$

37 $x^2 + 2x \operatorname{tg} y + \operatorname{tg}^2 y + 1$; $\left\{(x, y): y = \dfrac{\pi}{2} + \pi n\right\}$

39 e^{x^2+2y}; $(x^2 + 2y)(x^2 + 2y - 3)$; $e^{2t} + 2(t^2 - 3t)$

41 $2x^2 - 3xy - 2y^2 - x + 7y$

43 $\lim\limits_{(x, y, z, w) \to (a, b, c, d)} f(x, y, z, w) = L$ significa que para todo $\in > 0$ $\delta > 0$ tal que, se

$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 + (w-d)^2} < \delta$

então $|f(x, y, z, w) - L| < \in$.

EXERCÍCIOS 16.3

1 $f_x(x, y) = 8x^3y^3 - y^2$; $f_y(x, y) = 6x^4y^2 - 2xy + 3$

3 $f_r(r, s) = \dfrac{r}{(r^2 + s^2)^{1/2}}$; $f_s(r, s) = \dfrac{s}{(r^2 + s^2)^{1/2}}$

5 $f_x(x, y) = e^y + y \cos x$; $f_y(x, y) = xe^y + \operatorname{sen} x$

7 $f_t(t, v) = \dfrac{v}{t^2 - v^2}$; $f_v(t, v) = \dfrac{t}{t^2 - v^2}$

9 $f_x(x, y) = \cos\dfrac{x}{y} - \dfrac{x}{y}\operatorname{sen}\dfrac{x}{y}$; $f_y(x, y) = \left(\dfrac{x}{y}\right)^2 \operatorname{sen}\dfrac{x}{y}$

11 $f_x(x, y, z) = 6xz + y^2$; $f_y(x, y, z) = 2xy$; $f_z(x, y, z) = 3x^2$

13 $f_r(r, s, t) = 2re^{2s} \cos t$; $f_s(r, s, t) = 2r^2e^{2s} \cos t$; $f_t(r, s, t) = -r^2e^{2s} \operatorname{sen} t$

15 $f_x(x, y, z) = e^x - ye^x$; $f_y(x, y, z) = -e^x - ze^{-y}$; $f_z(x, y, z) = xe^z + e^{-y}$

17 $f_q(q, v, w) = \dfrac{v}{2\sqrt{qv}\sqrt{1 - qv}}$;

$f_v(q, v, w) = \dfrac{q}{2\sqrt{qv}\sqrt{1 - qv}} + w \cos vw$;

$f_w(q, v, w) = v \cos vw$

19 $w_{xy} = w_{yx} = 4y^3 - 12xy^2$

21 $w_{xy} = w_{yx} = -6x^2e^{-2y} + 2y^{-3} \operatorname{sen} x$

23 $w_{xy} = w_{yx} = \dfrac{2xz}{y^2} \operatorname{senh}\dfrac{z}{y}$

25 $18xy^2 + 16y^3z$

27 $t^2(\sec rt)(\sec^2 rt + \operatorname{tg}^2 rt)$

29 $(1 - x^2y^2z^2) \cos xyz - 3xyz \operatorname{sen} xyz$

31 $w_{rrs} = w_{rsr} = w_{srr} = 36r^2s^2t - 6st^2e^{rt}$

33 Mostre que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = -\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

35 Mostre que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\cos x \operatorname{senh} y - \operatorname{sen} x \cosh y = -\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

37 Mostre que $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \cos(x - y) - \dfrac{1}{(x + y)^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}$.

39 Mostre que $w_{xx} = -c^2e^{-c^2t} \operatorname{sen} cx = w_{tt}$.

41 Mostre que $\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2[-k^2(\operatorname{sen} akt)(\operatorname{sen} kx)] = a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$.

43 Mostre que $u_x = 2x = v_y$ e $u_y = -2y = -v_x$.

45 Mostre que $u_x = e^x \cos y = v_y$ e $u_y = -e^x \operatorname{sen} y = -v_x$.

47 $w_{xx}, w_{xy}, w_{xz}, w_{yx}, w_{yy}, w_{yz}, w_{zx}, w_{zy}, w_{zz}$

49 Em deg/cm: (a) 200 (b) 400

51 Em volts/in.: (a) $-\dfrac{100}{9}$ (b) $\dfrac{50}{9}$ (c) $\dfrac{50}{9}$

53 $\dfrac{\partial C}{\partial x} = -36{,}58$ $(\mu g/m^3)/m$ é a taxa à qual a concentração varia na direção horizontal (2, 5).

$\dfrac{\partial C}{\partial y} = -0{,}229$ $(\mu g/m^3)/m$ é a taxa à qual a concentração varia na direção vertical em (2, 5).

55 (a) 3,57; 4,81; 4,98; $\lim\limits_{p \to \infty} \dfrac{p}{0{,}8 + 0{,}2p} = 5$

(b) $\dfrac{p(p-1)}{q + p(1 - q)^2}$

(c) $p(p-1)$, à medida que o número de processadores aumenta, a taxa de variação do *speedup* também aumenta.

57 (a) $\dfrac{\partial T}{\partial t} = T_0\omega e^{-\lambda x} \cos(\omega t - \lambda x)$ é a taxa de variação da temperatura em relação ao tempo à profundidade x.

$\dfrac{\partial T}{\partial x} = -T_0\lambda e^{-\lambda x}[\cos(\omega t - \lambda x) + \operatorname{sen}(\omega t - \lambda x)]$ é a taxa de variação da temperatura em relação à profundidade no instante t.

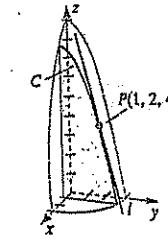
(b) Mostre que $k = \dfrac{2\lambda^2}{\omega}$.

59 (a) $\dfrac{\partial V}{\partial x} = -0{,}112y$ $m\ell/ano$ é a taxa à qual a capacidade pulmonar decresce com a idade para um adulto homem.

(b) $\dfrac{\partial V}{\partial y} = 27{,}63 - 0{,}112x$ $m\ell/ano$ é difícil de interpretar porque em geral encaramos a altura y de um adulto como fixa, em lugar de como função da idade x.

61 $c_k = -b_k a_{kk}$ para todo k.

63 $x = 1, y = t, z = -4t + 12$



65 0,0079600438, 0,0597349919; 0,0079600333, 0,0598334499

67 1,8369; 4,1743

EXERCÍCIOS 16.4

1 (a) $10y\,\Delta x - \Delta y - y\,\Delta x + 5(\Delta y)^2 - \Delta x\,\Delta y$

(b) $-y\,dx + (10y - x)\,dy$

(c) $\Delta x\,\Delta y - 5(\Delta y)^2$

Exercs. 3-6: As expressões $\in_1$ e $\in_2$ não são únicas.

3 $\in_1 = -3\,\Delta y$; $\in_2 = 4\,\Delta y$

5 $\in_1 = 3x\,\Delta x + (\Delta x)^2$; $\in_2 = 3y\,\Delta y + (\Delta y)^2$

7 $(3x^2 - 2xy)\,dx + (-x^2 + 6y)dy$

9 $(2x \operatorname{sen} y)\,dx + (x^2 \cos y + 3y^{1/2})dy$

11 $xe^{xy}(xy + 2)\,dx + (x^2e^{xy} - 2y^{-3})\,dy$

13 $[2x \ln(y^2 + z^2)]\,dx + \left(\dfrac{2x^2y}{y^2 + z^2}\right)dy + \left(\dfrac{2x^2z}{y^2 + z^2}\right)dz$

15 $\left[\dfrac{yz(y + z)}{(x + y + z)^2}\right]dx + \left[\dfrac{xz(x + z)}{(x + y + z)^2}\right]dy + \left[\dfrac{xy(x + y)}{(x + y + z)^2}\right]dz$

17 $(2xz - z^2t)\,dx + (4t^3)\,dy + (x^2 - 2xzt)\,dz + (12yt^2 - xz^2)\,dt$

19 7,38 21 1,87

23 (a) $\pm\dfrac{3}{5}$ m^2 (b) $\pm\dfrac{47}{80}$ m^3

25 (a) 365 kg (b) $\pm$ 11%

27 $\pm$ 0,0185 29 $\pm\dfrac{6W}{A - W}$ %

31 $\pm$ 7% 33 2,96

35 O erro máximo em z *não deve* exceder a $\pm$2,9 pés.

37 $\pm$ 1,7π in.^{2} 39 Use o Corolário (16.19).

43 $(x_1, y_1) = (1{,}8460, 1{,}1546)$

45 $\begin{bmatrix} f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \\ h_x & h_y & h_z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \\ \Delta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f \\ -g \\ -h \end{bmatrix}$

EXERCÍCIOS 16.5

1 $2x \operatorname{sen}(xy) + y(x^2 + y^2) \cos(xy)$;

$2y \operatorname{sen}(xy) + x(x^2 + y^2) \cos(xy)$

3 $2r(\ln s)^2 + 8r \ln s + 2s \ln s$;

$\dfrac{2r^2 \ln s}{s} + \dfrac{4r^2}{s} + 2r + 2r \ln s$

19 $x = at$, $y = bt$, $z = ct$, $\dfrac{a^3 + b^3 + c^3}{abc}$

21 0 23 1 25 $\{(x, y): x + y > 1\}$

27 $\{(x, y): x \geq 0 \text{ e } |y| \leq 1\}$

29 $\{(x, y, z): z^2 \neq x^2 + y^2\}$

31 $\{(x, y, z): x \geq 2, yz > 0\}$

33 0 35 $\dfrac{x^4 - 2x^2y^2 + y^4 - 4}{x^2 - y^2}$; $\{(x, y): x^2 \neq y^2\}$

37 $x^2 + 2x \operatorname{tg} y + \operatorname{tg}^2 y + 1$; $\left\{(x, y): y \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n\right\}$

39 e^{x^2+2y}; $(x^2 + 2y)(x^2 + 2y - 3)$; $e^{2t} + 2(t^2 - 3t)$

41 $2x^2 - 3xy - 2y^2 - x + 7y$

43 $\lim\limits_{(x, y, z, w) \to (a, b, c, d)} f(x, y, z, w) = L$ significa que para todo $\in > 0$ $\delta > 0$ tal que, se

$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 + (w-d)^2} < \delta$

então $|f(x, y, z, w) - L| < \in$.

EXERCÍCIOS 16.3

1 $f_x(x, y) = 8x^3y^3 - y^2$; $f_y(x, y) = 6x^4y^2 - 2xy + 3$

3 $f_r(r, s) = \dfrac{r}{(r^2 + s^2)^{1/2}}$; $f_s(r, s) = \dfrac{s}{(r^2 + s^2)^{1/2}}$

5 $f_x(x, y) = e^y + y \cos x$; $f_y(x, y) = xe^y + \operatorname{sen} x$

7 $f_t(t, v) = \dfrac{v}{t^2 - v^2}$; $f_v(t, v) = \dfrac{t}{t^2 - v^2}$

9 $f_x(x, y) = \cos\dfrac{x}{y} - \dfrac{x}{y}\operatorname{sen}\dfrac{x}{y}$; $f_y(x, y) = \left(\dfrac{x}{y}\right)^2 \operatorname{sen}\dfrac{x}{y}$

11 $f_x(x, y, z) = 6xz + y^2$; $f_y(x, y, z) = 2xy$; $f_z(x, y, z) = 3x^2$

13 $f_r(r, s, t) = 2re^{2s} \cos t$; $f_s(r, s, t) = 2r^2e^{2s} \cos t$; $f_t(r, s, t) = -r^2e^{2s} \operatorname{sen} t$

15 $f_x(x, y, z) = e^z - ye^x$; $f_y(x, y, z) = -e^x - ze^{-y}$; $f_z(x, y, z) = xe^z + e^{-y}$

17 $f_q(q, v, w) = \dfrac{v}{2\sqrt{qv}\sqrt{1 - qv}}$;

$f_v(q, v, w) = \dfrac{q}{2\sqrt{qv}\sqrt{1 - qv}} + w \cos vw$;

$f_w(q, v, w) = v \cos vw$

19 $w_{xy} = w_{yx} = 4y^3 - 12xy^2$

21 $w_{xy} = w_{yx} = -6x^2e^{-2y} + 2y^{-3} \operatorname{sen} x$

23 $w_{xy} = w_{yx} = \dfrac{2xz}{y^2} \operatorname{senh}\dfrac{z}{y}$

25 $18xy^2 + 16y^3z$

27 $t^2(\sec rt)(\sec^2 rt + \operatorname{tg}^2 rt)$

29 $(1 - x^2y^2z^2) \cos xyz - 3xyz \operatorname{sen} xyz$

31 $w_{rrs} = w_{rsr} = w_{srr} = 36r^2s^2t - 6st^2e^{rt}$

33 Mostre que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = -\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

35 Mostre que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\cos x \operatorname{senh} y - \operatorname{sen} x \cosh y = -\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

37 Mostre que $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \cos(x - y) - \dfrac{1}{(x + y)^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}$.

39 Mostre que $w_{xx} = -c^2e^{-c^2t} \operatorname{sen} cx = w_t$.

41 Mostre que $\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2[-k^2(\operatorname{sen} akt)(\operatorname{sen} kx)] = a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$.

43 Mostre que $u_x = 2x = v_y$ e $u_y = -2y = -v_x$.

45 Mostre que $u_x = e^x \cos y = v_y$ e $u_y = -e^x \operatorname{sen} y = -v_x$.

47 $w_{xx}, w_{xy}, w_{xz}, w_{yx}, w_{yy}, w_{yz}, w_{zx}, w_{zy}, w_{zz}$

49 Em deg/cm: (a) 200 (b) 400

51 Em volts/in.: (a) $-\dfrac{100}{9}$ (b) $\dfrac{50}{9}$ (c) $\dfrac{50}{9}$

53 $\dfrac{\partial C}{\partial x} \approx -36{,}58$ (μg/m^3)/m é a taxa à qual a concentração varia na direção horizontal (2, 5).

$\dfrac{\partial C}{\partial y} \approx -0{,}229$ (μg/m^3)/m é a taxa à qual a concentração varia na direção vertical em (2, 5).

55 (a) 3,57; 4,81; 4,98; $\lim\limits_{p \to \infty} \dfrac{p}{0{,}8 + 0{,}2p} = 5$

(b) $\dfrac{p(p - 1)}{q + p(1 - q)^2}$

(c) $p(p - 1)$, à medida que o número de processadores aumenta, a taxa de variação do *speedup* também aumenta.

57 (a) $\dfrac{\partial T}{\partial t} = T_0 \omega e^{-\lambda x} \cos(\omega t - \lambda x)$ é a taxa de variação da temperatura em relação ao tempo à profundidade x.

$\dfrac{\partial T}{\partial x} = -T_0 \lambda e^{-\lambda x}[\cos(\omega t - \lambda x) + \operatorname{sen}(\omega t - \lambda x)]$ é a taxa de variação da temperatura em relação à profundidade no instante t.

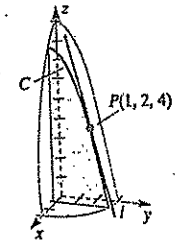
(b) Mostre que $k = \dfrac{2\lambda^2}{\omega}$.

59 (a) $\dfrac{\partial V}{\partial x} = -0{,}112y$ mℓ/ano é a taxa à qual a capacidade pulmonar decresce com a idade para um adulto homem.

(b) $\dfrac{\partial V}{\partial y} = 27{,}63 - 0{,}112x$ mℓ/ano é difícil de interpretar porque em geral encaramos a altura y de um adulto como fixa, em lugar de como função da idade x.

61 $c_k = -b_k a_{kk}$ para todo k.

63 $x = 1, y = t, z = -4t + 12$



65 0,0079600438, 0,0597349919; 0,0079600333, 0,0598334499

67 1,8369; 4,1743

EXERCÍCIOS 16.4

1 (a) $10y\,\Delta x - \Delta y - y\,\Delta x + 5(\Delta y)^2 - \Delta x\,\Delta y$

(b) $-y\,dx + (10y - x)\,dy$

(c) $\Delta x\,\Delta y - 5(\Delta y)^2$

Exercs. 3-6: As expressões $\in_1$ e $\in_2$ não são únicas.

3 $\in_1 = -3\,\Delta y$; $\in_2 = 4\,\Delta y$

5 $\in_1 = 3x\,\Delta x + (\Delta x)^2$; $\in_2 = 3y\,\Delta y + (\Delta y)^2$

7 $(3x^2 - 2xy)\,dx + (-x^2 + 6y)dy$

9 $(2x \operatorname{sen} y)\,dx + (x^2 \cos y + 3y^{1/2})dy$

11 $xe^y(xy + 2)\,dx + (x^3e^y - 2y^{-3})\,dy$

13 $[2x \ln(y^2 + z^2)]\,dx + \left(\dfrac{2x^2y}{y^2 + z^2}\right)dy + \left(\dfrac{2x^2z}{y^2 + z^2}\right)dz$

15 $\left[\dfrac{yz(y + z)}{(x + y + z)^2}\right]dx + \left[\dfrac{xz(x + z)}{(x + y + z)^2}\right]dy + \left[\dfrac{xy(x + y)}{(x + y + z)^2}\right]dz$

17 $(2xz - z^2t)\,dx + (4t^3)\,dy + (x^2 - 2xzt)\,dz + (12yt^2 - xz^2)\,dt$

19 7,38 21 1,87

23 (a) $\pm\dfrac{3}{5}$ m^2 (b) $\pm\dfrac{47}{80}$ m^3

25 (a) 365 kg (b) $\pm$ 11%

27 $\pm$ 0,0185 29 $\pm\dfrac{6W}{A - W}$ %

31 $\pm$ 7% 33 2,96

35 O erro máximo em z *não deve* exceder a $\pm$ 2,9 pés.

37 $\pm$ 1,7π in.^{2} 39 Use o Corolário (16.19).

43 $(x_0, y_0) = (1{,}8460, 1{,}1546)$

45 $\begin{bmatrix} f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \\ h_x & h_y & h_z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \\ \Delta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f \\ -g \\ -h \end{bmatrix}$

EXERCÍCIOS 16.5

1 $2x \operatorname{sen}(xy) + y(x^2 + y^2)\cos(xy)$;

$2y \operatorname{sen}(xy) + x(x^2 + y^2)\cos(xy)$

3 $2r(\ln s)^2 + 8r \ln s + 2s \ln s$;

$\dfrac{2r^2 \ln s}{s} + \dfrac{4r^2}{s} + 2r + 2r \ln s$

EXERCÍCIOS 15.5

1 $\frac{4t}{(4t^2+9)^{1/2}}; \frac{6}{(4t^2+9)^{1/2}}; \frac{6}{(4t^2+9)^{3/2}}$

3 $\frac{6t(t^2+2)}{(t^4+4t^2+1)^{1/2}}; \frac{6(t^4+t^2+1)^{1/2}}{(t^4+4t^2+1)^{1/2}}; \frac{2(t^4+t^2+1)^{1/2}}{3(t^4+4t^2+1)^{3/2}}$

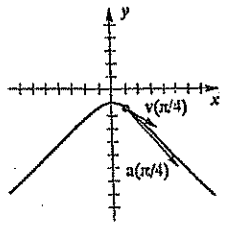
5 $\frac{t}{(1+t^2)^{1/2}}; \frac{2+t^2}{(1+t^2)^{1/2}}; \frac{2+t^2}{(1+t^2)^{1/2}}$

7 $\frac{-65 \operatorname{sen} t \cos t}{(16 \operatorname{sen}^2 t + 81 \cos^2 t + 1)^{1/2}}; \frac{(81 \operatorname{sen}^2 t + 16 \cos^2 t + 1.296)^{1/2}}{(16 \operatorname{sen}^2 t + 81 \cos^2 t + 1)^{1/2}}; \frac{(81 \operatorname{sen}^2 t + 16 \cos^2 t + 1.296)^{1/2}}{(16 \operatorname{sen}^2 t + 81 \cos^2 t + 1)^{3/2}}$;

9 $\frac{36}{\sqrt{5}} \approx 16{,}10; \frac{18}{\sqrt{5}} \approx 8{,}05$

15.7 EXERCÍCIOS DE REVISÃO

1



3 $2\mathbf{i} + (8t - 4t^3)\mathbf{j}$; $2\mathbf{i} + (8 - 12t^2)\mathbf{j}$; $2|4|\sqrt{17 - 16t^2 + 4t^4}$

5 (a) $\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$ (b) $x = t, y = 1 + t, z = 1 + t$

7 $0, \frac{10}{3}$

9 $3\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} + 4t^3\mathbf{k}$, $6t\mathbf{j} + 12t^2\mathbf{k}$, $\sqrt{34}$; $3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $6\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$, $\sqrt{34}$

11 $2\mathbf{i} + \frac{1}{4}\mathbf{j} - \mathbf{k}$

13 $\mathbf{r}(t) = (3t - 4)\mathbf{i} + (2t^3 - 8t + 9)\mathbf{j} + \left(\frac{5}{2}t^2 - t\right)\mathbf{k}$

17 $\frac{108}{82^{3/2}} \approx 0{,}15$ 19 $\pm\frac{\sqrt{36 + \sqrt{3.096}}}{90} \approx \pm 1{,}009$

21 $\frac{5}{6}\sqrt{5} \approx 1{,}86$ 23 $\frac{-8 \cos 2t \operatorname{sen} 2t + \operatorname{sen} t \cos t}{(4 \cos^2 2t + \operatorname{sen}^2 t)^{1/2}}; \frac{2|\cos 2t \cos t + 2 \operatorname{sen} 2t \operatorname{sen} t|}{(4 \cos^2 2t + \operatorname{sen}^2 t)^{1/2}}$

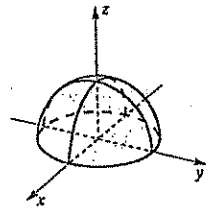
CAPÍTULO 16

EXERCÍCIOS 16.1

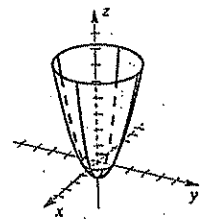
1 $\mathbb{R}^2; -29, 6, -4$ 3 $\{(u, v): u = 2v\}; -\frac{3}{2}, \frac{4}{9}, 0$

5 $\{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 \le 25\}$; 4, $2\sqrt{3}$

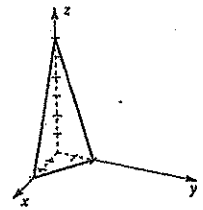
7



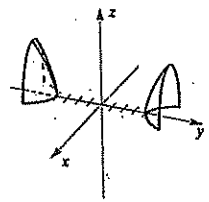
9



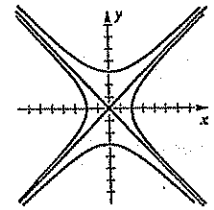
11



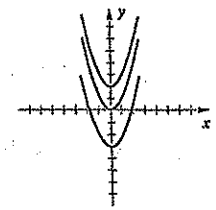
13



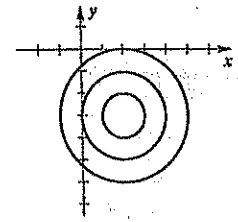
15



17



19



21 $y \operatorname{arctg} x = \pi$

23 $x^2 + 4y^2 - z^2 = -1$

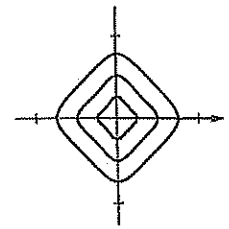
25 (a) Elipses (b) Nenhuma (c) Nenhuma

27 (a) $k > 8$; nenhuma; $k = 8$; o ponto $(0, 0, 8)$; $0 < k < 8$; círculos.

(b) Nenhuma (c) Nenhuma

29 (d) 31 (a) 33 (f)

35



37 Nenhum; a origem; a esfera de centro $(0, 0, 0)$ e raio 2.

39 Planos com intercepto-x k, intercepto-y $\frac{k}{2}$, intercepto-z $\frac{k}{3}$.

41 Nenhum; o eixo-z; o cilindro circular reto tendo o eixo-z como eixo e raio 2.

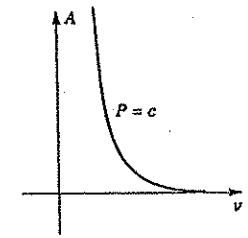
43 (a) círculos com centro na origem.

(b) $x^2 + y^2 = 100$

45 Cinco; esferas com centros na origem; a força F é constante se (x, y, z) se move ao longo de uma superfície de nível.

47 (a) $P = kAv^3, k > 0$

(b) Uma curva de nível típica (ver figura) mostra as combinações de áreas e velocidades de vento que resultam em uma potência fixa $P = c$.



(c) $Av^3 = 36 \cdot 10^3\pi$

49 Exemplo: 5'11'' e 175 lb são aproximadamente 180 cm e 80 kg. Pelo gráfico, temos uma área de aproximadamente 2,0 m^2. Usando a fórmula, obtemos $S \approx 1{,}996$ m^2.

EXERCÍCIOS 16.2

1 $-\frac{2}{3}$ 3 1 5 0 7 0 9 $\frac{1}{2}$

Exercs. 11-20: A resposta dá equações de possíveis trajetórias, e seus valores resultantes, para usar em (16.4).

11 $x = 0, -\frac{1}{2}; y = 0, 2$ 13 $y - 2 = m(x - 1), \frac{m}{1 + m^2}$

15 $y = 2x, \frac{12}{31}; y = 0, 0$ 17 $x = y = 0, 0; x = y = z, 1$

5 $3x^2e^{3y} + ye^x + 4x^3y^2$; $3x^3e^{3y} + e^x + 2x^4y$

7 $3\ln(uvt) + 3 + \frac{vt}{u}$; $t\ln(uvt) + \frac{3u}{u} + t$;

$v\ln(uvt) + \frac{3u}{t} + v$

9 $-34y + 6r - 24s$ 11 $\frac{-3(1+t^2)}{(t+1)^4}$

13 $4\operatorname{sen}^3 t\cos t + \operatorname{tg} 4t\operatorname{sen} t - 4\cos t\sec^2 4t$

15 $\frac{6x^2 + 2xy}{x^2 + 3y^2}$ 17 $\frac{12\sqrt{xy} + y}{6\sqrt{xy} - x}$

19 $-\frac{2z^3 + 2xy^2}{6xz^2 - 6yz + 4}$; $-\frac{2x^2y - 3z^2}{6xz^2 - 6yz + 4}$

21 $-\frac{e^{yz} - 2yze^{xz} + 3yze^{xy}}{xye^{yz} - 2xye^{xz} + 3e^{xy}}$;

$-\frac{xze^{yz} - 2e^{xz} + 3xze^{xy}}{xye^{yz} - 2xye^{xz} + 3e^{xy}}$

23 (a) $0{,}88\pi \approx 2{,}76\ \text{cm}^3/\text{min}$

(b) $0{,}3\pi \approx 0{,}94\ \text{cm}^2/\text{min}$

25 $\frac{dT}{dt} = \frac{V}{k}\frac{dP}{dt} + \frac{P}{k}\frac{dV}{dt}$ 27 $-6{,}4\ \text{cm}^3/\text{min}$

29 $762{,}6\ \text{cm}^2/\text{ano}$ 33 3 35 0

EXERCÍCIOS 16.6

1 $-\frac{4}{5}\mathbf{i} + \frac{3}{5}\mathbf{j}$ 3 $3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

5 $-8\mathbf{i} + \mathbf{j} - 9\mathbf{k}$ 7 $-\frac{10}{\sqrt{2}} \approx -7{,}07$

9 $-\frac{1}{8\sqrt{13}} \approx -0{,}03$ 11 $\frac{67}{8\sqrt{26}} \approx 1{,}64$

13 $\frac{1}{2\sqrt{26}} \approx 0{,}098$ 15 $16\sqrt{14} \approx 59{,}87$

17 $\frac{15e^{-2}}{\sqrt{35}} \approx 0{,}34$ 19 $-\frac{12}{\sqrt{10}} \approx -3{,}79$

21 (a) $-\frac{28}{\sqrt{26}}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{j}$; $\sqrt{80}$

(c) $-\frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{j}$; $-\sqrt{80}$

23 (a) $-\frac{25}{7\sqrt{22}}$ (b) $-\frac{2}{\sqrt{14}}\mathbf{i} + \frac{3}{\sqrt{14}}\mathbf{j}$; $+\frac{1}{\sqrt{14}}\mathbf{k}$; 1

(c) $\frac{2}{\sqrt{14}}\mathbf{i} - \frac{3}{\sqrt{14}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{14}}\mathbf{k}$; -1

25 (a) $-\frac{28}{\sqrt{2}}$ (b) A direção de $-12\mathbf{i} - 16\mathbf{j}$

(c) Ache a direção $12\mathbf{i} + 16\mathbf{j}$

(d) A direção de $4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

27 (a) $-\frac{178}{\sqrt{14}}$ (b) A direção de $4\mathbf{i} - 8\mathbf{j} = 54\mathbf{k}$

(c) $\sqrt{2.996} \approx 54{,}8$

29 (b) $\frac{\partial T}{\partial r}$ é a taxa de variação da temperatura na direção normal à fronteira circular.

31 (b) $\nabla f(1,2) \approx 1{,}00003333\mathbf{i} - 0{,}111112345\mathbf{j}$;

$\nabla f(1,2) = \mathbf{i} - \frac{1}{9}\mathbf{j}$

33 0,1294 41 (b) $5 + \sqrt{3}$

EXERCÍCIOS 16.7

1 $16(x-2) + 6(y+3) + 6(z-1) = 0$; $x = 2 + 16t$, $y = -3 + 6t$, $z = 1 + 6t$

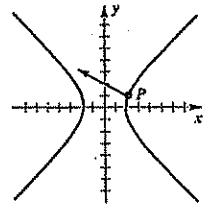
3 $16(x+2) + 18(y+1) + (z-25) = 0$; $x = -2 + 16t$, $y = -1 + 18t$, $z = 25 + t$

5 $4(x+5) - 3(y-5) + 20(z-1) = 0$; $x = -5 + 4t$, $y = 5 - 3t$, $z = 1 + 20t$

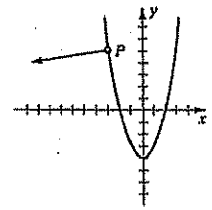
7 $x + \sqrt{3}\left(y - \frac{\pi}{3}\right) + (z-1) = 0$; $x = t$, $y = \frac{\pi}{3} + \sqrt{3}t$, $z = 1 + t$

9 $-x + \frac{1}{2}(y-2) - (z-1) = 0$; $x = -t$, $y = 2 + \frac{1}{2}t$, $z = 1 - t$

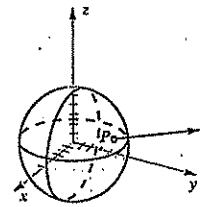
11



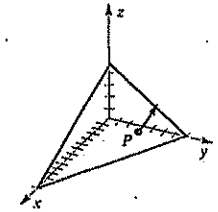
13



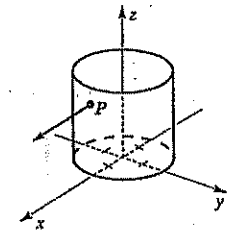
15



17



19



25 $\left(\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(-\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$

31 (1,2718; 1,1787)

EXERCÍCIOS 16.8

1 Máx: $f(-2,1) = 4$ 3 Mín: $f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2}$

5 Mín: $f(0,0) = 0$

7 SP: $(0,0,f(0,0))$; mín: $f(1,-1) = -1$

9 SP: $(3,-2,f(3,-2))$,

11 SP: $(2,4,f(2,4))$, $(-3,-4,f(-3,-4))$;

mín: $f(2,-4) = -\frac{266}{3}$; máx: $f(-3,4) = \frac{617}{6}$

13 SP: $(0,0,f(0,0))$; mín: $f(4,-8) = -64$;

máx: $f(-1,2) = -\frac{3}{2}$

15 SP: $(-2,-\sqrt{3},f(-2,-\sqrt{3}))$;

mín: $f(-2,\sqrt{3}) = -48 - 6\sqrt{3}$

17 Não há extremos nem pontos de sela

19 Mín: $f(\sqrt[3]{2}, 2\sqrt[3]{2}) = \frac{12}{\sqrt[3]{2}}$

21 $(0,0)$, $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$; mín: $f(0,0) = 0$;

máx: $f(0, \pm 1) = \frac{3}{e}$

23 Mín: $f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2}$;

máx: $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = 1 + \sqrt{2}$

25 Mín: $f(0,0) = 0$; máx: $f(4,3) = 67$

27 Mín: $f(1,2) = f(1,-1) = -1$;

máx: $f(-1,-2) = 13$

29 $\frac{1}{\sqrt{26}}$

31 $\left(\frac{2}{\sqrt[4]{12}}, \sqrt[4]{12}, \pm\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{12}}\right)$,

$\left(-\frac{2}{\sqrt[4]{12}}, -\sqrt[4]{12}, \pm\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{12}}\right)$

33 Base quadrada, altura $\frac{1}{2}$ do comprimento do lado da base.

35 $\frac{8}{\sqrt{3}}, \frac{6}{\sqrt{3}}, \frac{12}{\sqrt{3}}$ 37 $1, \frac{4}{3}, 4$

39 Base quadrada de lado $\sqrt[3]{4}$ cm, altura $2\sqrt[3]{4}$ cm

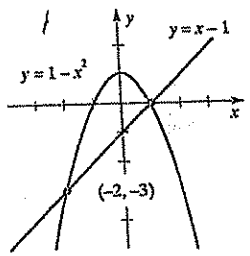
41 (18 cm) × (18 cm) × (36 cm)

43 $\left(2 - \frac{2}{3}\sqrt{3},\ 2 - \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$

47 $y = \frac{1}{2}x + \frac{8}{3}$

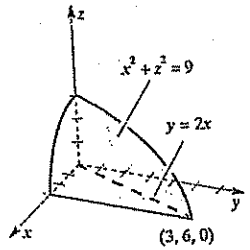
49 $y = mx + b$ com $m \approx 1{,}23$, $b \approx -18{,}09$; inclinação de 68.

19 Parabolóide $z = x^2 + y^2$

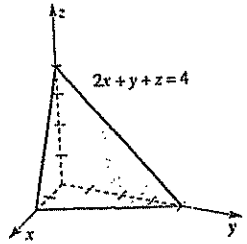


21 $\frac{34}{3}$

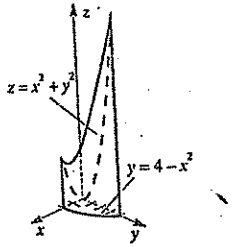
23 $\int_0^3 \int_0^{2x} (9 - x^2)^{1/2}\, dy\, dx = 18$



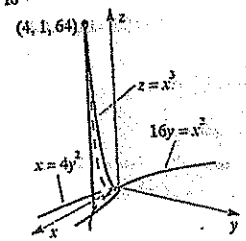
25 $\int_0^2 \int_0^{4-2x} (4 - 2x - y)\, dy\, dx = \frac{16}{3}$



27 $\int_0^2 \int_0^{4-x^2} (x^2 + y^2)\, dy\, dx = \frac{832}{35}$



29 $\int_0^4 \int_{x^2/16}^{\sqrt{x/2}} x^3\, dy\, dx = \frac{128}{9}$



31 $\int_{-1}^{2} \int_{2-x}^{4-x^2} (x^2 + 4)\, dy\, dx = \frac{423}{20}$ 33 0,42

EXERCÍCIOS 17.3

1 $2\int_0^{\pi/2} \int_0^{4 \operatorname{sen}\theta} r\, dr\, d\theta$ 3 $2\int_0^{2\pi/3} \int_0^{1 + 2\cos\theta} r\, dr\, d\theta$

5 $4\int_0^{\pi/4} \int_0^{2\sqrt{\cos 2\theta}} r\, dr\, d\theta$

7 $2\int_0^{\pi/3} \int_0^{4 \operatorname{sen} 3\theta} r\, dr\, d\theta = \frac{4\pi}{3}$

9 $2\int_{2\pi/3}^{\pi} \int_3^{2 - 2\cos\theta} r\, dr\, d\theta = \frac{9}{2}\sqrt{3} - \pi \approx 4{,}65$

11 $2\int_0^{\pi/4} \int_0^{3\sqrt{\cos 2\theta}} r\, dr\, d\theta = \frac{9}{2}$

13 $\int_0^{2\pi} \int_0^{2} (r^3)\, r\, dr\, d\theta = \frac{64\pi}{5}$

15 $\int_0^{2\pi} \int_a^{b} (\cos^2\theta)\, r\, dr\, d\theta = \frac{\pi}{2}(b^2 - a^2)$

17 $\int_0^{\pi/4} \int_0^{3 \sec\theta} (r)\, r\, dr\, d\theta =$

$\frac{9}{2}[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)] = 10{,}33$

19 $\int_0^{\pi} \int_0^{a} e^{-r^2}\, r\, dr\, d\theta = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-a^2})$

21 $\int_0^{\pi/4} \int_{\sec\theta}^{2 \sec\theta} \left(\frac{1}{r}\right) r\, dr\, d\theta = \ln(\sqrt{2} + 1) \approx 0{,}88$

23 $\int_0^{\pi/2} \int_0^{2} \cos(r^2)\, r\, dr\, d\theta = \frac{\pi}{4} \operatorname{sen} 4 \approx -0{,}59$

25 $8\int_0^{\pi/2} \int_3^{5} (25 - r^2)^{1/2}\, r\, dr\, d\theta = \frac{256\pi}{3}$

27 $2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} (r)\, r\, dr\, d\theta = \frac{64}{9}$

29 $4\int_0^{\pi/2} \int_0^{4 \operatorname{sen}\theta} (16 - r^2)^{1/2}\, r\, dr\, d\theta =$

$\frac{128}{9}(3\pi - 4) = 77{,}15$

31 π 33 7,307

EXERCÍCIOS 17.4

1 $4\int_0^1 \int_0^1 \sqrt{\left(-\frac{x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\right)^2 + 1}\, dy\, dx$

3 $4\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9 - x^2}} \sqrt{\left(\frac{8x}{3\sqrt{16x^2 + 9y^2 + 144}}\right)^2 + \left(\frac{3y}{2\sqrt{16x^2 + 9y^2 + 144}}\right)^2 + 1}\, dy\, dx$

5 $\int_0^1 \int_0^1 \sqrt{(x)^2 + (1)^2 + 1}\, dy\, dx =$

$\frac{1}{2}[\sqrt{3} + 2\ln(1 + \sqrt{3}) - \ln 2] = 1{,}52$

7 $\pi ck^2 \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{c}\right)^2}$

9 $\frac{\pi}{6}(5^{3/2} - 1) \approx 5{,}33$

11 $2a^2(\pi - 2)$ 13 247,4 m² 15 1,24

EXERCÍCIOS 17.5

1 $\frac{39}{2}$ 3 $-\frac{1}{12}$ 5 $\frac{513}{8}$

7 $\int_0^6 \int_0^{(6-x)/2} \int_0^{(6-x-2y)/3} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx;$

$\int_0^3 \int_0^{6-2y} \int_0^{(6-x-2y)/3} f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy;$

$\int_0^3 \int_0^{(6-2y)/3} \int_0^{(6-2y-3z)} f(x, y, z)\, dx\, dz\, dy;$

$\int_0^2 \int_0^{(6-3z)/2} \int_0^{6-2y-3z} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz;$

$\int_0^6 \int_0^{(6-x)/3} \int_0^{(6-x-3z)/2} f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx;$

$\int_0^2 \int_0^{6-3z} \int_0^{(6-x-3z)/2} f(x, y, z)\, dy\, dx\, dz$

9 $\int_{-3/2}^{3/2} \int_{-\sqrt{9-4x^2}}^{\sqrt{9-4x^2}} \int_0^{9-4x^2-y^2} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx;$

$\int_{-3}^{3} \int_{-\sqrt{9-y^2}/2}^{\sqrt{9-y^2}/2} \int_0^{9-4x^2-y^2} f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy;$

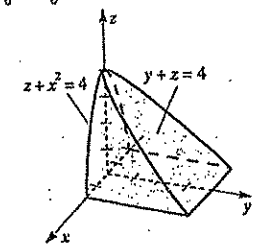
$\int_{-3}^{3} \int_0^{9-y^2} \int_{-\sqrt{9-z-y^2}/2}^{\sqrt{9-z-y^2}/2} f(x, y, z)\, dx\, dz\, dy;$

$\int_0^9 \int_{-\sqrt{9-z}}^{\sqrt{9-z}} \int_{-\sqrt{9-z-y^2}/2}^{\sqrt{9-z-y^2}/2} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz;$

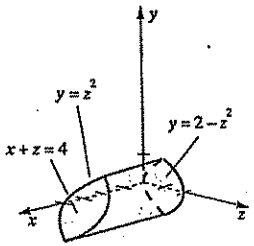
$\int_{-3/2}^{3/2} \int_0^{9-4x^2} \int_{-\sqrt{9-4x^2-z}}^{\sqrt{9-4x^2-z}} f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx;$

$\int_0^9 \int_{-\sqrt{9-z/2}}^{\sqrt{9-z/2}} \int_{-\sqrt{9-4x^2-z}}^{\sqrt{9-4x^2-z}} f(x, y, z)\, dy\, dx\, dz;$

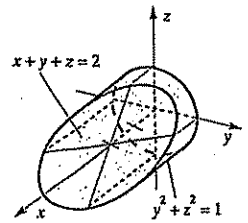
11 $2\int_0^4 \int_0^{4-y} \int_0^{\sqrt{4-z}} dx\, dz\, dy = \frac{128}{5}$



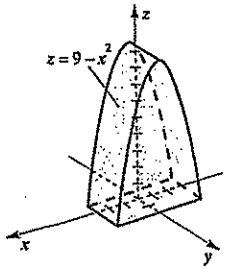
13 $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2-z^2}\int_{0}^{4-z} dx\,dy\,dz = \frac{32}{3}$



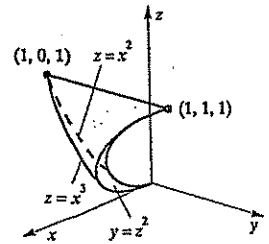
15 $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\int_{0}^{2-y-z} dx\,dz\,dy = 2\pi$



17 $\int_{-3}^{3}\int_{-1}^{2}\int_{0}^{9-x^2} dz\,dy\,dx = 108$



19 $\int_{0}^{1}\int_{x^3}^{x^2}\int_{0}^{z^2} dy\,dz\,dx = \frac{1}{70}$



21 $\frac{1}{6}abc$

23 A região delimitada pelos planos $z = 0$, $z = 1$, $x = 2$; $x = 3$ e os cilindros $y = \sqrt{1 - z}$ e $y = \sqrt{4 - z}$.

25 A região sob o plano $z = x + y$ e sobre a porção do plano-xy delimitada pela parábola $y = x^2$ e pela reta $y = 2x$.

27 A região delimitada pelo paraboloide $z = x^2 + y^2$ e pelos $z = 1$ e $z = 2$.

29 $\int_{0}^{1}\int_{0}^{e^{-x}} y^2\,dy\,dx$

31 $\int_{0}^{2}\int_{0}^{4-2y}\int_{0}^{4-x-2y} (x^2 + y^2)\,dz\,dx\,dy$

33 $1{,}1685 \times 10^9$ kg 35 0,77

EXERCÍCIOS 17.6

1 $m = \frac{2.349}{20}$; $\bar{x} = \frac{1.290}{203}$, $\bar{y} = \frac{38}{29}$

3 $m = 8k$ (k constante de proporcionalidade); $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = \frac{8}{3}$

5 $m = \frac{1}{4}(1 - e^{-2}) \approx 0{,}22$; $\bar{x} = 0$, $\bar{y} \approx \frac{4(1 - e^{-3})}{9(1 - e^{-2})} \approx 0{,}49$

7 $m = 4\ln(\sqrt{2} + 1) - 4\ln(\sqrt{2} - 1) - \pi \approx 3{,}91$; $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = \frac{16 - \pi}{4m} \approx 0{,}82$

9 $3^5\left(\frac{31}{28}\right)$; $3^7\left(\frac{19}{8}\right)$; $3^5\left(\frac{1259}{56}\right)$

11 $64k$; $\frac{32}{3}k$; $\frac{224}{3}k$

13 (δ = densidade) (a) $\frac{1}{3}a^4\delta$

(b) $\frac{1}{12}a^4\delta$ (c) $\frac{1}{6}a^4\delta$

15 $\frac{a}{\sqrt{3}}$

17 $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = \frac{7}{12}a$ (com centro fixo em O)

19 $m = \int_{0}^{4}\int_{-\sqrt{x/2}}^{\sqrt{x-4z^2}}\int_{-\sqrt{x-4z^2}}^{\sqrt{x-4z^2}} (x^2 + z^2)\,dy\,dz\,dx$; as integrais para M_{yz}, M_{xz} e M_{xy} têm os mesmos limites, mas os integrandos são $x(x^2 + z^2)$, $y(x^2 + z^2)$ e $z(x^2 + z^2)$, respectivamente.

21 $m = \int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dz\,dy\,dx$; a integral para M_{xy} tem os mesmos limites, mas o integrando é z. Por simetria, $\bar{x} = \bar{y} = 0$.

23 (a) $m = \int_{0}^{3}\int_{0}^{9-x^2}\int_{0}^{6-2x} dy\,dz\,dx$; as integrais para M_{yz}, M_{xz} e M_{xy} têm os mesmos limites, mas os integrandos são x, y e z, respectivamente.

(b) $m = \frac{135}{2}$, $M_{yz} = \frac{567}{10}$; $M_{xz} = \frac{729}{5}$; $M_{xy} = \frac{2.673}{10}$; $\bar{x} = \frac{21}{25}$, $\bar{y} = \frac{54}{24}$, $\bar{z} = \frac{99}{25}$

25 $I_z = \int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + z^2)\,dz\,dy\,dx$

27 $I_z = \int_{0}^{a} = \int_{0}^{b(1-x/a)}\int_{0}^{c(1-x/a-y/b)} (x^2 + y^2)\,\delta\,dz\,dy\,dx$

Exercs. 29-32: As respostas não são únicas.

29 1,2 31 1,3

EXERCÍCIOS 17.7

1 (a) Cilindro circular reto de raio 4 e eixo ao longo do eixo-z.

(b) O plano xy

3 O plano paralelo ao plano-yz com intercepto-x -3.

5 Paraboloide com vértice (0, 0, 0) e abertura para cima.

7 Cilindro circular reto com traço $x^2 + (y - 3)^2 = 9$ no plano-xy.

9 O cone $z^2 = 4x^2 + 4y^2$.

11 Esfera de centro na origem e raio 3.

13 Cilindro com traço $y^2 = 2x$ no plano-xy e geratrizes paralelas ao eixo-z.

15 $r^2 + z^2 = 4$ 17 $3r\cos\theta + r\,\text{sen}\,\theta - 4z = 12$

19 $r = 2$ 21 $r = 2z$

25 $\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{4}\int_{0}^{16-r^2} f(r, \theta, z)\,r\,dz\,dr\,d\theta$

27 $\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{3}\int_{0}^{4} f(r, \theta, z)\,r\,dz\,dr\,d\theta + \int_{0}^{2\pi}\int_{3}^{4}\int_{0}^{\sqrt{25-r^2}} f(r, \theta, z)\,r\,dz\,dr\,d\theta$

29 (a) 8π (b) $\left(0, 0, \frac{4}{3}\right)$

31 (a) $\frac{1}{2}\pi h a^4\delta$ (b) $\pi h a^2\left(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{3}h^2\right)\delta$

33 $\frac{1}{4}k\pi^2a^4$ 35 $\frac{1}{8}k\pi^2a^6$

37 215.360 kg 39 $\frac{7\pi}{16}$

EXERCÍCIOS 17.8

1 (a) $(0, 2, 2\sqrt{3})$ (b) $\left(2, \frac{\pi}{2}, 2\sqrt{3}\right)$

3 (a) $\left(\sqrt{10}, \arccos\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\right), \frac{\pi}{4}\right)$

(b) $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, -2\sqrt{2}\right)$

5 (a) Esfera de centro O e raio 3.

(b) Meio cone de vértice O e ângulo no vértice $\frac{\pi}{3}$.

(c) Semiplano com bordo no eixo-z e fazendo um ângulo de $\frac{\pi}{3}$ com o plano-xz.

7 Efera de raio 2 e centro (0, 0, 2).

9 Plano $x = 3$

11 Esfera de raio 3 e centro (3, 0, 0)

13 Plano $y = 5$

15 Cilindro circular reto de raio 5 e eixo ao longo do eixo-z.

17 Cone $x^2 + y^2 = 4z^2$

19 Paraboloide $6z = x^2 + y^2$

21 $\rho = 2$

23 $\rho(3 \operatorname{sen}\phi \cos\theta + \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta - 4\cos\phi) = 12$

25 $\rho = 2 \csc\phi$ 27 $\operatorname{tg}^2\phi = 4$

29 $\rho^2(\operatorname{sen}^2\phi \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\phi) \doteq 9$

31 $\frac{1}{2}k\pi a^4$ (k constante de proporcionalidade); centro de massa a $\frac{2}{5}a$ da base ao longo do eixo de simetria.

33 $\frac{2}{9}k\pi a^6$ 35 $\frac{16\pi}{3}$ 37 $\frac{124}{4}k\pi$

39 $\frac{256\pi}{5}(\sqrt{2} - 1) \approx 66{,}63$

41 (a) $(-3\sqrt{2},\ 3\sqrt{6},\ -6\sqrt{2})$

(b) θ deve ser aumentado de $105°$, ϕ reduzido de $\left(45 + \operatorname{arctg}\frac{8}{\sqrt{128}}\right) \approx 80{,}26°$, e L aumentado de $\sqrt{192} - 12 \approx 1{,}86$

EXERCÍCIOS 17.9

1 (a) Retas verticais; retas horizontais;

(b) $x = \frac{1}{3}u,\ y = \frac{1}{5}v$

3 (a) Retas com coeficientes angulares 1 e $-\frac{2}{3}$

(b) $x = \frac{3}{5}u + \frac{1}{5}v,\ y = -\frac{2}{5}u + \frac{1}{5}v$

5 (a) Retas verticais, retas com coeficientes angular -1.

(b) $x = u^{1/3},\ y = v - u^{1/3}$

7 (a) Retas verticais; retas horizontais.

(b) $x = \ln u,\ y = \ln v$

9 (a) O retângulo de vértices (0, 0), (6, 0), (6, 5), (0, 5).

(b) A elipse $\frac{u^2}{9} + \frac{v^2}{25} = 1$

11 (a) O triângulo de vértices (0, 0), (−1, 3), (2, 4).

(b) A reta $-u + 3v = 5$

13 $4u^2 + 4v^2$ 15 $2u(uv - 1)e^{-(2u+v)}$

17 -6 19 $\int_0^2 \int_0^{2-u} (v - u)\, 2\, dv\, du$

21 $\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-v^2}}^{\sqrt{1-v^2}} (u^2 + v^2)\, 6\, du\, dv$

23 $\int_1^3 \int_{-1}^{1} (u^2 \cos^2 v)\frac{1}{2}\, du\, dv = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}\operatorname{sen} 6 - \frac{1}{12}$ $\operatorname{sen} 2 \approx 0{,}23$

25 $\int_1^2 \int_{\sqrt{u}}^{\sqrt{2u}} \left(\frac{u^2}{v^2} + 2v^2\right)\frac{1}{v}\, dv\, du = \frac{15}{8}$

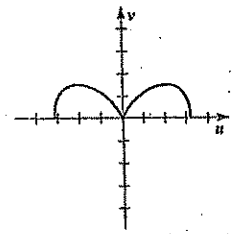
27 $-\int_2^4 \int_{-u/2}^{2u} \left(\frac{v}{u}\right)\left(-\frac{1}{5}\right) dv\, du = \frac{9}{4}$

29 $1{,}08 \times 10^{12}\ \text{km}^3$

31 (a) (1, 1, 1) (b) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right)$

(c) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1,\ \frac{1}{\sqrt{2}} + 1,\ 0\right)$

37



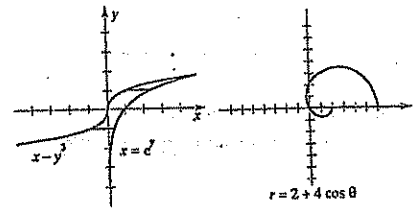
17.10 EXERCÍCIOS DE REVISÃO

1 $-\frac{5}{84}$ 3 $\frac{63}{4}$ 5 $-\frac{107}{210}$

7 $\int_2^4 \int_{-\sqrt{x^2-4}}^{\sqrt{x^2-4}} f(x, y)\, dy\, dx$

9 $\int_2^{-2} \int_{y^2-4}^{4-y^2} f(x, y)\, dx\, dy$

11



13

15 $\frac{1}{4}(1 - e^{-81}) \approx 0{,}25$ 17 13

19 $4\sqrt{2}\pi \approx 17{,}77$

21 $2 \ln 2 - \frac{3}{4} \approx 0{,}64$

23 $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/4} \int_0^{4\sqrt{2}} (\rho \cdot \rho^2 \operatorname{sen}\phi) d\rho\, d\phi\, d\theta$ $= 64(2 - \sqrt{2})\pi \approx 117{,}78$

25 $9k$ (k constante de proporcionalidade); $\left(\frac{9}{4}, \frac{27}{8}\right)$

27 $2\pi k$ 29 $\frac{1}{20}ab^4k$ 31 $\frac{256}{15}$; $\left(0, \frac{8}{7}, \frac{12}{7}\right)$

33 $I_y = \int_0^4 \int_{-\sqrt{1+y^2}}^{\sqrt{1+y^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2+y^2}} k(x^2 + z^2)\sqrt{x^2 + z^2}\, dz\, dx\, dy$

35 $\pi a^4 k$

37 Retangular: $(-3\sqrt{2},\ 3\sqrt{2},\ 6\sqrt{3})$; cilíndrico: $\left(6, \frac{3\pi}{4}, 6\sqrt{3}\right)$

39 $z = 9 - 3x^2 - 3y^2$; paraboloide com vértice (0, 0, 9) e abertura para baixo.

41 $x^2 + y^2 = 16$; cilindro circular reto de raio 4 e eixo segundo o eixo-z.

43 $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - 3) = 0$; esfera de raio 3 e centro na origem, juntamente com seu centro.

45 (a) $z = r^2 \cos 2\theta$

(b) $\cos\phi = \rho \operatorname{sen}^2\phi \cos 2\theta$

47 (a) $2r\cos\theta + r \operatorname{sen}\theta - 3z = 4$

(b) $2\rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta + \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta - 3\rho\cos\phi = 4$

49 (a) $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{25 - z^2}} dy\, dx$

(b) $\int_0^3 \int_0^4 dx\, dy + \int_3^5 \int_0^{\sqrt{25 - y^2}} dx\, dy$

(c) $\int_0^{\operatorname{arctg}(3/4)} \int_0^{4\sec\theta} r\, dr\, d\theta + \int_{\operatorname{arctg}(3/4)}^{\pi/2} \int_0^5 r\, dr\, d\theta$

51 (a) $\int_0^5 \int_0^{\sqrt{25 - x^2}} \int_0^{\sqrt{25 - x^2 - y^2}} dz\, dy\, dx -$ $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9 - x^2}} \int_3^{\sqrt{25 - x^2 - y^2}} dz\, dy\, dx$

(b) $\int_0^{\pi/2} \int_0^4 \int_0^3 r\, dz\, dr\, d\theta + \int_0^{\pi/2} \int_4^5 \int_0^{\sqrt{25 - r^2}} r\, dz\, dr\, d\theta$

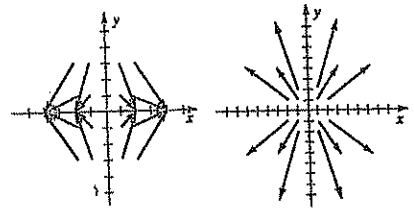
(c) $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\operatorname{arctg}(4/3)} \int_0^{3\sec\phi} \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta +$ $\int_0^{\pi/2} \int_{\operatorname{arctg}(4/3)}^{\pi/2} \int_0^5 \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$

53 $e - 1 \approx 1{,}72$

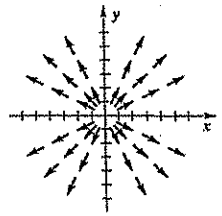
CAPÍTULO 18

EXERCÍCIOS 18.1

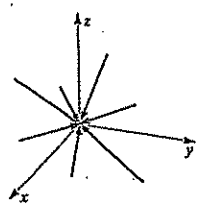
1 3



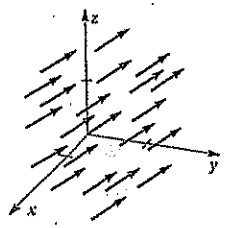
5



7



9



11 $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} - 6y\mathbf{j} + 8z\mathbf{k}$

13 $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{1}{1 + x^2y^2}(y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$

15 $\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$; $2xz + 2xy + 2$

17 $-y^2 \cos zi + (6xyz - e^{2x})\mathbf{j} - 3xz^2\mathbf{k}$; $3yz^2 + 2y \operatorname{sen} z + 2xe^{2x}$

37 0,145

EXERCÍCIOS 18.2

1 $14(2^{3/2} - 1) \approx 25{,}60$; 21; 14

3 $\dfrac{34}{7}$ 5 $-\dfrac{16}{3}$

7 (a) $\dfrac{15}{2}$ (b) 6 (c) 7 (d) $\dfrac{29}{4}$

9 $\dfrac{1}{12}(3e^4 + 6e^{-2} - 12e + 8e^3 - 5) \approx 23{,}97$

11 (a) 19 (b) 35 (c) 27 (d) $\dfrac{3}{2}\sqrt{14}$

15 $\dfrac{9}{2}$ (para todos os caminhos)

17 0 19 $\dfrac{412}{15}$ 23 $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = \dfrac{1}{4}\pi a$

27 $I_x = \dfrac{4}{3}ka^3$; $I_y = \dfrac{2}{3}ka^3$

29 Se a densidade em (x, y, z) é $\delta(x, y, z)$, então $I_x = \int_C (y^2 + z^2)\,\delta(x, y, z)\,ds$, $I_y = \int_C (x^2 + z^2)\,\delta(x, y, z)\,ds$, e $I_z = \int_C (x^2 + y^2)\,\delta(x\ y, z)\,ds$.

31 0,1554

EXERCÍCIOS 18.3

1 $f(x, y) = x^3y + 2x + y^4 + c$

3 $f(x, y) = x^2 \operatorname{sen} y + 4e^x + c$

5 $f(x, y) = 2y^3 \cos x + 5y + c$

7 $f(x, y, z) = 4x^2z + y - 3y^2z^3 + c$

9 $f(x, y, z) = y \operatorname{tg} x - ze^x + c$

Exercs. 11-14: Dá-se uma função potencial f, juntamente com o valor da integral.

11 $f(x, y) = xy^2 + x^2y$; 14

13 $f(x, y, z) = 3x^2y^3 + 2xz^2 + z$; -31

15 $\dfrac{\partial}{\partial y}(4xy^3) = \dfrac{\partial}{\partial x}(2xy^3)$

17 $\dfrac{\partial}{\partial y}(e^x) = \dfrac{\partial}{\partial x}(3 - e^x \operatorname{sen} y)$

21 $\dfrac{\partial N}{\partial z} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$

23 $f(x, y, z) = -\dfrac{1}{2}c \ln(x^2 + y^2 + z^2) + d$, onde $c > 0$ e d é uma constante,

27 Isto não viola (18.16) pois D não é simplesmente conexo. M e N não são contínuas em $(0, 0)$.

29 $W = c\dfrac{d_2 - d_1}{d_1 d_2}$

EXERCÍCIOS 18.4

1 $-\dfrac{7}{60}$ 3 $\dfrac{2}{3}$ 5 π 7 -3

9 0 11 0 13 -3π 15 $\dfrac{128}{3}$

17 $6 - \dfrac{5}{2}\ln 5 \approx 1{,}98$ 19 $\dfrac{3}{8}\pi a^2$

23 O Teorema de Green não se aplica, pois M e N não são contínuas em $(0, 0)$, não o sendo, pois, em *todo* o círculo unitário.

27 $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = \dfrac{4a}{3\pi}$

EXERCÍCIOS 18.5

1 $\dfrac{2}{3}\pi a^4$ 3 $5\sqrt{14}$

5 (a) $\displaystyle\int_0^4 \int_0^{(12-3y)/4} \frac{1}{2}(12 - 3y - 4)y^2z^3\left(\frac{1}{2}\sqrt{29}\right) dz\,dy$

(b) $\displaystyle\int_0^3 \int_0^{6-2z} x\left[\frac{1}{3}(12 - 2x - 4z\right]^2 z^3\left(\frac{1}{3}\sqrt{29}\right) dx\,dz$

7 (a) $\displaystyle\int_0^8 \int_0^6 \left(4 - 3y + \frac{1}{16}y^2 + z\right)\left(\frac{1}{4}\sqrt{17}\right) dz\,dy$

(b) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^6 [x^2 - 2(8 - x) + z]\sqrt{17}\,dz\,dx$

9 Como $\iint_S g(x, y, z)\,dS = c\iint_R dA$, o valor da integral é igual ao volume de um cilindro de altura c com geratrizes paralelas ao eixo-z, cuja base é a projeção de S sobre o plano-xy.

11 $2\pi a^3$ 13 3π 15 18 17 8

21 (a) $\dfrac{255}{2}\pi\sqrt{2}$; $\bar{x} = \bar{y} = 0$, $\bar{z} = \dfrac{1.364}{425}$ (b) $1.365\pi\sqrt{2}$

EXERCÍCIOS 18.6

1 24 3 20π 5 0

7 $\dfrac{136\pi}{3}$ 9 24

11 Ambas as integrais são iguaus a $4\pi a^3$.

13 Ambas as integrais são iguais a 4π.

27 62,5π kg para cima.

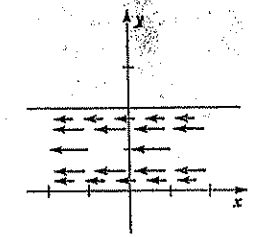
EXERCÍCIOS 18.7

1 Ambas as integrais são iguais a -1.

3 Ambas as integrais são iguais a πa^2.

5 0 7 -8π

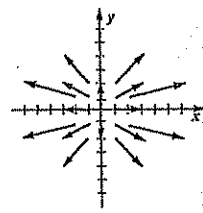
9 O medidor de rotacional gira em sentido anti-horário para $0 < y < 1$ e em sentido horário para $1 < y < 2$. Não há rotação se $y = 1$. rot $\mathbf{F} = 2(1 - y)\mathbf{k}$; $|\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}| = |2(1 - y)|$ com máximo 2 em $y = 0$ e $y = 2$ e mínimo 0 em $y = 1$.



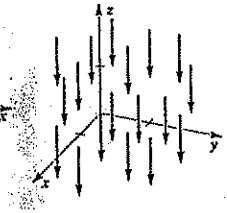
11 A Figura 18.5 ilustra vetores típicos de um campo. Um medidor gira em sentido anti-horário para todo $(x, y) \neq (0, 0)$. rot $\mathbf{F} = 2\mathbf{k}$; $|(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}| = 2$ para todo, (x, y).

18.8 EXERCÍCIOS DE REVISÃO

1



3



5 $\mathbf{F}(x, y) = (y^2 \sec^2 x)\mathbf{i} + (2y \operatorname{tg} x)\mathbf{j}$

7 -8 9 $-\dfrac{56}{5}$

11 $\dfrac{1}{144}(1.025^{3/2} - 17^{3/2}) \approx 227{,}40$

13 70 15 0 17 $\dfrac{25}{2}$

19 $f(x, y, z) = x^2e^{2y} + y^2 \cot z + c$ 21 $\dfrac{1}{6}$

23 $3x^2z^4 + xz^2$; $(2x^2y - 2xyz)\mathbf{i} + (4x^3z^3 - 2xy^2)\mathbf{j} + (yz^2)\mathbf{k}$

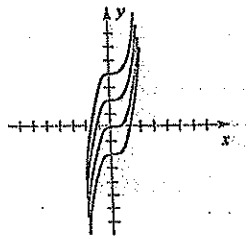
25 $\frac{1}{5}\sqrt{3}$ 27 $\frac{5\pi}{2}$

29 Ambas as integrais são iguais a 8π.

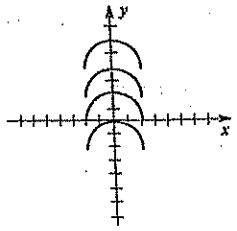
CAPÍTULO 19

EXERCÍCIOS 19.1

1 (a) $y = x^3 + C$ (b) $y = x^3 + 2$



3 (a) $y = \sqrt{4 - x^2} + C$ (b) $y = \sqrt{4 - x^2}$



11 $y = Ce^{2 \operatorname{sen} x}$ 13 $y = Cx$

15 $x^3e^xy^5 = C$ 17 $y = -1 + Ce^{(x^2/2) - x}$

19 $y = -\frac{1}{3}\ln(3C + 3e^{-x})$

21 $y^2 = C(1 + x^3)^{-2/3} - 1$

23 $x \operatorname{sen} x + \cos x - \ln|\operatorname{sen} y| = C$

25 $\sec x + e^{-y} = C$

27 $y^2 + \ln y = 3x - 8$

29 $y = \ln(2x + \ln x + e^2 - 2)$

31 $y = 2e^{2 - \sqrt{4 + x^2}} - 1$

33 $\operatorname{arctg} y - \ln|\sec x| = \frac{\pi}{4}$

35 $xy = k$; hipérboles

37 $2x^2 + y^2 = k$; elipses

39 $2x^2 + 3y^2 = k$; elipses

41 (a) 1.524 (b) $y = e^{x^2/2}$; $e^{1/2} = 1{,}648721$

43 1,647355

EXERCÍCIOS 19.2

1 $y = \frac{1}{4}e^{2x} + Ce^{-2x}$ 3 $y = \frac{1}{2}x^5 + Cx^3$

5 $y = \frac{e^x}{x} - \frac{1}{2}x + \frac{C}{x}$ 7 $y = \frac{e^x + C}{x^2}$

9 $y = \frac{4}{3}x^3 \csc x + C \csc x$

11 $y = 2 \operatorname{sen} x + C \cos x$ 13 $y = x \operatorname{sen} x + Cx$

15 $y = \left(\frac{1}{3}x + \frac{C}{x^2}\right)e^{-3x}$ 17 $y = \frac{3}{2} + Ce^{-x^2}$

19 $y = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x + \frac{C}{\operatorname{sen} x}$

21 $y = \frac{1}{3} + (x + C)e^{-x^3}$

23 $y = x(x + \ln x + 1)$

25 $y = e^{-x}(1 - x^{-1})$

27 $Q = CV(1 - e^{-t/RC})$

29 $f(t) = \frac{80}{3}(1 - e^{-0{,}075t}) + Ke^{-0{,}075t}$

31 (a) $f(t) = M + (A - M)e^{k(1-t)}$ (k constante)

(b) 28 itens

33 $y = y_L(1 - ce^{-kt})$, $k > 0$

35 (b) $y = \frac{1}{k}(1 - e^{-kt})$ (c) 0,58 mg/min

37 −3,23103 39 0,14817

EXERCÍCIOS 19.3

1 $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$ 3 $y = C_1 + C_2e^{3x}$

5 $y = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x}$

7 $y = C_1e^{(2+\sqrt{3})x} + C_2e^{(2-\sqrt{3})x}$

9 $y = C_1e^{-\sqrt{2}x} + C_2xe^{-\sqrt{2}x}$

11 $y = C_1e^{-3x/2} + C_2e^{5x/4}$ 13 $y = C_1e^{4x/3} + C_2xe^{4x/3}$

15 $y = C_1e^{(2+\sqrt{2})x/2} + C_2e^{(2-\sqrt{2})x/2}$

17 $y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x)$

19 $y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \operatorname{sen} 3x)$

21 $y = C_1e^{(-3+\sqrt{7}x)} + C_2e^{(-3-\sqrt{7}x)}$

23 $y = -2e^x + 2e^{2x}$ 25 $y = \cos + 2 \operatorname{sen} x$

27 $y = e^{-4x}(2 + 9x)$ 29 $y = \frac{1}{2}e^x \operatorname{sen} 2x$

EXERCÍCIOS 19.4

1 $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x - \cos x \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|$

3 $y = \left(C_1 + C_2x + \frac{1}{12}x^4\right)e^{3x}$

5 $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + \frac{2}{5}e^x \operatorname{sen} x - \frac{1}{5}e^x \cos x$

7 $y = \left(C_3 + \frac{1}{6}x\right)e^{3x} + C_2e^{-3x}$, $C_3 = C_1 - \frac{1}{36}$

9 $y = C_1e^{-x} + C_2e^{4x} - \frac{1}{2}$

11 $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{2}{3}e^{-x}$

13 $y = C_1 + C_2e^{-2x} + \frac{1}{8}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{8}\cos 2x$

15 $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + \frac{1}{9}(-4 + 3x)e^{2x}$

17 $y = e^{3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x) + \frac{1}{65}e^x(7 \cos x - 4 \operatorname{sen} x)$

21 0,776805

EXERCÍCIOS 19.5

1 $-\frac{1}{25}\cos 10\sqrt{2}t$

3 $y = \frac{\sqrt{23}}{115}e^{-25t}(e^{5\sqrt{23}t} - e^{-5\sqrt{23}t})$

5 $y = \frac{1}{3}e^{-8t}(\operatorname{sen} 8t + \cos 8t)$,

$y = e^{-8t}\left(\frac{1}{50}\cos 2\sqrt{26}t + \frac{4}{25\sqrt{26}}\operatorname{sen} 21\sqrt{26}t\right)$

7 Se m é a massa do peso, então a constante da mola é $24m$ e a força amortecedora é $-4m\frac{dy}{dt}$. O movimento começa liberando-se o peso 2 cm acima da posição de equilíbrio com uma velocidade inicial de 1 cm/seg na direção para cima.

9 $-11{,}42\frac{dy}{dt}$

EXERCÍCIOS 19.6

1 $y = a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + a_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$

3 $y = a_0\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(3n-2)(3n-5)\ldots 7\cdot 4\cdot 1}{(3n)!}x^{3n}\right] + a_1\left[x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(3n-1)(3n-4)\ldots 8\cdot 5\cdot 2}{(3n+1)!}x^{3n+1}\right]$

5 $y = a_0(1 - x^2) + a_1\left[x - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 5\cdot 3\cdot 1}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right]$

7 $y = a_0(x + 1)^3$

9 $y = -5x + a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} + a_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!} = -5x + a_0e^x + a_1e^{-x}$

11 $y = a_0\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{2n} + a_1\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{3}\right)x^{2n+1} + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^{2n}$

19.7 EXERCÍCIOS DE REVISÃO

1 $\operatorname{sen} x - x\cos x + e^{-y} = C$

3 $y = \operatorname{tg}(\sqrt{1-x^2} + C)$ 5 $y = \dfrac{2x - 2\cos x + C}{\sec x + \operatorname{tg} x}$

7 $y = 2\operatorname{sen} x + C\cos x$

9 $\sqrt{1-y^2}\ \operatorname{arcsen} x = C$

11 $\csc y = e^{-x} + C$

13 $y = \dfrac{1}{2} + Ce^{-2\operatorname{sen} x}$ 15 $y = (C_1 + C_2 x)e^{4x}$

17 $y = C_1 + C_2 e^{2x}$

19 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} - \dfrac{1}{5}e^{x}(2\cos x + \operatorname{sen} x)$

21 $y = \dfrac{1}{5}e^{4x} + Ce^{-x}$ 23 $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + \dfrac{1}{12}e^{5x}$

25 $y = \dfrac{(x-2)^3}{3x} + \dfrac{C}{x}$

27 $y = e^{-5x/2}\left[C_1 \cos\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{3}\,x\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{3}\,x\right)\right]$

29 $\dfrac{1}{2}e^{x}(\operatorname{sen} x - \cos x) + e^{-x} = C$

31 $y = \dfrac{1}{2}\cos x + C\ sec\ x$

33 $y = \dfrac{\ln|\sec x + \operatorname{tg} x| - x + C}{\csc x - \cot x}$

35 $y = \dfrac{3.500}{3}e^{(3/(2\pi))(1-\cos 2\pi t)} - \dfrac{2.000}{3}$; 2.366

37 $f(t) = \dfrac{ab[e^{k(b-a)t} - 1]}{be^{k(b-a)t} - a}$

39 $y\,dy + x\,dx = 0$; um círculo com centro na origem.

MAKRON *Books*

ÍNDICE ANALÍTICO

A

Aceleração, 309
  centrípeta, 311
  componente normal da, 333
  componente tangencial da, 333
Ângulo, de dois vetores, 235, 333
Área
  como limite, 476
  de uma superfície, 494
  em coordenadas polares, 195
Assíntota
  de uma hipérbole, 140

C

Caminho, 363, 584
Campo vetorial, 560
  circulação de um, 626
  conservativo, 564
  de forças, 560
  divergência de um, 567, 620
  estacionário, 560
  fluxo de um, 612
  irrotacional, 626
  quadro inverso, 562
  rotacional de um, 626
  rotação de um, 622
  velocidade de um, 560
Caracol, 184
Cardióide, 184
Cauchy-Schwarz,
  desigualdade de, 237
Centro de curvatura, 325
Centro de massa
  de uma lâmina, 513
  de um sólido, 507
Centróide
  de um sólido, 516
  de uma região plana, 513
Ciclóide, 167
Cilindro, 272
Cilindro circular reto, 272
Cilindro elíptico, 273
Cilindro parabólico, 273
Circulação, 626
Círculo de curvatura, 325
Coeficiente angular
  em coordenadas polares, 190
Coeficientes indeterminados, 663
Combinação linear, 220
Completude, propriedade de, 13
Componente normal da aceleração, 333
Componente tangencial da aceleração, 333
  de um vetor, 579
Componentes de um vetor, 213, 220, 238, 239
Comprimento de arco, 197
  como parâmetro, 320
Comprimento de uma curva, 176, 296
Cone, 278
Cônica(s), 111
  degenerada, 111
  diretriz de uma, 202
  excentricidade de uma, 202
  equação polar das, 204
  foco de uma, 202
Coordenadas-x, 226

Coordenadas-y, 226
Coordenadas-z, 226
Coordenadas
  cilíndricas, 522
  esféricas, 533
  polares, 181
    integral dupla em, 486
  transformação de, 541
Coulomb, lei de, 563
Conservação da energia, 593
Continuidade
  de uma função, 366
  de uma função vetorial, 299
Convergência, absoluta, 57
  condicional, 58
  de uma seqüência, 4
  de uma série infinita, 19
  intervalo de, 69
Cúbica reversa, 293
Curva(s), 160, 292
  comprimento de uma, 176, 296
  de mínimo declive, 168
  de nível, 349
  direção positiva de uma, 546, 570, 596
  equações paramétricas de uma, 161, 292
  fechada, 160
  gráfico de uma, 160, 292
  mutuamente ortogonais, 643
  no espaço, 292
  orientação de uma, 162, 294
  parametrizada, 161, 292
  parcialmente suave, 166, 293
  plana, 160
  pontos extremos de uma, 160
  simples fechada, 160
  suave, 166, 293
Curvatura, 321, 328
  centro, círculo e raio de, 325

D

Del (∇), operador, 411, 565
Densidade, de área, 509
  de massa, 507-509, 574
  de um sólido, 507
  linear, 574
Derivada
  de uma função composta, 398
  de uma função vetorial, 299
  de uma série de potências, 75
  direcional, 409, 415
  parcial, 372
Derivadas parciais mistas, 377
Desigualdade triangular, 237
Deslocamento, 213
Determinante, 244
Diagrama em árvore, 399
Diferencial, definição, 386, 391
Diferenciável, função, 389
Direção negativa, 546
Direção positiva em uma curva, 546, 570, 596
Diretriz, de um cilindro, 272
  de uma parábola, 112
  de uma secção cônica, 202
Disco, aberto, 365
  fechado, 366
Discriminante, 433
Distância, fórmula da, 227
Divergência
  de um campo vetorial, 440, 620
  de uma série infinita, 19
  teorema da, 616
Duplo produto vetorial, 250

E

Eixo(s)
  conjugados de uma hipérbole, 140
  de uma parábola, 112
  maior de uma elipse, 128
  menor de uma elipse, 128
  polar, 181
  rotação de, 151
  translação de, 115
  transverso de uma hipérbole, 139
Elipse, 126
  centro de uma, 126
  eixo maior de uma, 128
  eixo menor de uma, 128
  equação polar da, 204
  excentricidade da, 134
  focos de uma, 126
  vértices de uma, 128

Elipoide, 274
Energia, cinética, 516
  potencial, 592
Equação auxiliar, 655
Equação complementar, 660
Equação diferencial
  condição inicial de uma, 638
  fator integrante de uma, 646
  homogênea, 654
  linear, 645, 654
  não-homogênea, 634
  ordem de uma, 638
  ordinária, 638
  separável, 640
  solução de uma, 638
  solução em série de uma, 673
  solução geral de uma, 638
  solução particular de uma, 638
  solução singular de uma, 640
Equação polar, 182
  de uma cônica, 204
Equações paramétricas, 161
Escalar, 212
  função, 290
  produto, 234
Esfera, 231
Espiral de Arquimedes, 186
Euler, fórmula de, 658
Excentricidade, 134, 202
Extremo(s)
  de uma função, 431
  inferior, 13
  locais, 431
  na fronteira, 431
  superior, 13
  testes para, 433
  vinculados, 444

F

Fator integrante, 646
Figuras de Lissajous, 165
Fluxo, 612
Foco, de uma cônica, 202
  de uma elipse, 126
  e uma hipérbole, 138
  de uma parábola, 112
Fonte, 567, 612
Força, campo de uma, 560
  resultante de uma, 213
  vetor, 212
Forma simétrica das equações de uma reta, 262
Fórmula de Euler, 658
Função (ões)
  com valores racionais, 290
  com valores vetoriais, 290
  contínua, 367
  de duas variáveis, 346
  de várias variáveis, 346
  diferenciável, 389
  extremos locais de uma, 431
  extremos de uma, 431
  gradiente de uma, 411, 415
  gráfico de uma, 348
  integrável, 462
  limite de uma, 360, 367
  polinomial, 361
  potencial, 564
  racional, 361
  representação por série de potências, 73
  valor máximo de uma, 430
  valor mínimo de uma, 430
Função vetorial, 290
  contínua, 299
  continuidade de uma, 304
  derivada de uma, 299
  diferenciável, 300
  integral definida de uma, 305
  limite de uma, 298

G

Gauss, Carl Friedrich, 615
Geratriz de um cilindro, 272
Gradiente de uma função, 411, 415
  teorema do, 413
Gráfico, de uma equação, 230
  de uma função, 348
Green, teorema de, 595

H

Hélice ordinária, 294
Hipérbole, 138
  assíntotas de uma, 140
  centro de uma, 139

eixo transverso de uma, 139
eixos conjugados de uma, 140
equação polar de uma, 204
focos de uma, 138
ramos de uma, 140
vértices de uma, 140
Hiperbolóide, 277-278
Homogêneo, sólido, 507

I

Incremento, 382
Independência do caminho, 584
Integração, inversão da ordem de, 470
de uma série de potências, 74
parcial, 464
por mudança de variáveis, 547
Integral dupla, 461
de função vetorial, 304
em coordenadas polares, 487
fluxo, 610
inversão da ordem de integração, 471
iterada, 464, 501
mudança de variável na, 547
teorema para o cálculo de uma, 467
Integral de superfície, 606
Integral tríplice, 499
em coordenadas cilíndricas, 525
em coordenadas esféricas, 537
iterada, 501
mudança de variáveis na, 550
teorema do valor médio para a, 619
teorema para o cálculo da, 500, 504
Interior, ponto, 366
Intervalo, de convergência, 69
Isobáricas, 351
Isotérmicas, 351

J

Jacobiano, 546, 550

K

Kepler, Johannes, 338
leis de, 338

L

Lagrange, Joseph, 444
multiplicadores de, 446
teorema de, 445
Lâmina
massa de uma, 509
momento de uma, 512
Lei de Coulomb, 563
Lei de Newton da gravitação universal, 563
Limite, de uma função, 360, 367
de uma função vetorial, 299
de uma função seqüêncial, 5
Lissajous, figuras de, 165

M

MacLaurin, fórmula de, 87
polinômio de, 85
resto de, 87
série de, 84
Massa de um sólido, 508
Método de Newton, 393
Möbius, A. F., 611
Módulo de um vetor, 212, 214
Momento, de inércia, 515, 518
de uma lâmina, 513
de um sólido, 516
de um vetor, 251
Movimento não amortecido, 667
Mudança de variáveis, 547
Múltiplo escalar de um vetor, 213, 215

N

Newton, Sir Isaac
lei da gravitação universal, 563
método de, 393
segunda lei de, 312
Norma de uma partição, 461, 498
Norma, exterior, 611
inferior, 611
interior, 611
superior, 611
unitária principal, 317

O

Operador diferencial, 660
Ordem, de uma equação diferencial, 638
de integração, inversão da, 471
Orientação de uma curva, 162

P

Pappus, teorema de, 520
Parábola, 112
diretriz de uma, 112
eixo de uma, 112
equação polar de uma, 204
foco de uma, 112
vértice de uma, 112
Paraboláide, 272, 280
hiperbólico, 280
Parametrização, 161, 292
Parâmetros, 161
independentes, 639
Partição
interior, 461, 500
norma de uma, 461, 498
polar, 485
Plano tangente, 422
Plano *xy*, 225
Plano *xz*, 225
Plano *yz*, 225
Plano(s), equação de um, 258
ortogonais, 260
paralelos, 260
Poço, 567, 613
Polinômio de MacLaurin, 85
Ponto crítico, 431
Ponto de sela, 433
Ponto fronteira, 366
Ponto médio, fórmula do, 230
Potencial, 564
função, 564
Produto escalar, 233, 236
Produto interno, 234
Produto misto, 251
Produto vetorial, 245
Projeção regular, 605
Propriedade reflexiva, de uma elipse, 135
de uma hipérbole, 147
de uma parábola, 122

R

Raio de curvatura, 325
Ramos de uma hipérbole, 142
Recorrência, definição por, 4
Região, aberta, 366
conexa, 584
fechada, 366
limitada, 430
R, 194
simplesmente conexa, 590
Regra da cadeia, 398
Resto na fórmula de Taylor, 87
Reta(s), ângulo de duas, 256
equação de uma, 254, 262
equação paramétricas de uma, 262
forma simétrica das equações de uma, 262
no espaço, 254
normal, 423
ortogonais, 256
paralela a um vetor, 253
paralelas, 256
reversas, 265
Riemann, soma de, *Ver* Soma de Riemann
Rosácea de quatro folhas, 185
Rotação, de eixos, 151
de um campo vetorial, 626
Rotacional de um campo vetorial, 565, 626

S

Segmento orientado, 212
Segunda lei de Newton, 312
Seqüência, 2
de somas parciais, 19
definida por recorrência, 4
limitada, 12
limite de uma, 5
monotônica, 12
termo de uma, 2
Série(s) infinita(s), 19
absolutamente convergentes, 57
alternadas, 52
binomial, 103
condicionalmente convergentes, 58
convergentes, 20
de MacLaurin, 83
de potências, 65, 70
diferenciação de, 75
integração de, 75
intervalo de convergência, 69
representação de funções por, 73
reagrupamento dos termos de uma, 44, 61

de Taylor, 84
de termos positivos, 34
diretrizes para o estudo de uma, 62
divergente, 20
dominante, 40
geométrica, 23
grupamento dos termos de uma, 44
harmônica, 23
hiperarmônica, 38
nº termo de uma, 19
-p, 38
seqüência de somas parciais, 19
soma de uma, 19
soma parcial de uma, 19
supressão de termos de uma, 27
telescópica, 21
termo de uma, 19
teste da integral para, 35
teste limite de comparação, 41
teste do enésimo termo, 26
teste da razão, 47, 60
teste da raiz, 50
Sistemas de coordenadas, 226
direto, 225
inverso, 225
xyz, 226
Sólido homogêneo, 507
Sólido não-homogêneo, 460
Solução particular, 638
Solução por séries, 675
Solução singular, 640
Soma parcial de uma série, 19
Soma de Riemann, 461, 499, 500
Soma de uma série, 19
Somatório duplo, 475
Stokes, teorema de, 624
Superfície, 230
eqüipotencial, 351
fechada, 615
isotérmica, 351
orientada, 638
quádrica, 274
Superfícies de nível, 351

T

Tangente, a uma curva, 302
a uma superfície, 421
Taylor, polinômio de, 87
fórmula de, 87
resto da fórmula de, 87
série de, 84
Temperatura estacionária, 417
Teorema de Stokes, 624
Teorema de "sanduíche", 11
Termo, de uma seqüência, 2
de uma série, 20
Termo ordenado, 225
Teste integral para séries, 33
Teste limite de comparação, 41
Teste da raiz, 50
Teste da razão, 47, 60
Teste de comparação, 39-40
Torque, 251
Traço, 260, 269
Trajetória ortogonal, 643
Trabalho, 240, 579-580
Transformação de coordenadas, 541
Translação de eixos, 115

U

Unidade astronômica (UA), 134

V

Valor máximo, 430
Valor mínimo, 430
Variação de parâmetros, 661
Variável (eis)
dependente, 348
independente, 348
mudança de, 547
Velocidade, 212, 309
angular, 310, 312
campo de, 560
Vértice, de uma elipse, 128
de uma hipérbole, 139
de uma parábola, 112
Vetor (es)
adição de, 212, 215
ângulo de dois, 235
combinação linear de, 220
com mesma direção, 218
componente horizontal de um, 220
componente tangencial de um, 579

componente vertical de um, 220
componentes de um, 213, 220, 238, 239
diferença de, 216
duplo produto vetorial, 250
equivalentes, 212
força, 212
i, 220, 229
iguais, 212, 214
j, 220, 229
k, 229
módulo de um, 212, 214
momento de um, 251
multiplicação por escalar, 213, 215
múltiplo escalar de um, 213, 215
negativo de um, 216
normal, 257
normal principal, 317
oposto, 218
ortogonais, 235
paralelos, 219
perpendiculares, 235
ponto inicial de um, 212
ponto terminal de um, 212
posição, 213
produto de, 245
produto escalar de, 233-236
produto misto de três, 251
produto vetorial, 245
resultante, 213
soma de, 213, 215
subtração de, 216
tangente, 302
tangente unitário, 208
torque, 251
unitário, 221, 229
velocidade, 212
zero, 216
Vibração, amortecida, 669
criticamente amortecida, 670
não-amortecida, 670
super-amortecida, 670
Vibrações, 666
Vínculo, 444
Volume, por integral dupla, 463
por integral tríplice, 502

Secção tranversa, 418
Separável, equação diferencial, 527
Setor circular, 35
Simetria, 8
  testes de, 8
Sistema de coordenadas, 6
Sistema coordenado retangular, 6
Sólido homogêneo, 448
Sólido de revolução, 400
Somação, notação de, 326
Substituição trigonométrica, 591
Superfície de revolução, 430

T

Tábua
  de funções trigonométricas, 675-677
  de integrais, 678
  de funções logarítmicas, 678
Tangente,
  coeficiente angular da, 116
  vertical, 127
Taxa de variação,
  média, 121
  instantânea, 121
Taxas relacionadas, 194
Teorema fundamental do cálculo, 362
Teorema de Rolle, 228
Teorema do sanduíche, 80
Teorema do valor intermediário, 106-107
Teorema do valor médio, 228
  para integrais definidas, 356
Teste da derivada primeira, 236
Toro, 454
Trabalho, 436
Translação horizontal, 23
Translação vertical, 22

V

Valor de uma função, 17
Valor máximo, 213
Valor médio, 359
Valor mínimo, 213
Valor ótimo, 264
Variável (eis),
  de integração, 306
  de teste, 234
  dependente, 18
  independente, 18
  muda, 344
  mudança de, 318
  somação de, 326
Velocidade, 280
Vértice de um ângulo, 33
Volume
  de um sólido de revolução, 400
  pelo teorema de Pappus, 454
  por meio de anéis cilíndricos, 413
  por meio de anel, 405
  por meio de discos, 403
  por meio de secções transversas, 418

Z

Zero de uma função, 19

MAKRON Books
CORTESIA
Rep. José Marcos
(011) 820-3105

BIBLIOTECA DO DME/UFCG
ZELE OS LIVROS
EVITE MULTAS
ENTREGANDO-OS EM DIA

DOBRE AQUI E COLE

CADASTRO PARA MALA DIRETA

Favor preencher todos os campos

* Devolvendo-nos este cadastro preenchido, você passará a receber informações dos nossos lançamentos, nas áreas que determinar. INVISTA EM SEU FUTURO PROFISSIONAL

NOME (não abreviar):
END. PARA CORRESPONDÊNCIA:
CIDADE: UF: CEP: FONE:
EMPRESA
Nascimento: Dia Mês

1. Estou interessado em livros das seguintes áreas
☐ 1. Informática ☐ 2. Marketing ☐ 3. Vendas
☐ 4. Administração ☐ 5. Economia ☐ 6. Recursos Humanos
☐ 7. Qualidade/Produtividade ☐ 8. Psicologia/Sociologia ☐ 9. Ensino Inglês
☐ 10. Engenharia Civil ☐ 11. Engenharia Mecânica ☐ 12. Eng. Elétrica/Eletrônica
☐ 13. Engenharia Química ☐ 14. Ecologia ☐ 15. Outras (especificar): _____

2. Cargo
☐ 1. Presidente ☐ 2. Diretor
☐ 3. Gerente ☐ 4. Supervisor
☐ 5. Analista ☐ 6. Consultor
☐ 7. Programador ☐ 8. Digitador
☐ 9. Outros (especificar): _____

Obra: CÁLCULO COM GEOMETRIA ANALÍTICA - 2ª Edição

Autoria: Earl W. Swokowski

MAKRON Books do Brasil Editora Ltda.
"Padrão de Qualidade em Livros"
Rua Tabapuã, 1348 - Itaim-Bibi SP
04533-004 - Tels.: 820-6622 / 829-8604

MAKRON Books